

Univerzitet u Beogradu  
Elektrotehnički fakultet

# **Principi modernih telekomunikacija**

## **2p. Spektri signala**

# Signali koji odgovaraju porukama

- **Izvor** u opštem slučaju ne generiše niz bita već od signala (govor, slika, video) treba tek dobiti binarni niz.
- Proces diskretizacije zavisi od osobina signala, pre svega njegovog spektra.
- Signali mogu biti
  - Deterministički
    - Periodični (npr. sinusoida)
    - Aperiodični (npr. usamljeni impuls).
  - Slučajni
    - Ne mogu se opisati vremenskom funkcijom.
    - Takva je većina telekomunikacionih signala.

# Harmonijska analiza periodičnih signala

- Neka se posmatra proizvoljna funkcija  $x(t)$ , za koju važi

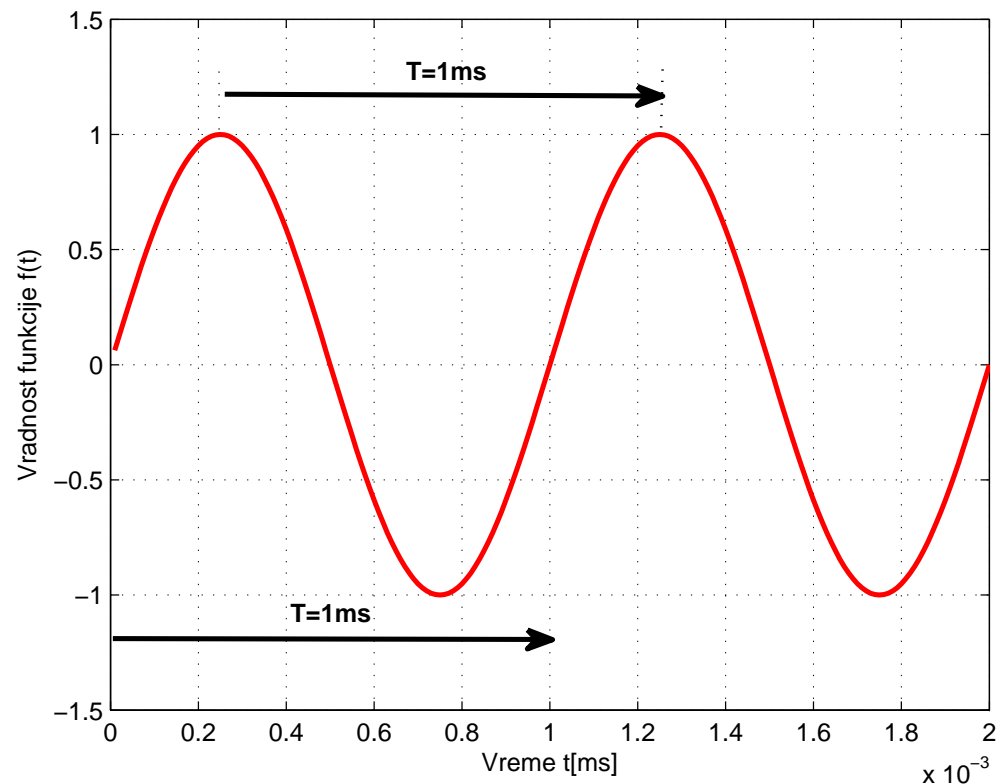
$$x(t) = x(t+T)$$

- Ovo je periodična funkcija sa periodom  $T$ .

- Sinusoida sa:

- amplitudom  $A=1$ ,
- nultom početnom fazom
- periodom  $T=1\text{ms}$
- učestanosti  $f=100\text{Hz}$

$$x(t) = \sin(2\pi ft)$$



# Furijeov red (kompleksna forma)

- Ako je perioda funkcije  $x(t)$  označena sa  $T$  tada je
  - osnovna frekvencija signala  $f_0=1/T$ ,
  - osnovna učestanost signala je  $\omega_0=2\pi/T$ .

- Signal  $x(t)$  se može predstaviti u obliku

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Pri čemu su sa  $X_n$  označeni kompleksni Furijeovi koeficijent (predstavljaju spektar signala!)

