PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA
(SI2PMT)

Elektrotehnički fakultet
Katedra za Telekomunikacije
Beograd, 2012/2013.

HARMONIJSKA ANALIZA DETERMINISTIČKIH SIGNALA

Klasifikacija signala

- **Izvor u opštem slučaju ne generiše niz bita već od *signala* (govor, slika, video) treba tek dobiti binarni niz.**
- **Proces diskretizacije zavisi od osobina signala, pre svega njegovog spektra.**
- **Signali mogu biti**
  - **Deterministički**
    - Periodični (npr. sinusoida)
    - Aperiodični (npr. usamljeni impuls).
  - **Slučajni**
    - Ne mogu se opisati vremenskom funkcijom.
    - Takva je većina telekomunikacionih signala.

Periodični deterministički signal

* Neka se posmatra proizvoljna funkcija $x(t)$, za koju važi

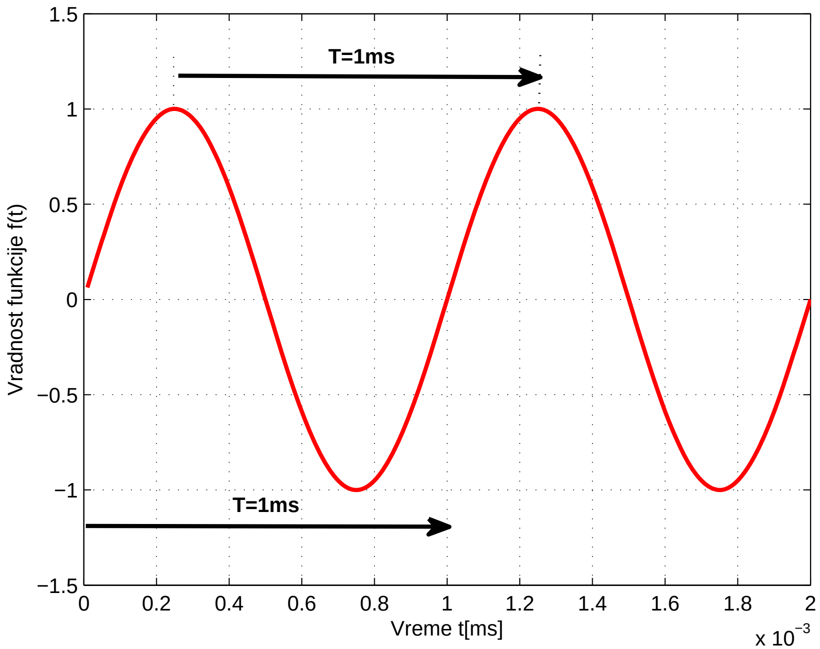
$$x(t)=x(t+T)$$

* Ovo je periodična funkcija sa periodom T.

$$x(t)=A*\sin(2*\pi*f*t)=A*\cos(2*\pi*f*t-\pi/2)$$

pri čemu je f dato u Hercima a vreme se meri u sekundama.

* Sinusoida sa:
  - amplitudom A=1,
  - nultom početnom fazom
  - periodom T=1ms=10^{-3}s
  - učestanosti f=1/T=1000Hz=1kHz

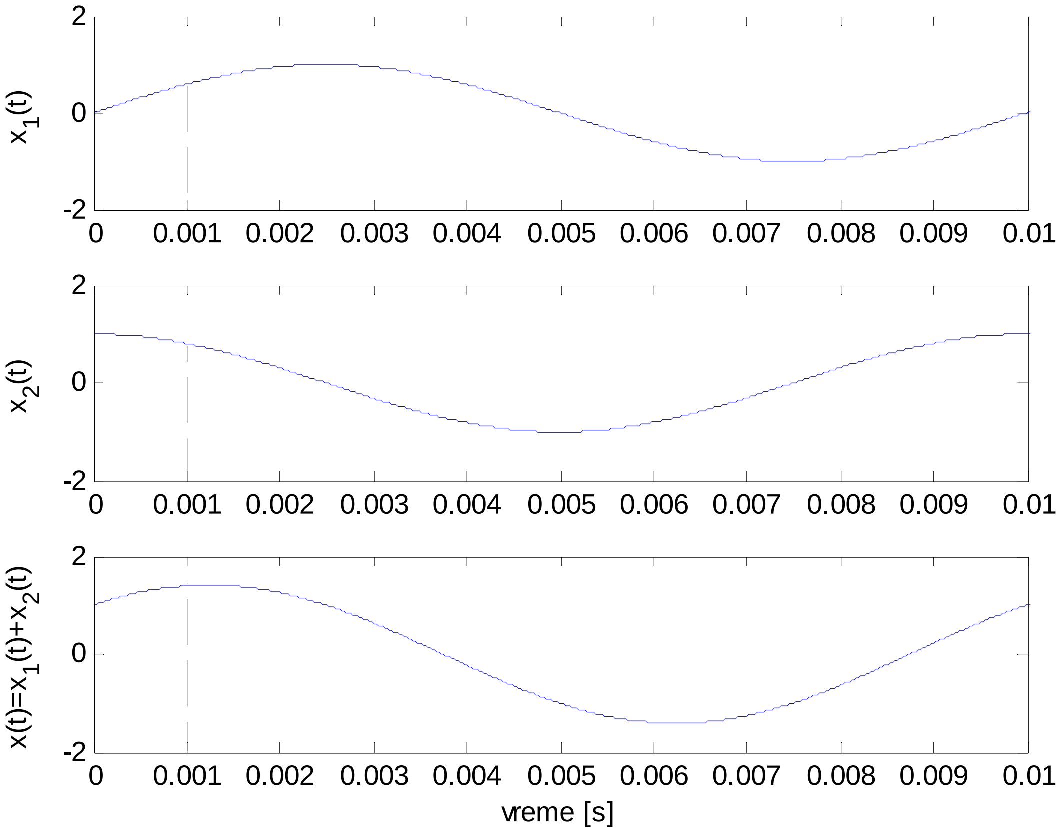


Signali se mogu sabirati po amplitudi

* U nekom vremenskom trenutku odrediti amplitude sabiraka i njihovim zbirom se dobija amplituda rezultujućeg signala.

$$\boldsymbol{x(t)=\sin(2*\pi*100*t)+\cos(2*\pi*100*t)}$$

pa je za t=1ms : $\sin(2*\pi*100*t)=0.5878$, $\cos(2*\pi*100*t)=0.8090$, $x(t)=1.3968$.

