

Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet

Principi modernih telekomunikacija

3p. Linearni sistemi

Sistemi za prenos signala

- **Sistem** je opšti naziv za entitet sastavljen od međusobno povezanih uređaja, u kome se obavlja transformacija ulaznog signala u signal na izlazu iz sistema.
- Ulazni i izlazni signal po pravilu su **funkcije vremena**, mada mogu da budu i funkcije drugih argumenata.
- Podela
 - **Linearni**
 - Signal na izlazu je linearna transformacija ulaznog signala.
 - homogenost $f[kx(t)] = kf[x(t)]$;
 - aditivnost $f[x_1(t) + x_2(t)] = f[x_1(t)] + f[x_2(t)]$.
 - Linearnost dozvoljava da se odziv sistema predstavi kao suma pojedinačnih odziva na pobudu pojedinačnim komponentama (sabircima!) pobudnog signala.
 - **Nelinearni**
 - Ne zadovoljavaju gornje uslove.

Osobine sistema

- **Izvor nema memoriju** ako izlazni signal u trenutku t zavisi samo od ulaznog signala u trenutku t (ne zavisi od prethodnih trenutaka).

- **Vremenska invarijantnost**

$$F[x(t)] = y(t) \rightarrow F[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

– Ako je na ulazu u linearan vremenski invarijantan sistem prisutna (kompleksna) pobuda na samo jednoj učestanosti, na izlazu se pojavljuje odziv na istoj toj učestanosti (samo na njioj!)

- **Kauzalnost** – odziv u posmatranom trenutku ne zavisi od odziva u prethodnim trenucima, uključujući tu i tekući.
- **Stabilnost** – ako konačna pobuda proizvodi konačan odziv.

Uvod u linearne sisteme

- Ako na ulazu sistema za prenos postoji nekakav signal $x(t)$, on se naziva **pobuda**.
- Signal $y(t)$ koji se pojavi na njegovom izlazu je tada **odziv**.
- Sistem za prenos se tada posmatra kao crna kutija (*black box*) koja je **potpuno opisana pobudom i odzivom**.



Uvod u linearne sisteme

- Za linearne vremenski varijantne sisteme važi

$$\begin{aligned}x(t) &\rightarrow y(t) \\ Ax(t-t_0) &\rightarrow Ay(t-t_0)\end{aligned}$$

- Linearan sistem

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t), \quad x_i \rightarrow y_i \Rightarrow y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$$

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega_i t + \theta_{xi}) \quad Y_i = AX_i$$

$$y_i(t) = Y_i \cos(\omega_i t + \theta_{yi}) \quad \theta_{yi} = \theta_{xi} + \theta$$



Veza spektara ulaznog i izlaznog signala

- Periodični signali:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega_0) e^{\theta(n\omega_0)} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$Y_n = A(n\omega_0) e^{\theta(n\omega_0)} X_n$$

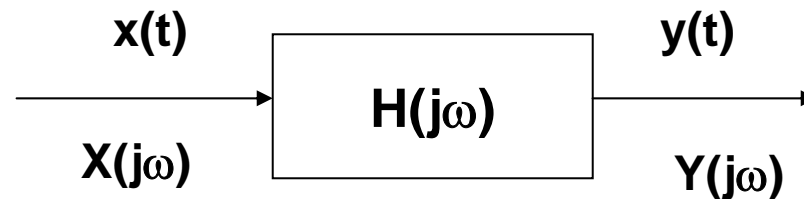
- Aperiodični signali:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$Y(j\omega) = A(\omega) e^{\theta(\omega)} X(j\omega)$$

Funkcija prenosa linearnog sistema

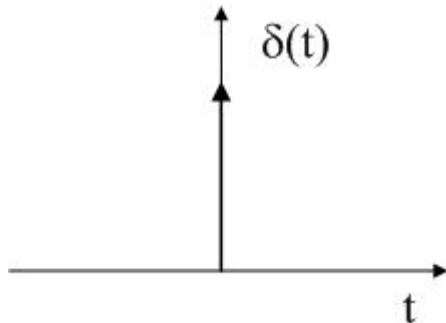
- Oblik spektra:



- Ako se **funkcija prenosa** linearnog sistema označi sa $H(j\omega)$, tada se može pisati