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Spektar se deli na amplitudski i fazni spektar

$$X_n = |X_n| e^{j\theta_n}$$

# Furijeov red (trigonometrijska forma)

- Periodičan signal  $x(t)$  se može predstaviti izrazom

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

ili izrazom

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

# Jednostrani i dvostrani spektar

- **Kompleksni red**

- Dvostrani spektar koji je zgodan za matematički opis ali negativne učestanosti u prirodi ne postoje!

- **Trigonometrijski red**

- Jednostrani spektar kod koga su komponente spektra dvostruko veće nego u slučaju dvostrane predstave

$$C_n = 2|X_n|$$

- **Egzistencija Furijeovog reda**

- Signal se može predstaviti Furijeovim redom ako važi

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < +\infty$$

# Sinusoida

- Signal

$$x(t) = \sin(2\pi ft), \quad 1/f = T = 1/f_0$$

- Koeficijenti iznose

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} A, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

- Pa je zato

$$C_0 = 0, \quad C_1 = A, \quad C_2 = C_3 = \dots = 0$$

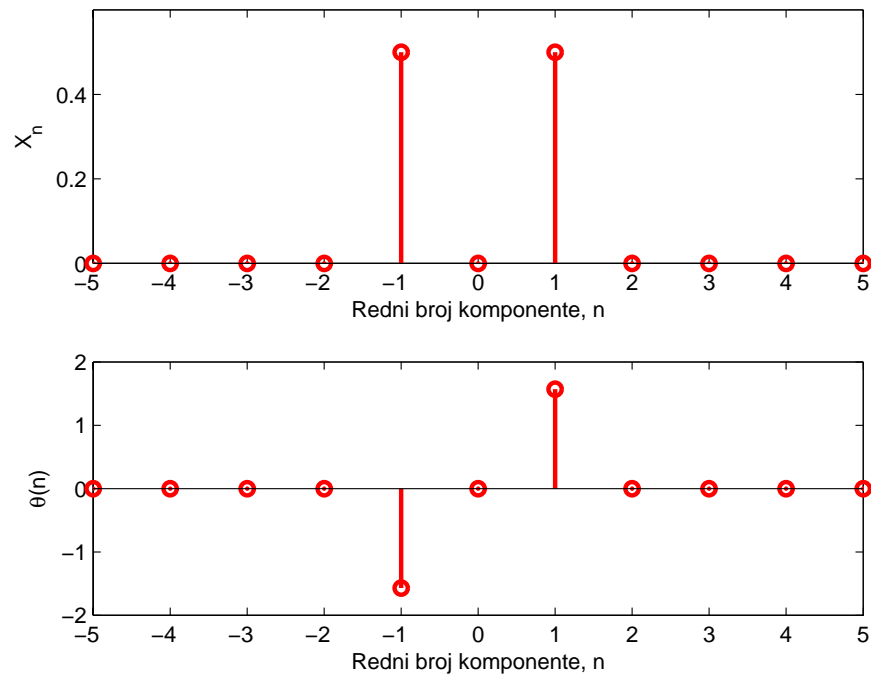
$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \pi/2, \quad \theta_2 = \theta_3 = \dots = 0$$

čemu odgovara sasvim logičan rezultat

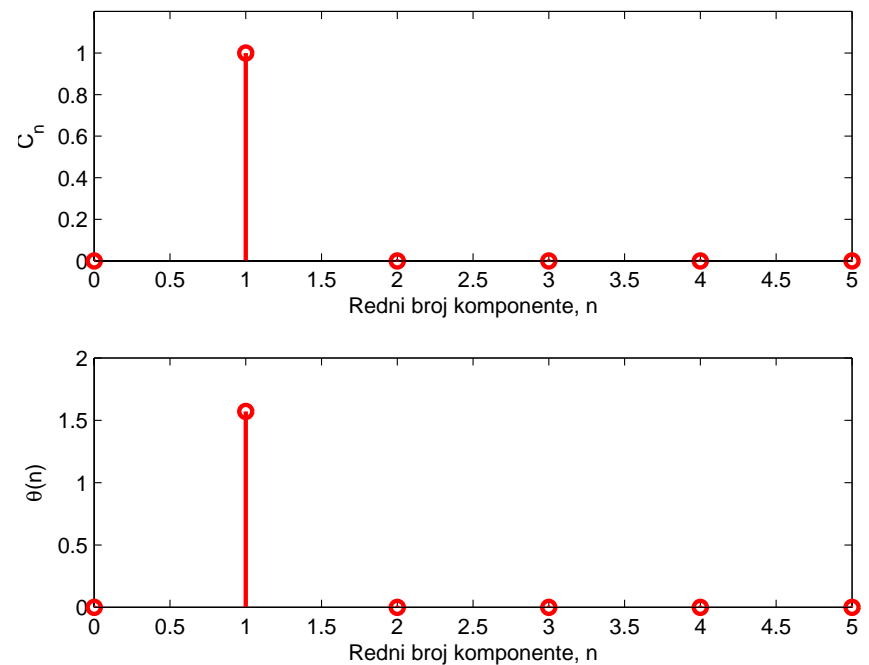
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