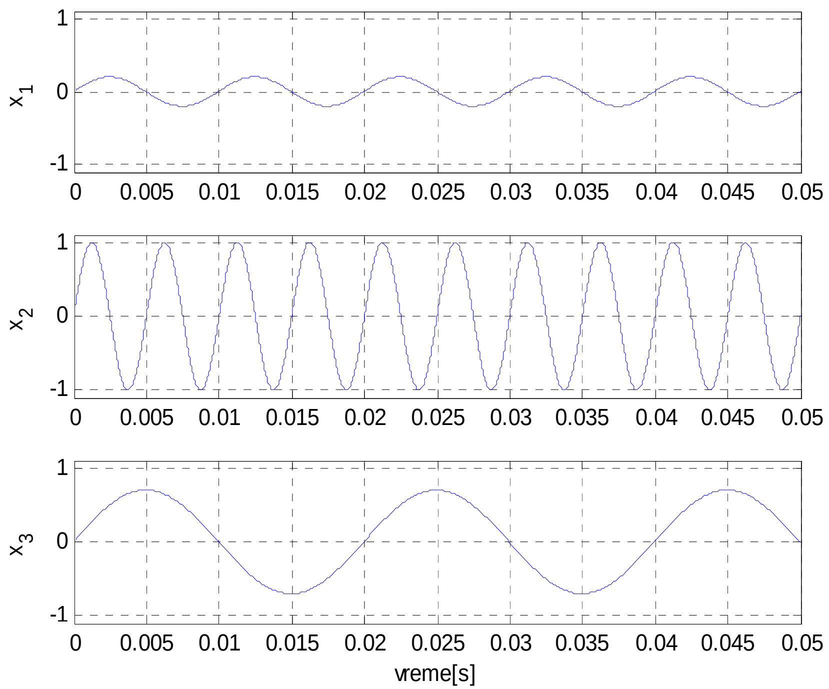


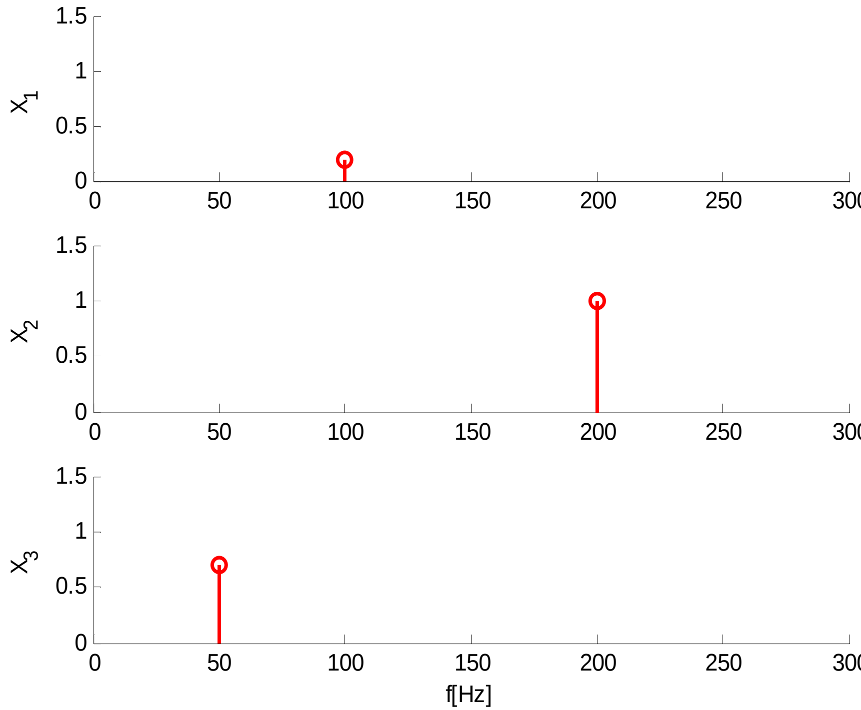
Periodični deterministički signal – primer 1

* **Signal koji se dobija zbirom tri sinusoide**

  $x(t)$=0.2*sin(2*π*100*t)+sin(2*π*200*t)+0.7*sin(2*π*50*t)

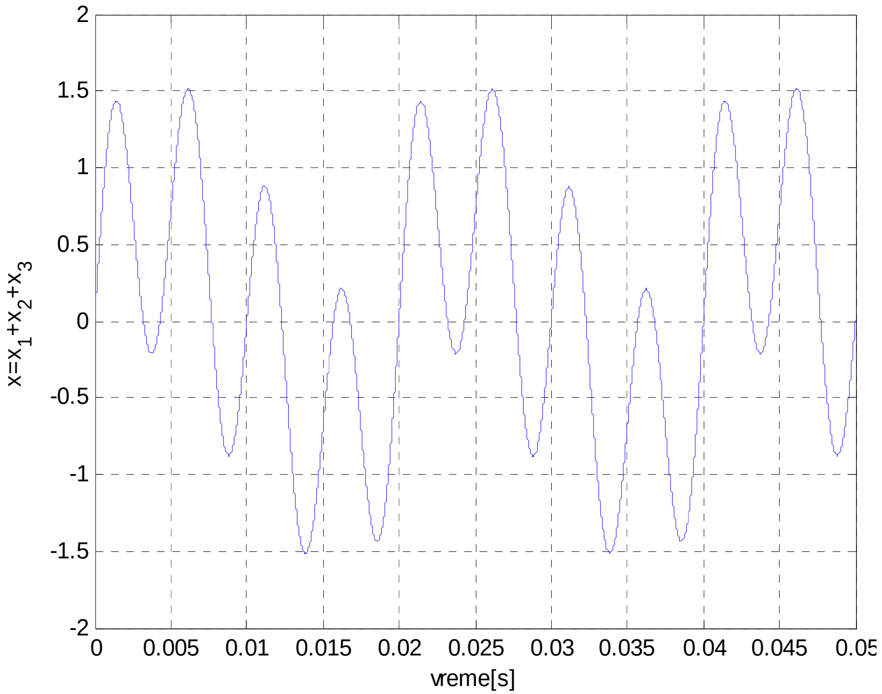
* **Svakoj sinusoidi odgovara jedna komponenta u amplitudskom spektru (pokazuje koliko je koja sinusoida "snažna")!**