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

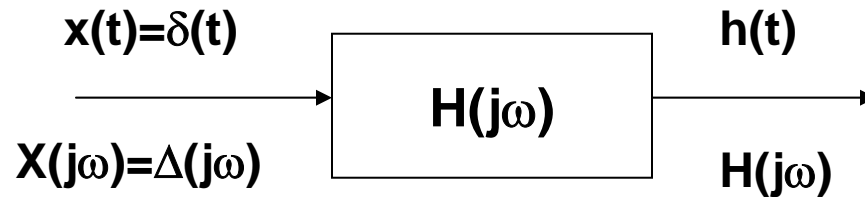
- Neka je na ulazu sistema delta impuls :



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$
$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Impulsni odziv linearnog sistema

- **Impulsni odziv** predstavlja odziv sistema na pobudu delta impulsom:



- Spektar signala na izlazu je tada jednak funkciji prenosa:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) = H(j\omega) \Delta(j\omega) = H(j\omega)$$

- Izraz za impulsni odziv zavisi samo od prenosne funkcije:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Signal na izlazu linearnog sistema za proizvoljnu pobudu

- **Spektar signala na izlazu** sistema za prenos jednak je **proizvodu** spektra ulaznog signala i funkcije prenosa

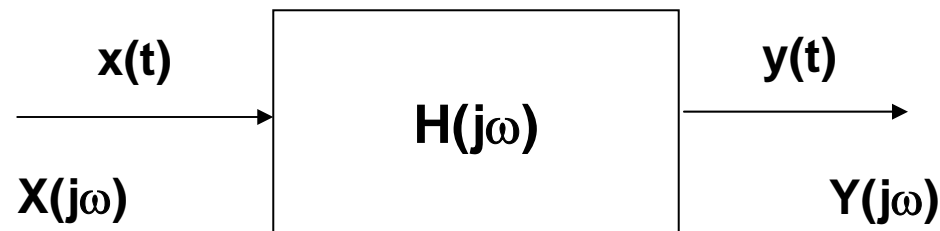
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

- **Signal na izlazu sistema** za prenos jednak je **konvoluciji** ulaznog signala i impulsnog odziva

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Idealan sistem za prenos (vremenski domen)

- Signal sa ulaza ne sme biti izobličen, tj. u veoma sličnom obliku treba da se pojavi na izlazu:
 - Amplituda mu je promenjena;
 - Zakašnjen je u vremenu.



$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

Idealan sistem za prenos (frekvencijski domen)

- Spektar signala na izlazu je tada

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ax(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(\tau) e^{-j\omega(t_0 + \tau)} d\tau \\ &= Ae^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = Ae^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}$$

- **Funkcija prenosa** idealnog sistema:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Ae^{-j\omega t_0}$$

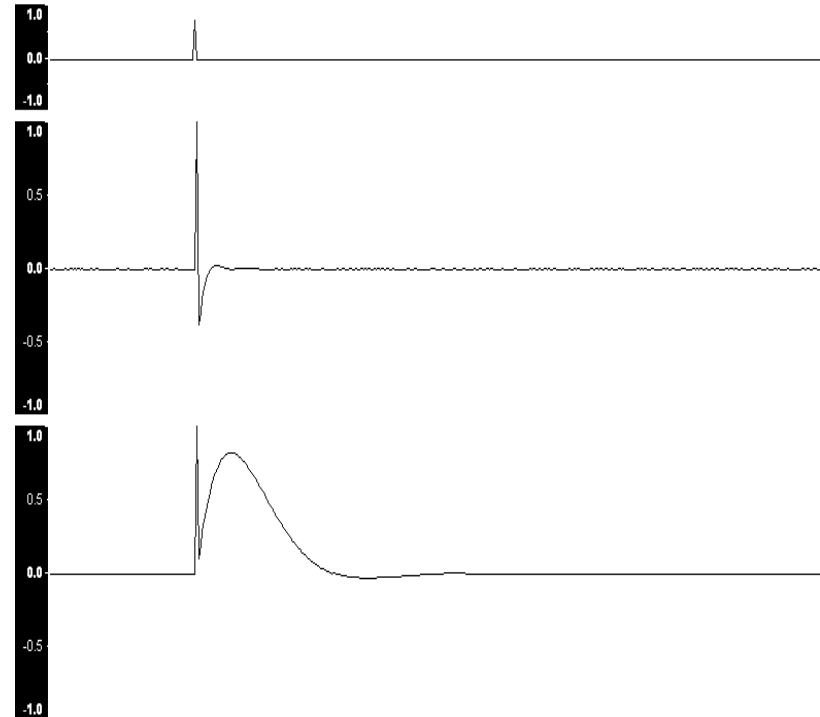
$$A(\omega) = A = \text{const.}$$

$$\theta(\omega) = \omega t_0$$

Idealan sistem za prenos (uslovi i posledice)