# Jednostrani i dvostrani spektar sinusoidalnog signala

- Dvostrani spektar



- Jednostrani spektar

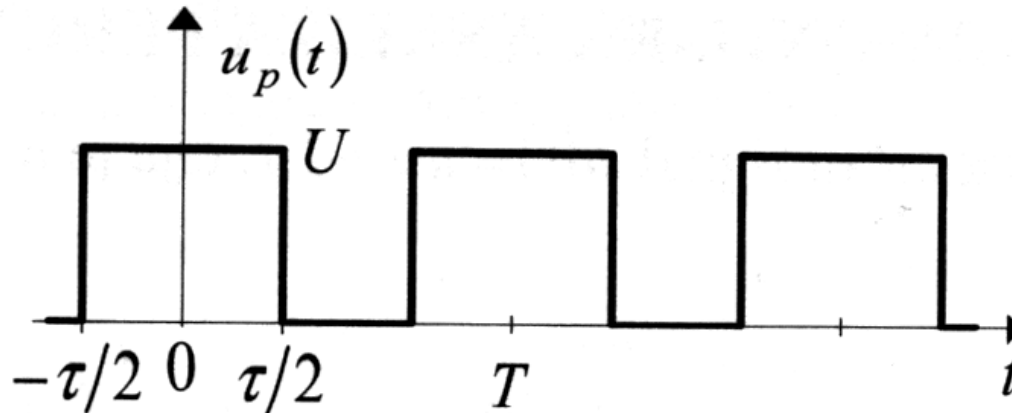




# Povorka periodičnih impulsa

- Povorka periodičnih impulsa
  - periode  $T$ , amplitude  $E$  i trajanja  $\tau$ ,
  - matematički zapis (za svaki ceo broj  $n$ ):

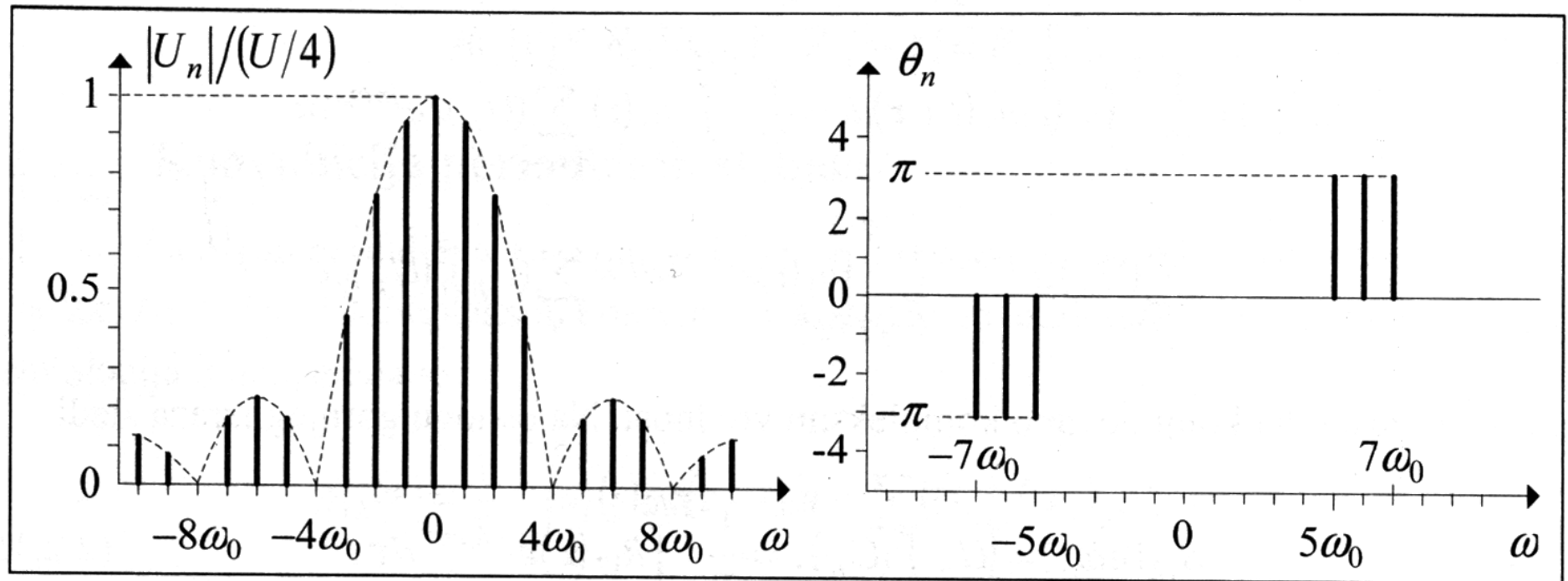
$$u_p(t) = \begin{cases} U, & -T/2 + nT < t \leq T/2 + nT \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