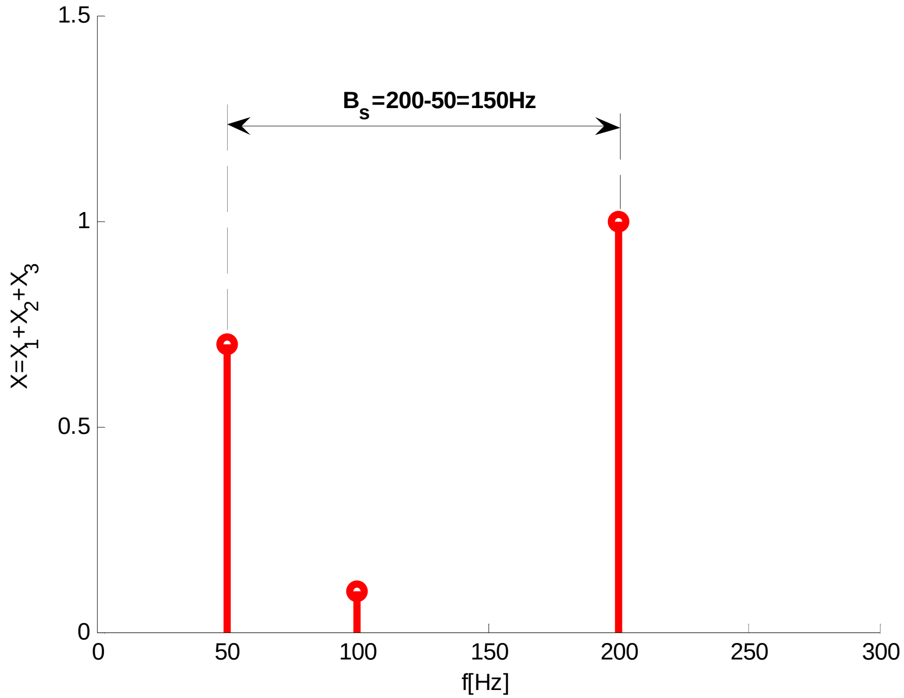




Periodični deterministički signal – primer 1

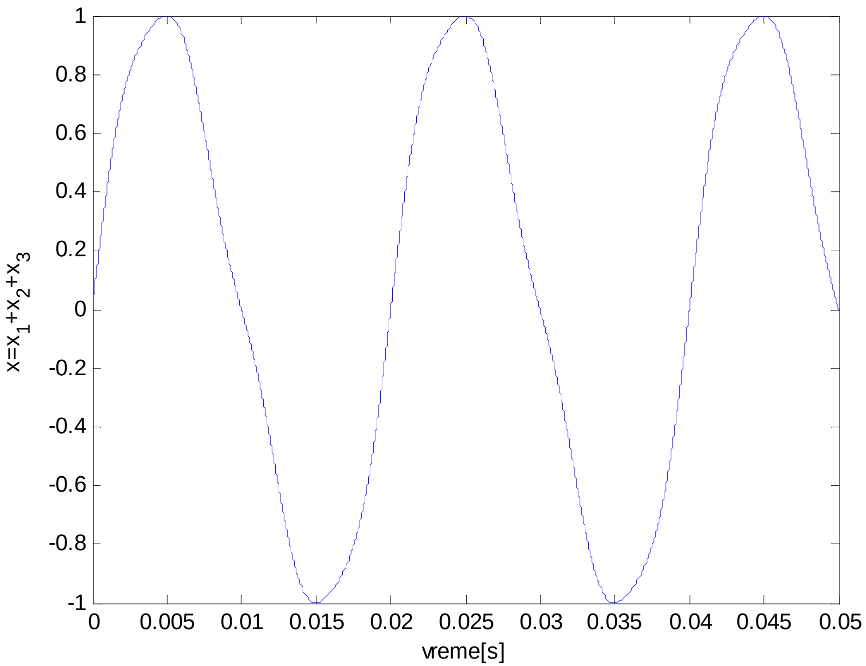
* Spektar složenog signala x(t) ima tri komponente, a širina spektra posmatranog signala iznosi 150Hz.
* Signal koji se dobija zbirom konačnog broja sinusoida uvek je periodičan sa periodom koja je određena <u>najvećim zajedničkim deliocem učestanosti svih komponenata</u> u spektru. Ona se naziva osnovnom učestanošću periodičnog signala i obeležava se sa f_0 (f_0=50Hz, $T_{slož}$=1/(50Hz)=20ms).