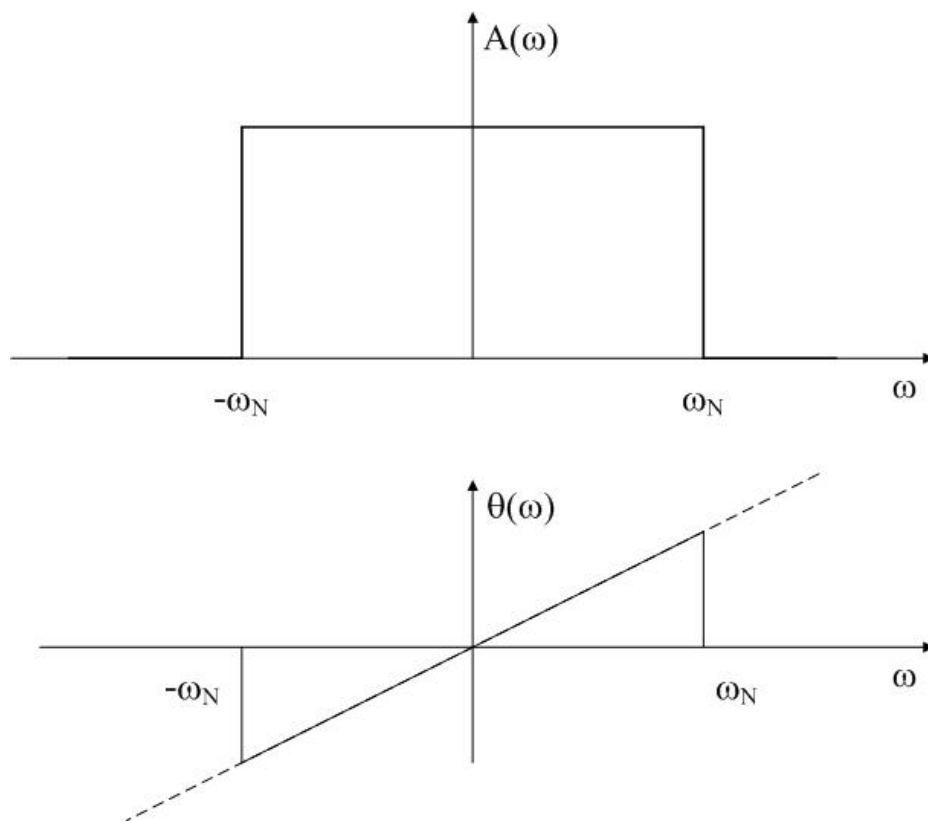
- Da bi sistem za prenos bio idealan:
 - Amplitudska karakteristika funkcije prenosa mora biti **ravna** (ovo dovodi do iste promene amplitude svih spektralnih komponenti signala koji se prenosi!).
 - Fazna karakteristika funkcije prenosa mora biti **linearna** (što dovodi samo do kašnjenja signala na izlazu sistema u poređenju sa onim na ulazu!).

- Realan sistem (pobuda i impulsni odziv tipičnog audio sistema):



Filtar propusnik niskih učestanosti (NF filter)