# Dvostrani amplitudski spektar povorke pravougaonih impulsa

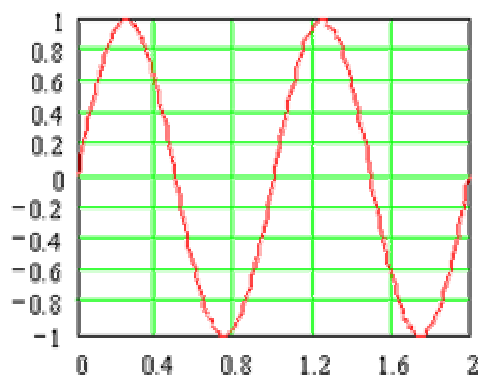
- Oblik spektra:

$$U_n(t) = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau / 2)}{n\omega_0\tau / 2} e^{j\theta_n}$$

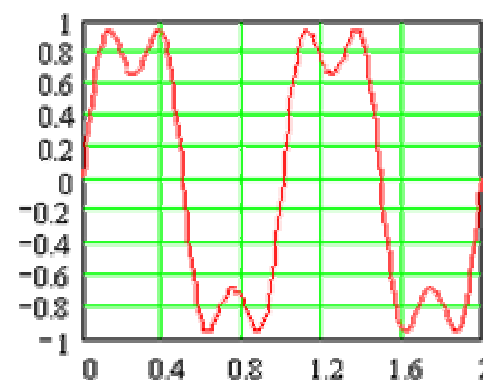


# Značaj komponenti spektra

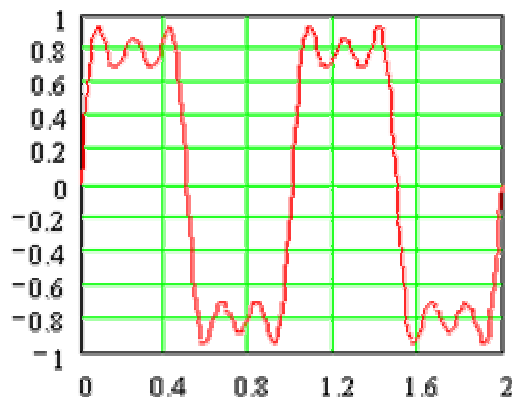
$$S(t) = 1 \cdot \sin(2\pi t/T)$$



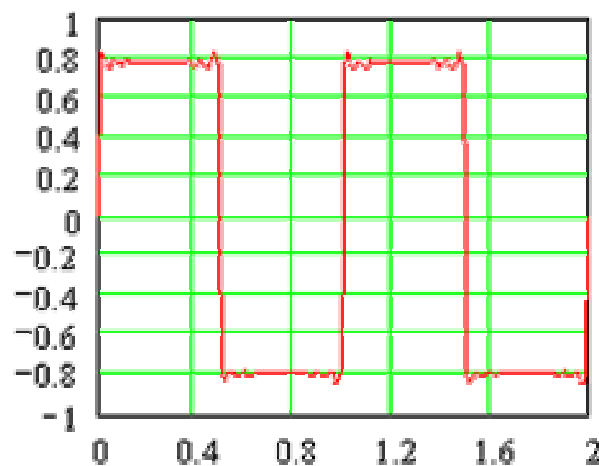
$$S(t) = 1 \cdot \sin(2\pi t/T) + (1/3) \cdot \sin(6\pi t/T)$$



$$S(t) = 1 \cdot \sin(2\pi t/T) + (1/3) \cdot \sin(6\pi t/T) + (1/5) \cdot \sin(10\pi t/T)$$