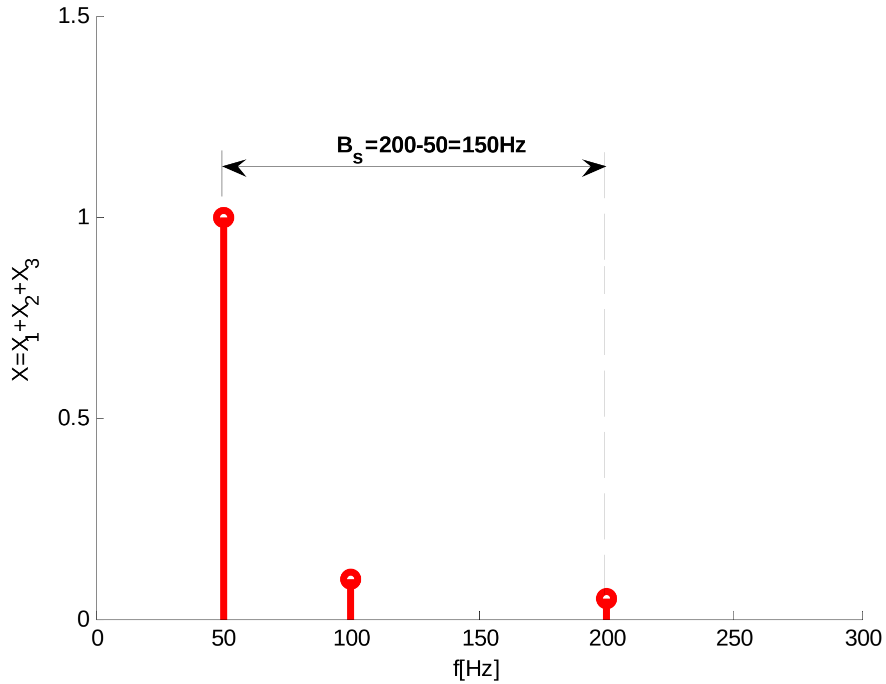




Periodični deterministički signal – primer 2

* Ako se zadrži isti broj komponenti u spektru signala a promeni samo njihova amplituda (time i snaga), može se znatno promeniti vremenski oblik signala.
* I ovaj signal je deterministički (može se opisati matematičkom funkcijom) i periodičan. Pritom perioda signala (T=20ms) i širina spektra signala (150Hz) ostaju nepromenjeni.