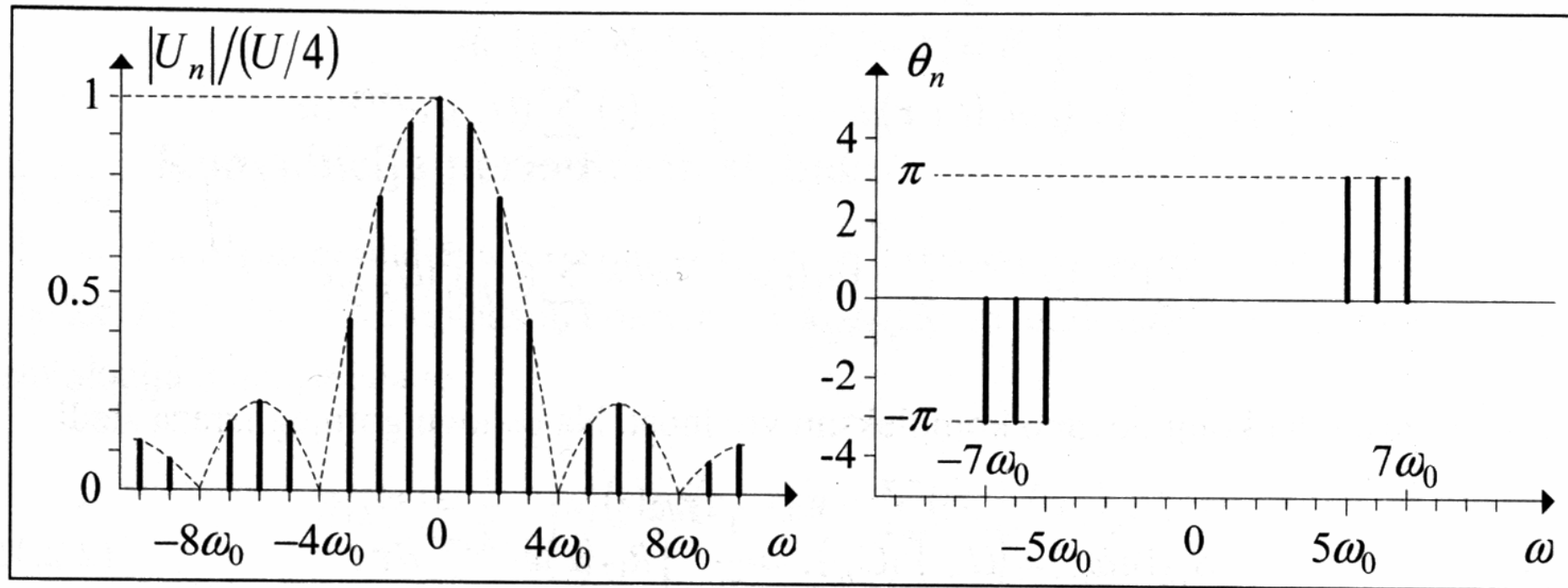
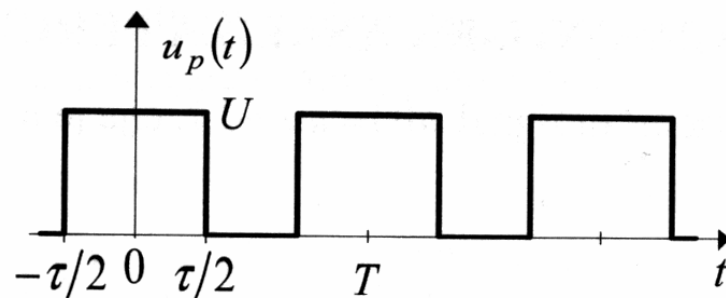
- **NF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi iznad granične učestanosti ω_N .
- Naziva se i LP filter (*low pass filter*).



$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| \leq \omega_N$$

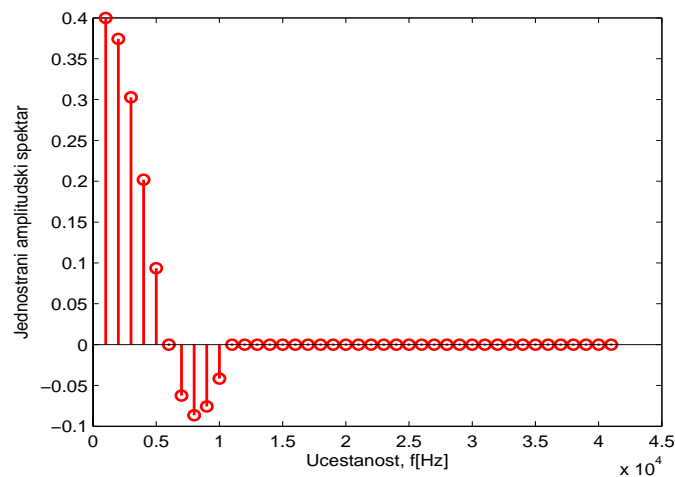
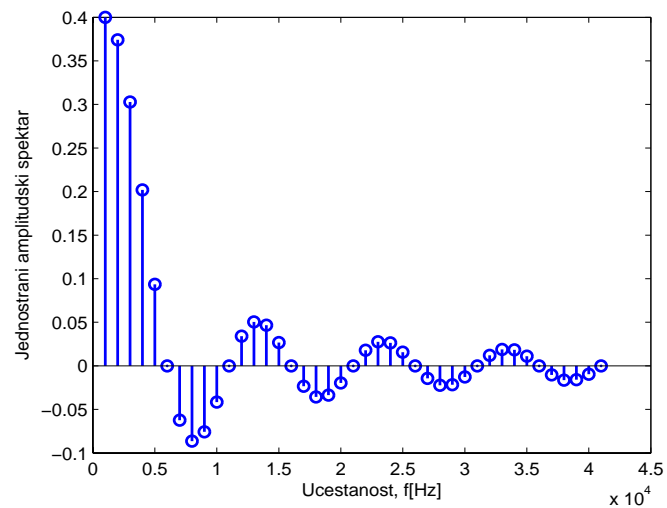
$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_N$$