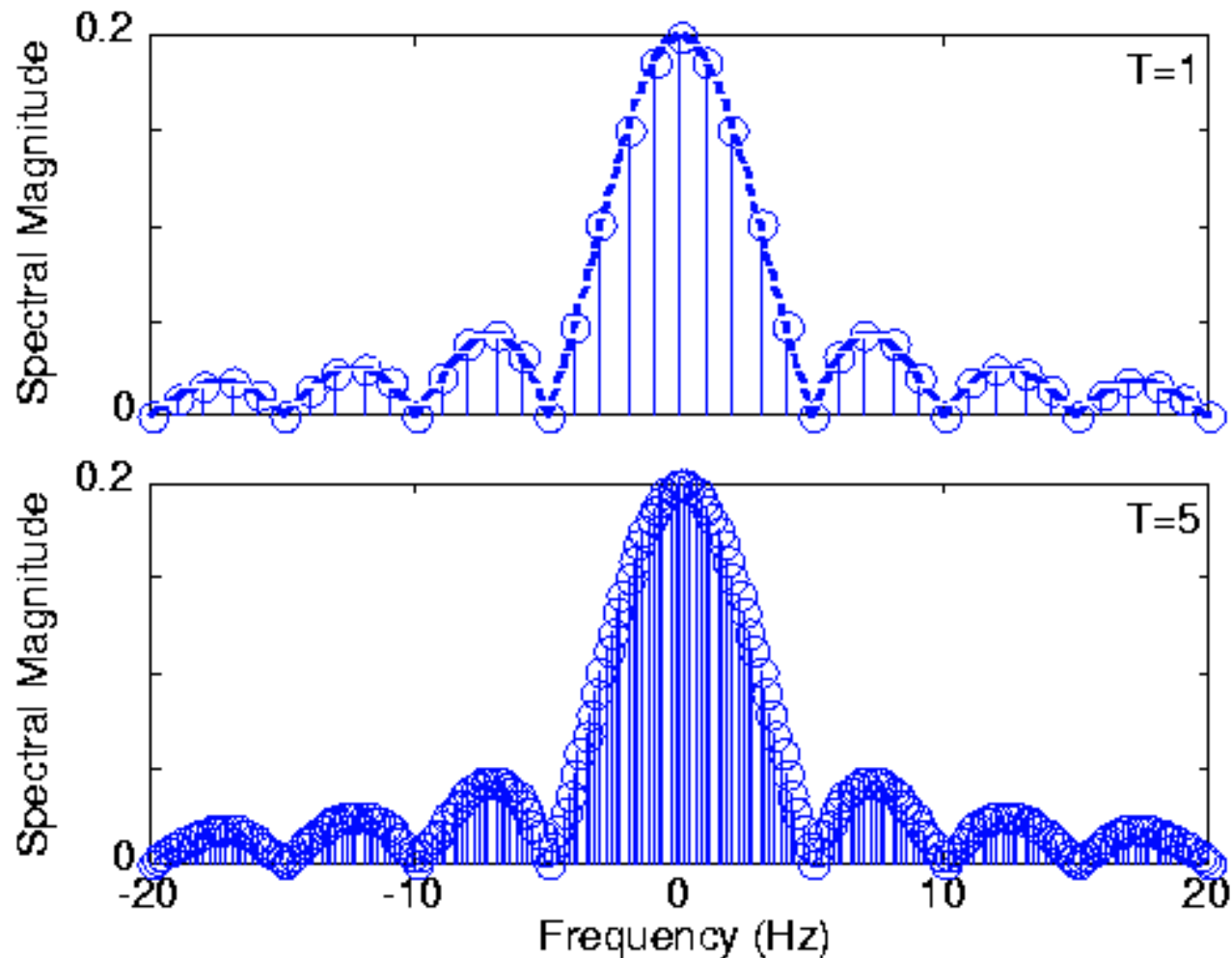


Zbir prvih 79 spektralnih komponenti



# Uticaj periode signala na oblik spektra

- Maksimum na  $E\tau/T$ , nule na  $n/\tau$ !