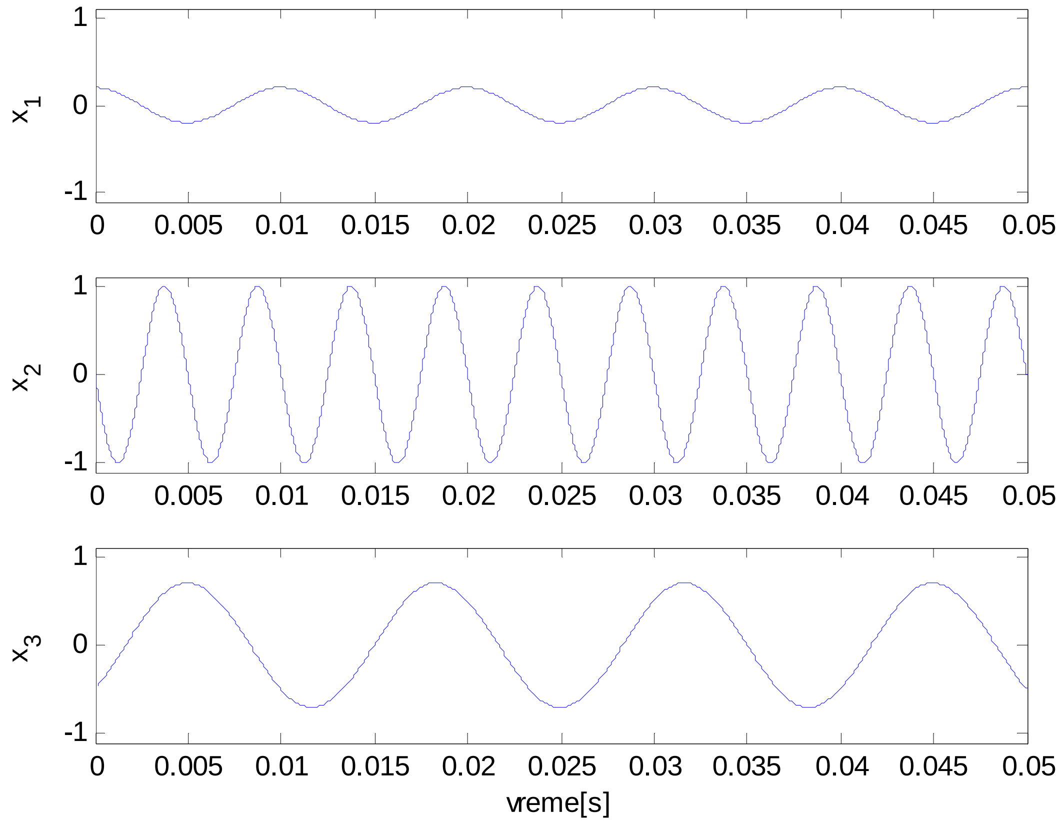




Periodični deterministički signal – primer 3

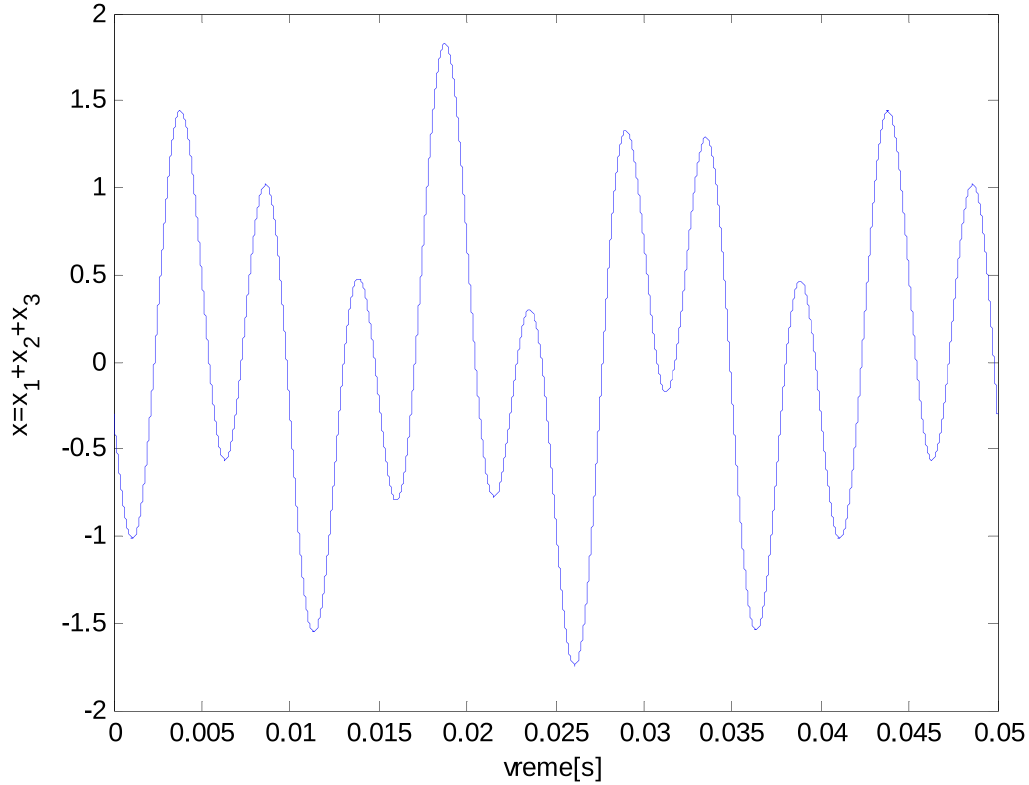
- **Signal se može dobiti i zbirom kosinusoida.**
- **Neka su komponentne kosinusoide fazno pomerene:**

$$x(t)=0.2*\cos(2*\pi*100*t)+\cos(2*\pi*200*t+\pi/2)+0.7*\cos(2*\pi*75*t+5\pi/4)$$



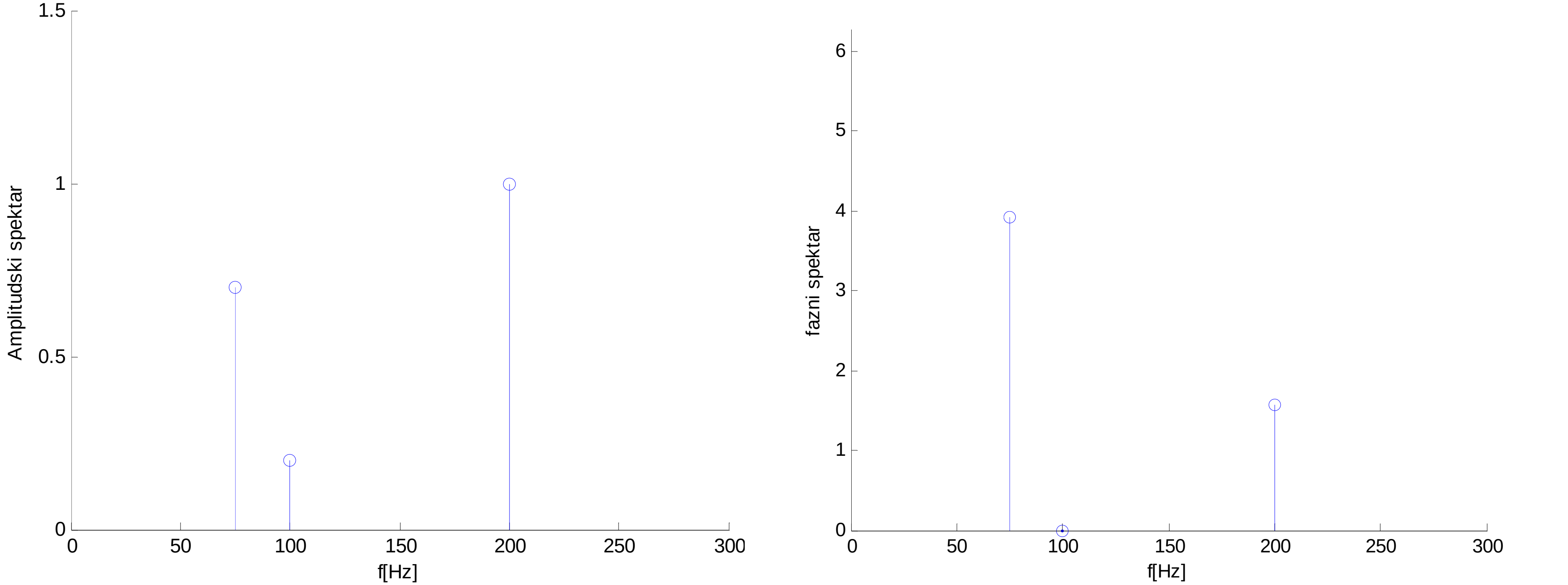
Periodični deterministički signal – primer 3

* **Tada se menja i vremenski oblik signala – na njega ne utiču samo učestanosti i amplitude komponenti već i njihovi fazni pomeraji!**
* **Zapaziti da je ovde NZD(100,200,75)=25Hz i da ona ne odgovara najnižoj učestanosti u spektru! Perioda signala iznosi 40ms.**