Periodična povorka impulsa, $T=1\text{ms}$, $\tau/T=0.2$, 40 prvih komponenti

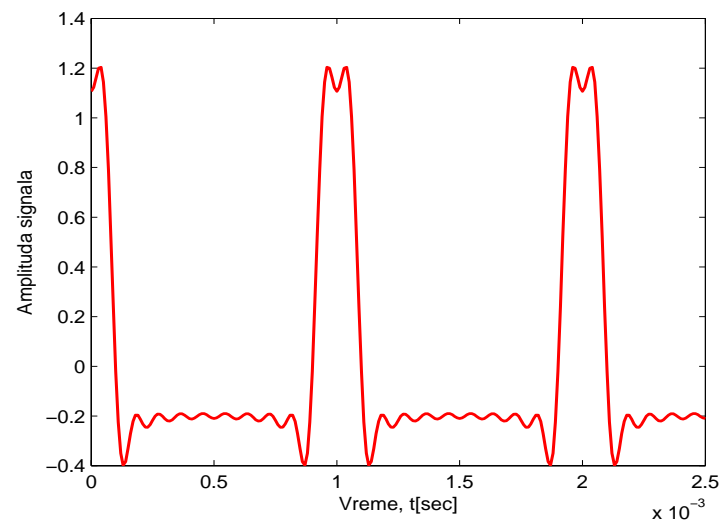
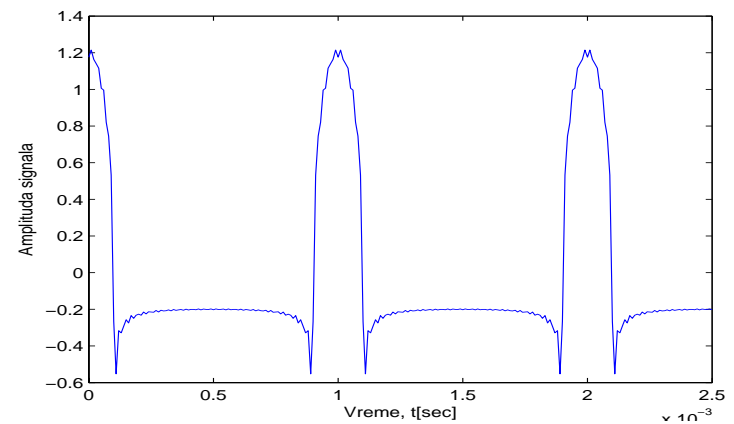