# Spektar snage signala

- Parsevalova teorema

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$

- Srednja snaga signala jednaka je zbiru kvadrata svih komponenti u amplitudskom spektru signala!
- Svaka komponenta nosi deo snage signala, srazmerno amplitudi odgovarajućoj

# Osobine spektra periodičnih signala

- Najvažnije osobine:
  - Spektar je **diskretan**
    - Spektar pokazuje amplitude i faze kosinusoide čijim se zbirom može odrediti polazni periodični signal;
    - Rastojanje komponenti u spektru iznosi  $f_0=1/T$  i ni u kom slučaju ne može biti manje od toga;
    - Broj komponenti u spektru može biti beskonačan (ali ne mora!).
  - Deo snage koji “nosi” odgovarajuća spektralna komponenta srazmeran je **kvadratu njene amplitude**;
  - Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od  $n$ );
  - Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od  $n$ ;
  - Neke komponente u spektru su manje bitne – ako ne uđu u zbir, signal rezultat neće mnogo odstupati od originalnog periodičnog signala.

# Korelacija periodičnih signala

- **Korelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , koji imaju istu periodu  $T$ , i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraaj  $\tau$ .
- Definicija korelacije

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X_n)_1^* (X_n)_2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$(X_n)_1^* (X_n)_2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Autokorelacija periodičnih signala

- **Autokorelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) signala  $x_1(t)$ , koji ima periodu  $T$ , sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomerač  $\tau$ .
- Definicija autokorelacije

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$|X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$



# Konvolucija periodičnih signala

- **Konvolucija** pokazuje stepen poklapanja signala  $x_1(t)$  i signala  $x_2(t)$ , kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za proizvoljni pomerač  $\tau$ .
- Definicija korelacije

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$\rho_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X_n)_1 (X_n)_2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$(X_n)_1 (X_n)_2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Harmonijska analiza aperiodičnih signala

- Ovi signali nisu periodični - ne postoji  $T$  tako da je  $x(t)=x(t+T)$ .
  - Može se smatrati da im je perioda beskonačna.
  - Zato  $f_0=1/T \rightarrow 0!$
- Signal  $x(t)$  se ipak može predstaviti u obliku

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_n(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

- Pri čemu je sa  $X_n$  označen spektar signala

$$X_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

a spektar postoji pod uslovom da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

# Osobine spektra aperiodičnih signala

- Spektar se opet može napisati u kompleksnom obliku

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

i rastaviti na

- spektar amplituda, označen sa  $|X(j\omega)|$ ;
- spektar faza, označen sa  $\theta(\omega)$ .

pri čemu važi:

$$\theta(\omega) = \arg \{ X(j\omega) \}$$

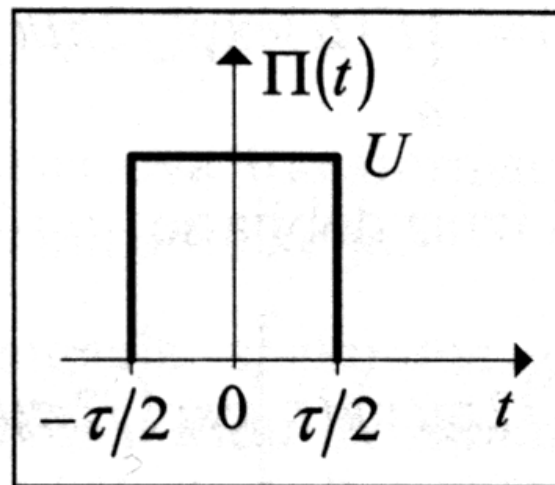
$$|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$$

$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$$

# Usamljeni impuls

- Signal dobijen od periodične povorke pravougaonih impulsa kada  $T \rightarrow \infty$ .