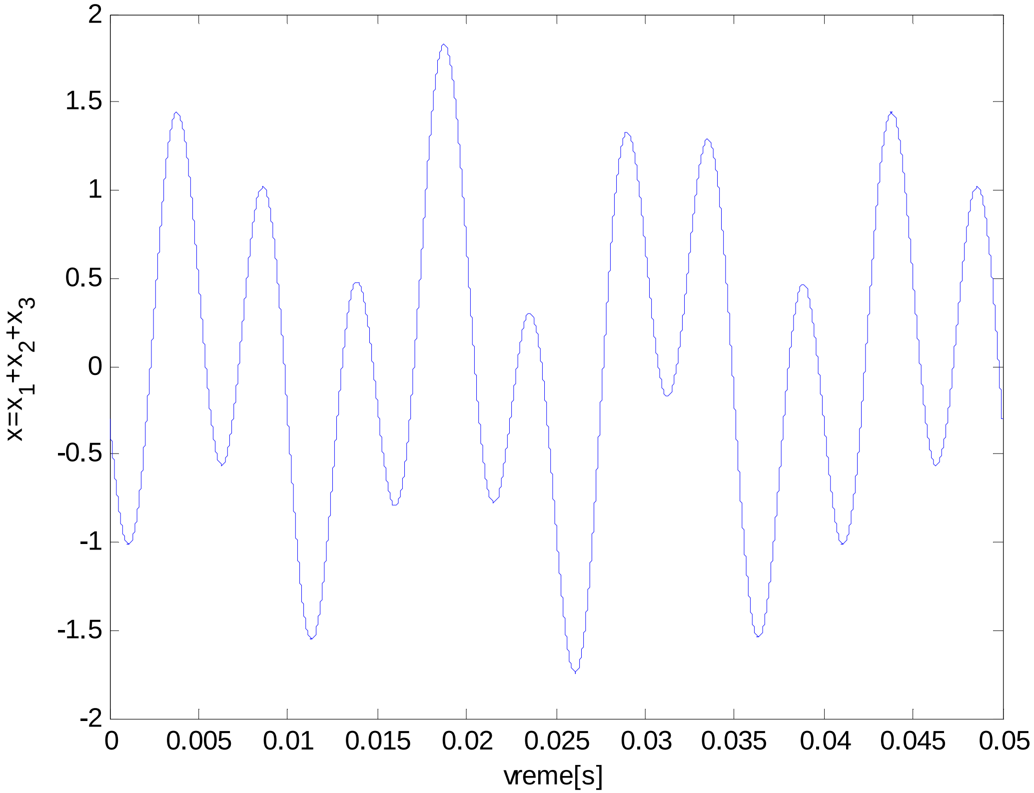
Periodični deterministički signal – primer 3

* **Periodičan signal je kompletno opisan samo ako je poznat njegov amplitudski i fazni spektar!**
* **Vrednosti u faznom spektru se nalaze u opsegu (0,2π) ili (-π,π).**
* **Fazni spektar određuje početne faze pojedinih komponentnih <u>kosinusoida</u>.**



Obrnut problem!

* **Poznajemo vremenski oblik periodičnog signala. Da li je taj signal moguće rastaviti na zbir sinusoida? Kako to uraditi u opštem slučaju?**
* **Periodu možemo relativno lako da očitamo ako uočimo koji deo signala se periodično ponavlja – za primer dat na slici jasno je da je T=40ms pa je osnovna učestanost u spektru f_0=25Hz. Spektar ima komponente koje postoje samo na umnošcima f_0!**



Harmonijska analiza periodičnih signala

* Ako periodičan signal *x(t)* zadovoljava *Dirichlet*-ov uslov:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|dt < \infty$$

tada se on može predstaviti u obliku *Fourier*-ovog reda, odnosno u obliku (f_0 je osnovna učestanost određena periodom signala):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

pri čemu su težinski koeficijenti (*Fourier*-ovi koeficijenti) određeni izrazima

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Harmonijska analiza periodičnih signala

- **Alternativni zapis razvoja periodične funkcije u *Fourier*-ov red (periodična funkcija *x(t)* predstavlja se u obliku sume prostoperiodičnih oscilacija, harmonicima funkcije *x(t)*, amplitude C_n, faznog stava θ_n i učestanosti nf_0 :**

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$C_0 = a_0/2,\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ \theta_n = arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- **Koeficijenti C_n određuju amplitude kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na komponente.**
- **Koeficijenti θ_n određuju početne faze kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na komponente.**
- **Koeficijenti C_0 određuje nivo prisustva jednosmerne komponente.**

Harmonijska analiza periodičnih signala

* **Korišćenjem jednakosti:**

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \text{ i } \sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}),$$

* **Signal *x*(*t*) se može predstaviti u obliku**

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{+jn\omega_0 t}}$$

* **Pri čemu su sa X_n označeni kompleksni Furijeovi koeficijenti (predstavljaju spektar signala!)**

$$\boxed{X_n = X(jn\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

* **Spektar se deli na amplitudski i fazni spektar:**

$$\boxed{X_n = |X_n| e^{j\theta_n}}$$

Harmonijska analiza periodičnih signala

* **Kompleksni red**
  - Dvostrani spektar koji je zgodan za matematički opis ali negativne učestanosti u prirodi ne postoje!

* **Trigonometrijski red**
  - Jednostrani spektar kod koga su komponente spektra dvostruko veće nego u slučaju dvostrane predstave

$$C_n = 2|X_n| = 2|X_{-n}|, \; n > 0$$
$$C_0 = |X_0|$$

  - Amplitudski spektar realne funkcije *f(t)*, je parna funkcija učestanosti, dok je fazni spektar neparna funkcija učestanosti, odnosno važe izrazi:

$$\left|X(jn\omega_0)\right| = \left|X(-jn\omega_0)\right| \text{ i } \theta(jn\omega_0) = -\theta(-jn\omega_0).$$

Sinusoida – određivanje spektra

- **Signal**

$$x(t) = A\sin(2\pi ft),\quad 1/f = T = 1/f_0$$

- **Koeficijenti iznose**

$$a_n = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0,\ \forall n$$

$$b_n = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} A, n = 1 \\ 0,\ n \neq 1 \end{cases}$$