Propuštanje povorke pravougaonih impulsa kroz NF filter, $f_N=10\text{kHz}$

- Spektr

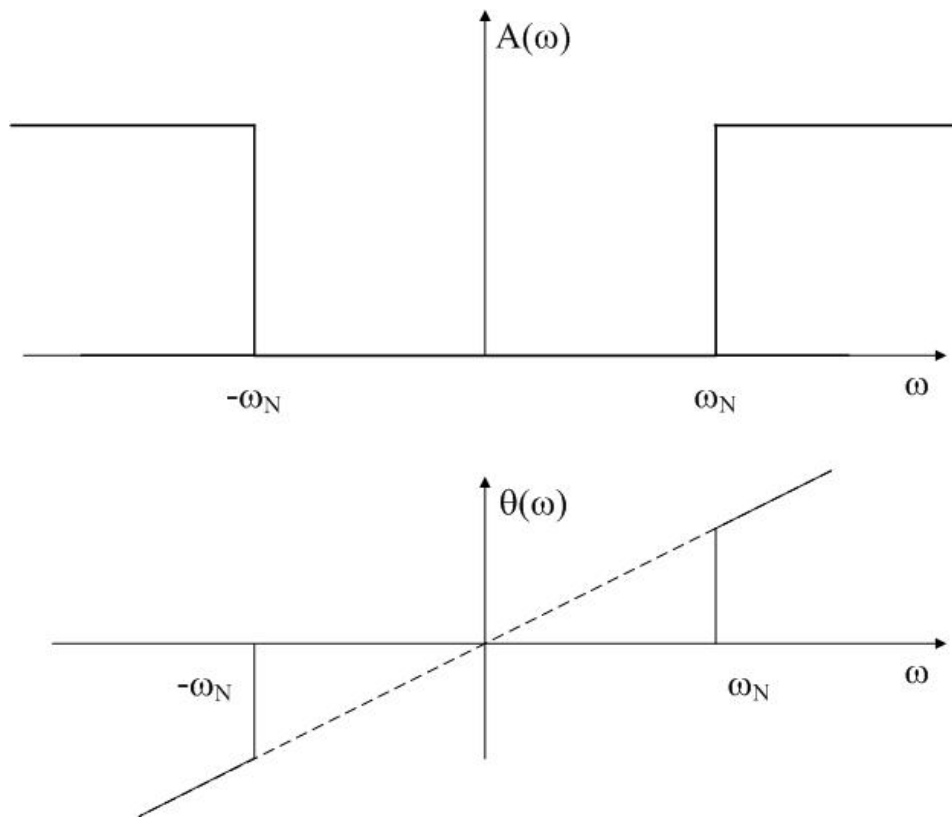


- Vreme



Filtar propusnik visokih učestanosti (VF filter)

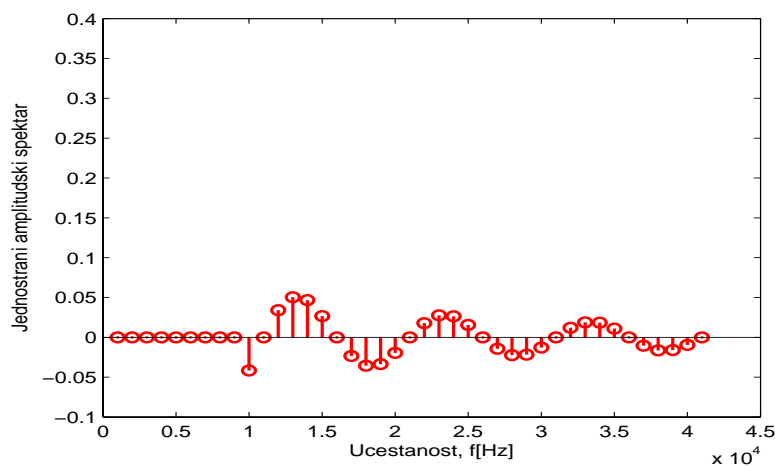
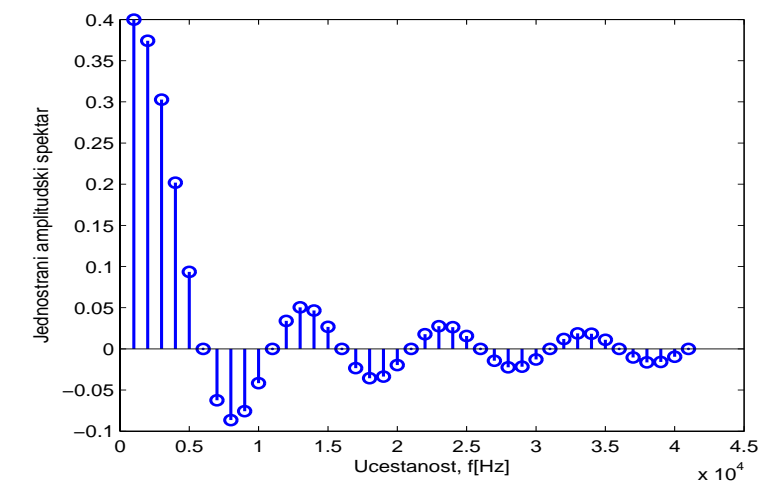
- **VF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi iznad granične učestanosti ω_n .
- Naziva se i HP (*high pass filter*).