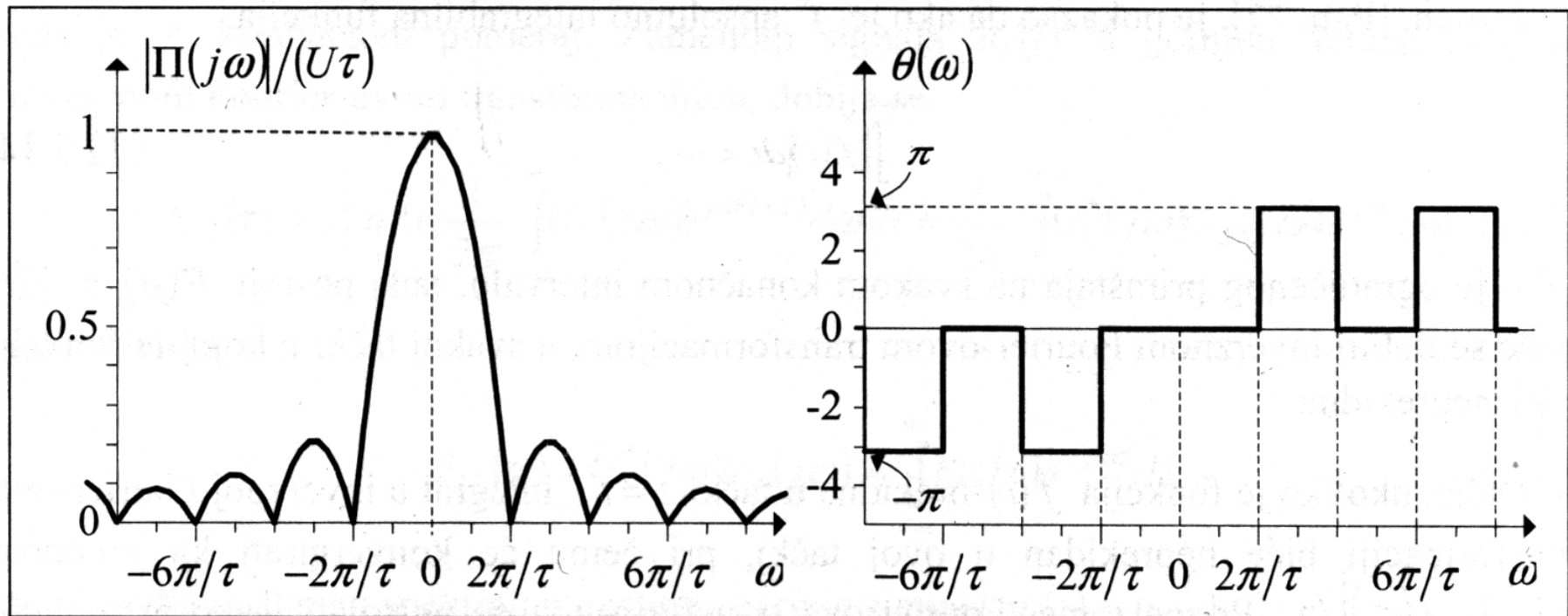
$$u_P(t) = \begin{cases} U, & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