- **Pa je zato**

$$C_0 = 0,\ C_1 = A,\ C_2 = C_3 = \ldots = 0$$

$$\theta_0 = 0,\ \theta_1 = -\pi/2,\ \theta_2 = \theta_3 = \ldots = 0$$

čemu odgovara sasvim logičan rezultat

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

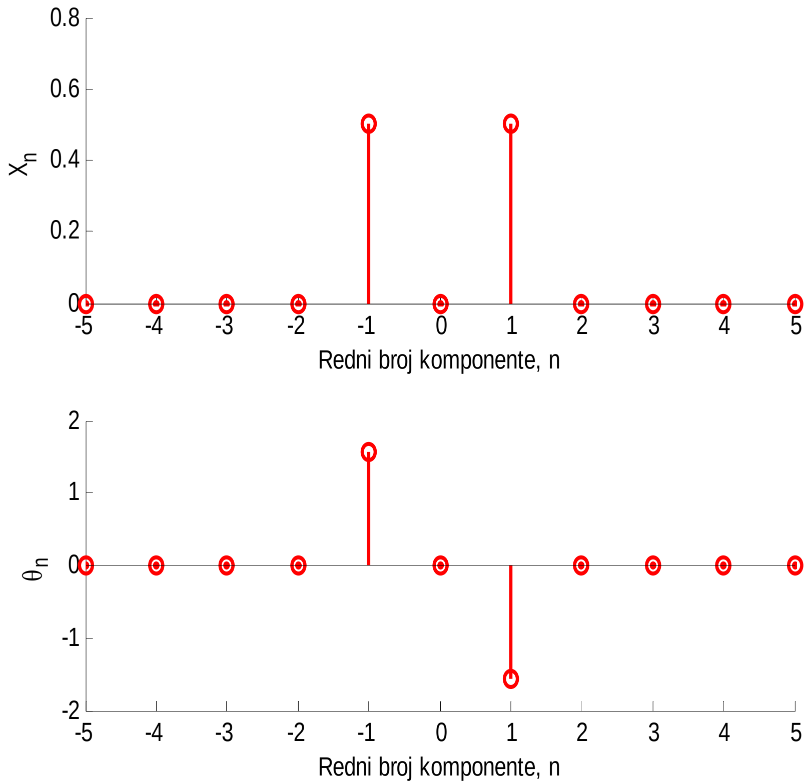
Sinusoida - spektar

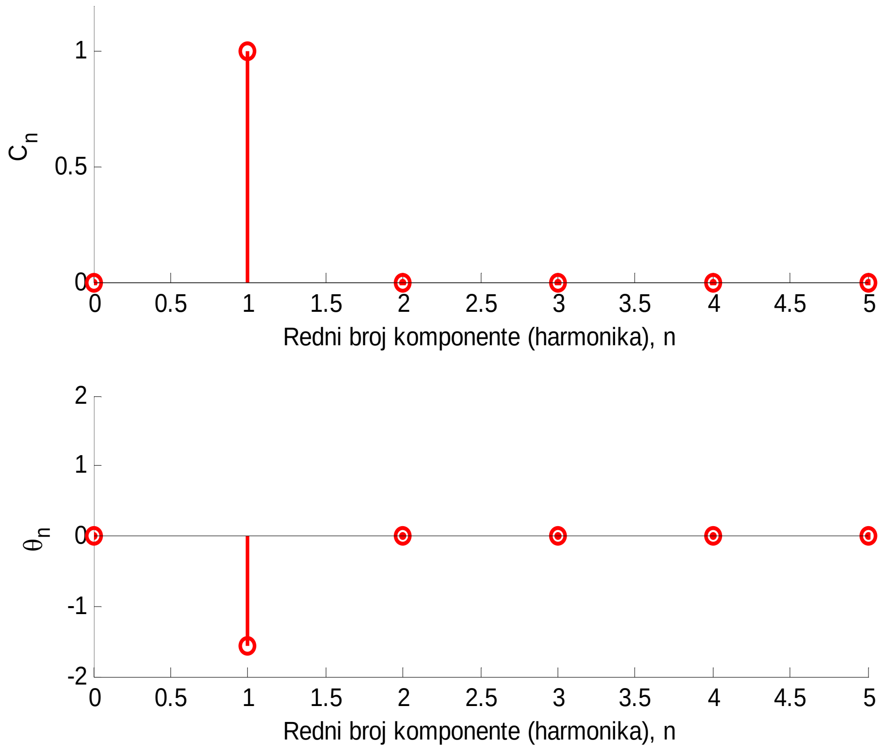
* **Dvostrani spektar**

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

* **Jednostrani spektar**

$$|X_n| = C_n / 2$$





Osobine spektra periodičnih signala

* **Osnovna osobina spektra peridičnih realnih funkcija (signala) je da se njihov razvoj u *Fourier*-ov red sastoji od prostoperiodičnih komponenti čije su učestanosti harmonici (umnošci) osnovne učestanosti signala.**

* **Odnosno, imamo slučaj da su spektralne komponente definisane na diskretnom skupu učestanosti $f=nf_0$, gde n pripada skupu celih brojeva. Iz navedenog razloga, spektre periodičnih realnih funkcija (signala) nazivamo diskretnim ili linijskim spektrima.**

Osobine spektra periodičnih signala

* **Još jedna bitna osobina realne funkcije (signala) *x(t)* je njena efektivna (srednja kvadratna) vrednost, definisana izrazom:**

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\mathrm{dt}}$$

* **Kvadrat efektivne vrednosti jednak je snazi signala!**
* **Parsevalova teorema: srednja snaga signala može se dobiti iz amplitudskog spektra tog signala, sabiranjem kvadrata svake od njegovih komponenti.**