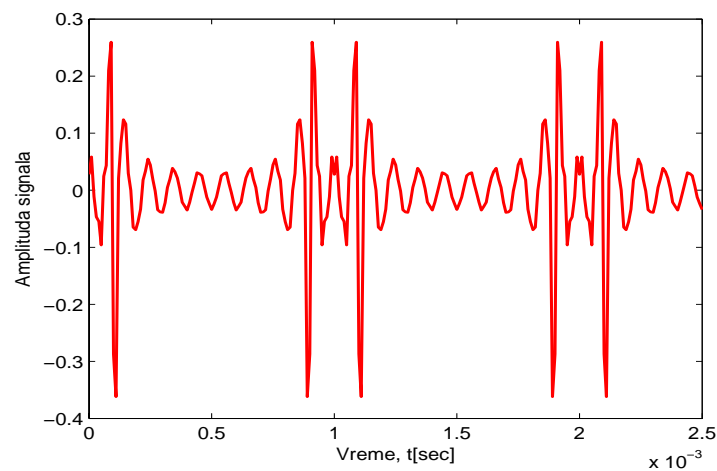
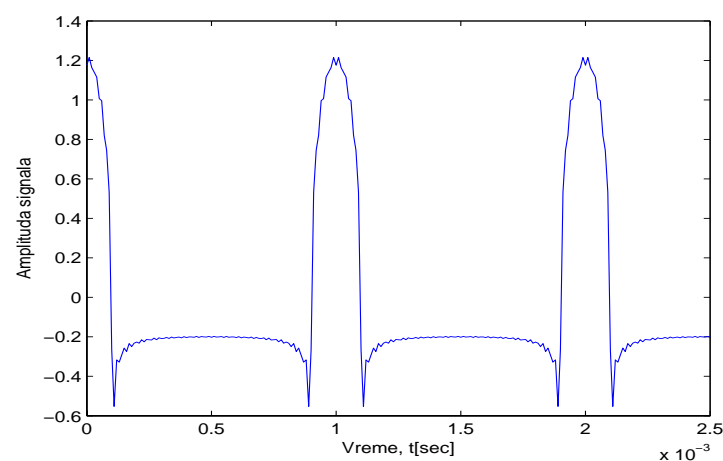
$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_N$$
$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| > \omega_N$$

Propuštanje povorke pravougaonih impulsa kroz VF filter, $f_N=10\text{kHz}$

- Spektar

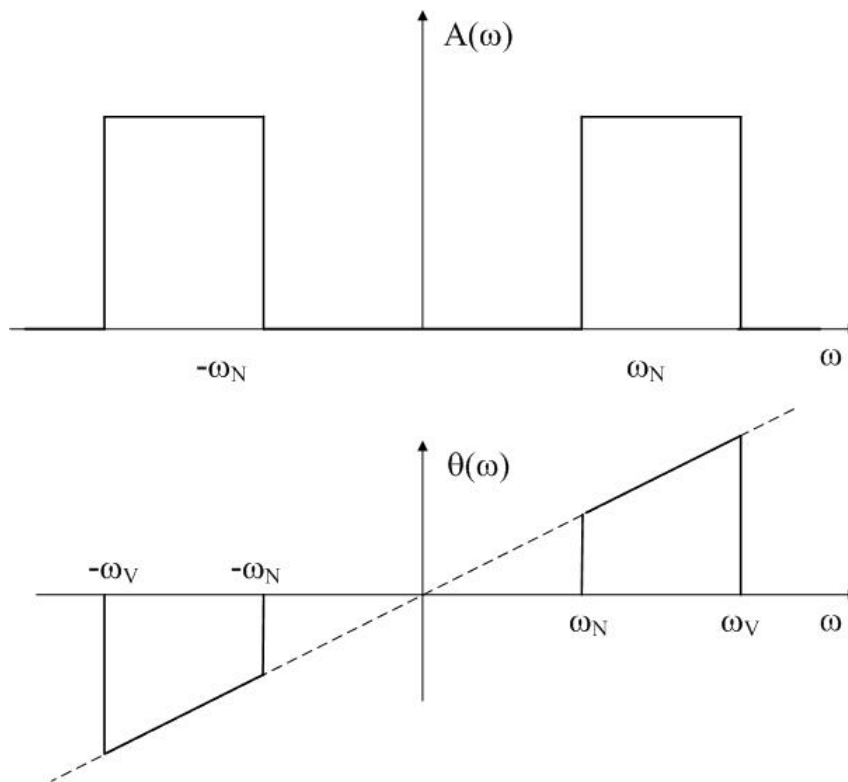


- Vreme



Filtar propusnik opsega učestanosti

- **Filtar propusnik opsega** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi iznad granične učestanosti ω_n .
- Naziva se i BP (*band pass filter*).