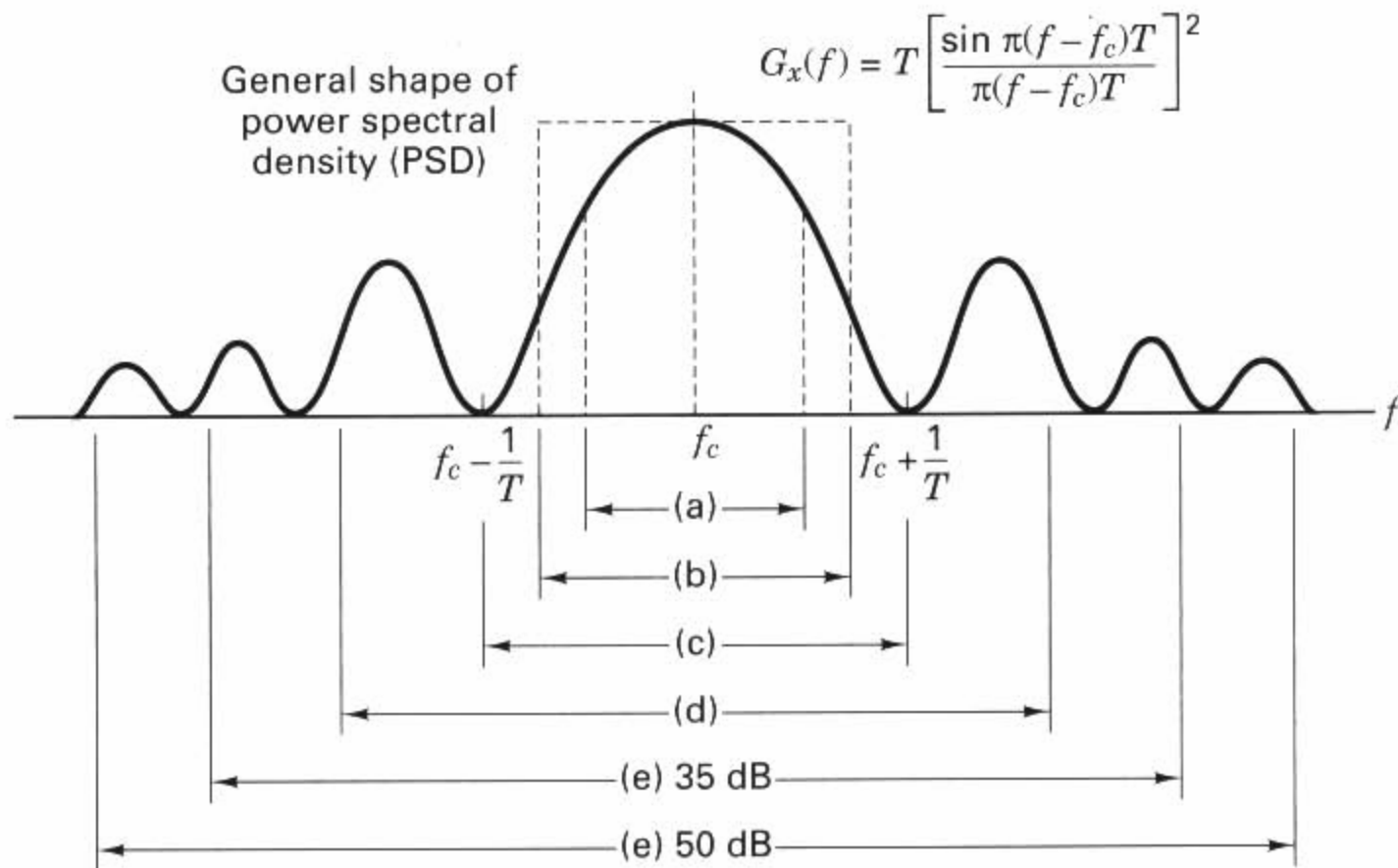
# Spektar usamljenog impulsa

- Spektar pravougaonog unipolarnog impulsa

$$\Pi(j\omega) = U\tau \frac{\sin(\omega\tau / 2)}{\omega\tau / 2} e^{j\theta(\omega)}$$



# Spektar usamljenog impulsa



# Osobine spektra aperiodičnih signala

- Najvažnije osobine:
  - Spektar je kontinualan (ne postoje samo neke već sve komponente u spektru);
    - Ovo praktično pokazuje da se aperiodični signal može odrediti zbirom beskonačnog broja sinusoida čije se učestanosti razlikuju za beskonačno malu vrednost.
  - Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od  $n$ );
  - Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od  $n$ ;
  - Spektar snage jednak je kvadratu amplitudskog spektra;
  - Neke od komponenti su više a neke manje istaknute;
  - Ako se odseče deo komponenti koje nose manji deo snage, signal će biti dosta verno rekonstruisan.

# Korelacija aperiodičnih signala

- **Korelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva aperiodična signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraaj  $\tau$ .
- Definicija korelacije

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$



# Autokorelacija aperiodičnih signala

- **Autokorelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) aperiodičnog signala  $x_1(t)$  sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomerač  $\tau$ .
- Definicija autokorelacije

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$|X(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Konvolucija aperiodičnih signala

- **Konvolucija** pokazuje stepen poklapanja dva aperiodična signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za pomerač  $\tau$ .
- Definicija korelacije

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

- Furijeov transformacioni par

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$X_1(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

# Još neke osobine periodičnih i aperiodičnih signala

- Bez obzira da li je signal periodičan ili aperiodičan:
  - Furijeova transformacija korelacije dva signala jednaka je proizvodu amplitudskog spektra jednog i konjugovanog amplitudskog spektra drugog signala;
  - Furijeova transformacija *autokorelacije* signala jednaka je ***spektru snage*** signala;
  - Furijeova transformacija *konvolucije* dva signala jednaka je ***proizvodu amplitudskih spektara*** dva signala.
  - Pošto pomeraj može biti proizvoljan, korelacija, autokorelacija i konvolucija su uvek *kontinualne funkcije*
    - Za periodične signale one se dobijaju sabiranjem diskretnih komponenti (u opštem slučaju beskonačne sume);
    - Za aperiodične signale navedene veličine se dobijaju integraljenjem kontinualnih funkcija.