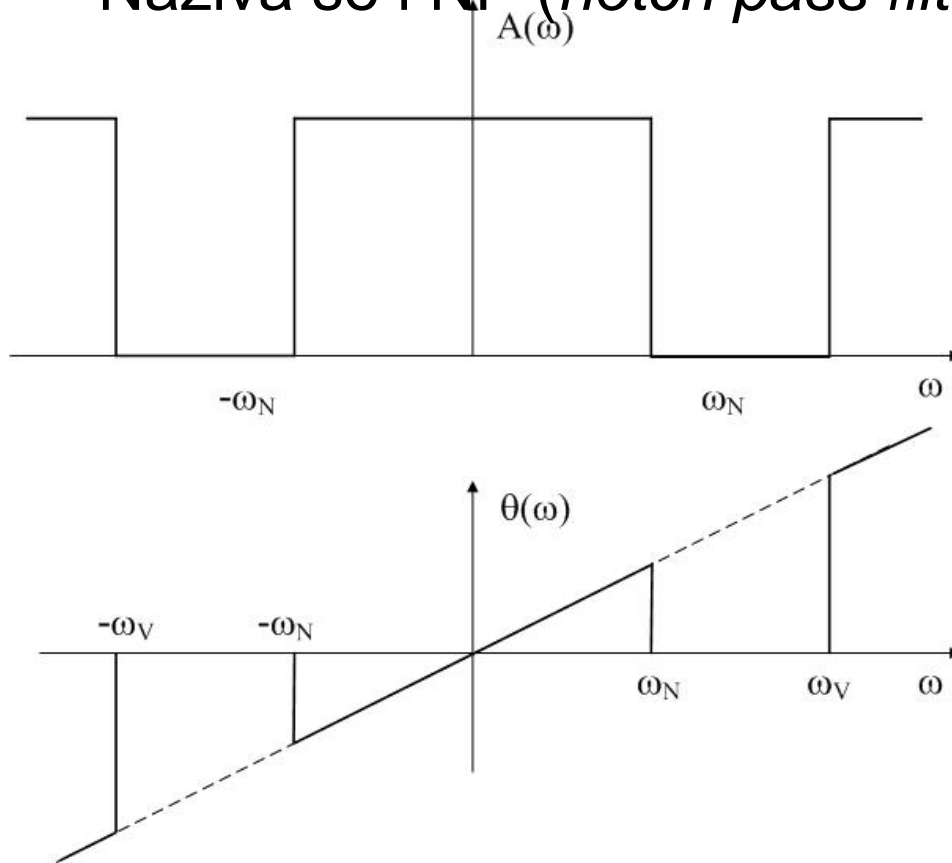
$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_N$$

$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad \omega_N < |\omega| \leq \omega_V$$

$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_V$$

Filtar nepropusnik opsega učestanosti

- **Filtar nepropusnik opsega** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi iznad granične učestanosti ω_n .
- Naziva se i NP (*notch pass filter*).



$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| \leq \omega_N$$

$$H(j\omega) = 0, \quad \omega_N < |\omega| \leq \omega_V$$

$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| > \omega_V$$

Ekvilajzeri - NF filter (vremenski domen, spektar)



Ekvilajzeri – filter propusnik opsega (spektar)

- Audio signal (slučajan signal) i njegov spektar se menjaju u vremenu i ne mogu se opisati jednom egzaktnom funkcijom!
- Na primeru sa slike u izlaznom signalu ističu se komponente u opsegu 3kHz-6kHz dok se sve ostale potiskuju!



Linearni sistemi i filtri - pregled

- Najvažnije osobine:
 - Odziv bilo kog sistema na delta impuls je njegov **impulsni odziv!**
 - Furijeova transformacija impulsnog odziva je **prenosna funkcija** posmatranog sistema.
 - Spektar signala na izlazu sistema jednak je **proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije sistema.**
 - Signal na izlazu dobija se kao **konvolucija signala na ulazu i impulsnog odziva sistema.**
 - Filtar propušta samo neke komponente spektra signala na njegovom ulazu (dok ostale “odseca”):
 - **NF filtar** – propušta niske učestanosti;
 - **VF filtar** – propušta visoke učestanosti;
 - **Propusnik opsega** – propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;
 - **Nepropusnik opsega** – ne propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;