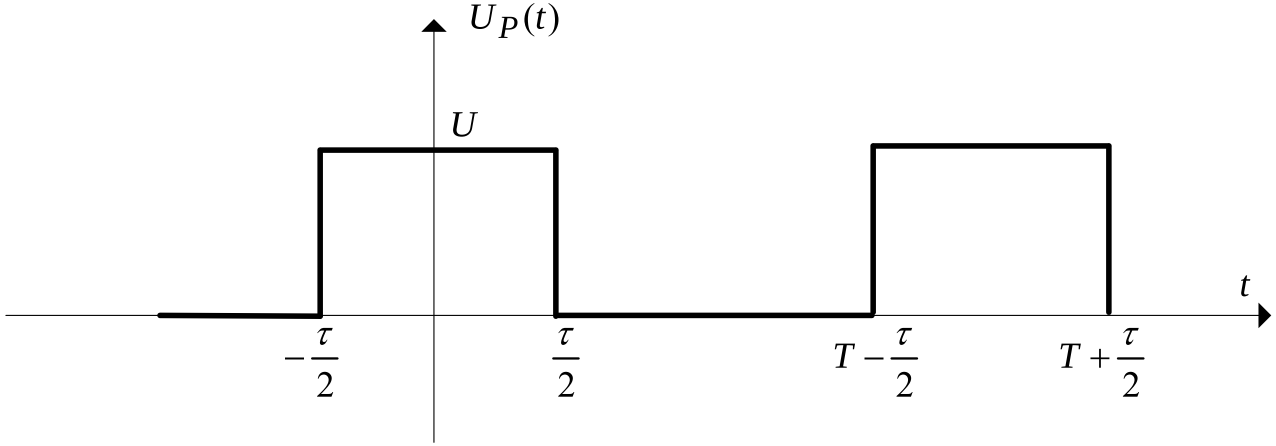
$$Psr = (x_{eff})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|X_n\right|^2 = \left|X_0\right|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|X_n\right|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Povorka periodičnih impulsa – određivanje spektra

* Povorka periodičnih impulsa

- periode T, amplitude U i trajanja τ;
- matematički zapis (za svaki ceo broj k):

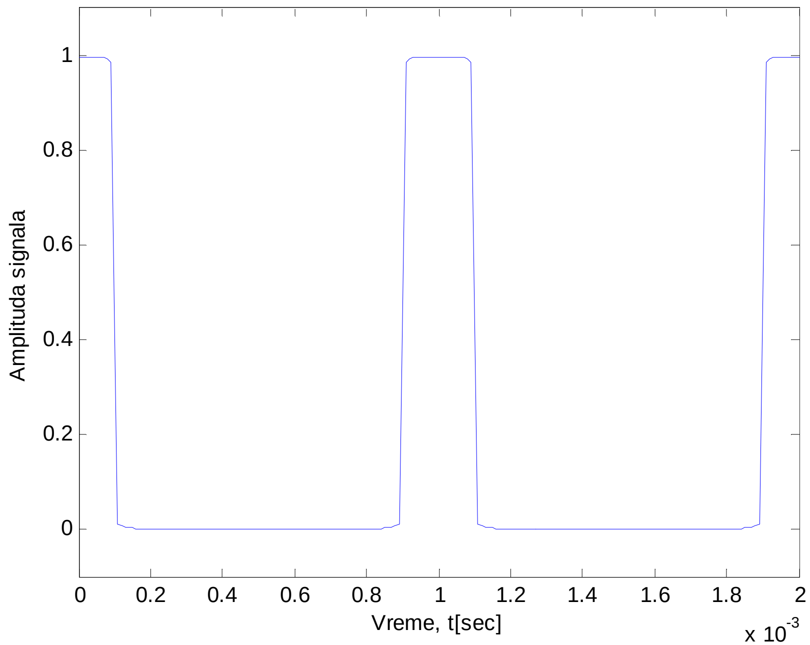
$$u_P(t) = \begin{cases} U, & -T/2 + kT < t \le T/2 + kT \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

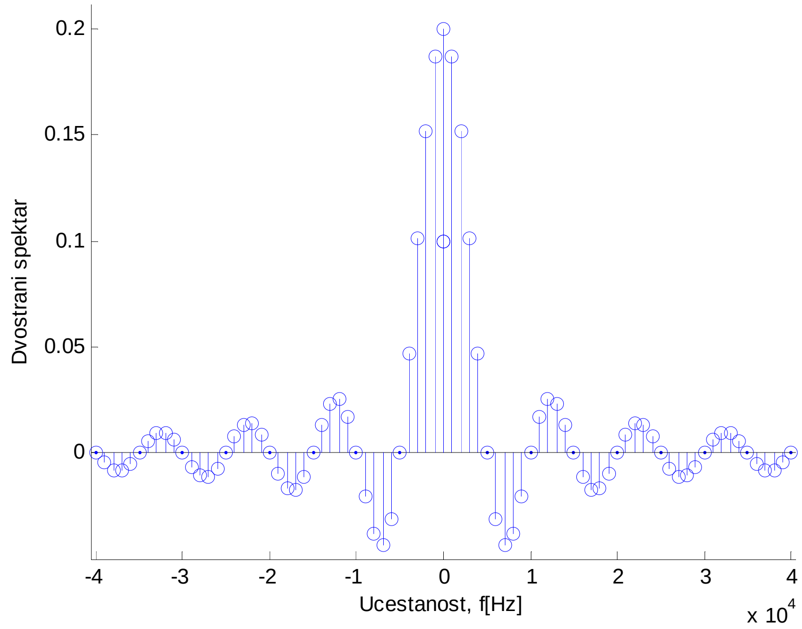


Periodična povorka pravougaonih impulsa – spektar

- **Anvelopa amplitudskog spektra je oblika sin(x)/x – anvelopa je kontinualna funkcija a spektar diskretna!**
- **Matematički zapis spektra (<u>amplitudski i fazni</u>):**

$$\boxed{U_n = \frac{U\tau}{T}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{j\theta_n},\ \omega_0 = 2\pi f_0}$$





Osobine spektra periodične povorke pravoug. impulsa

* Osobine:

- **Spektar je <u>beskonačno širok</u>!**
- **Spektar je diskretan, sa komponentama koje se <u>mogu nalaziti</u> (ne moraju – tj. mogu da imaju i vrednost nula!) na umnošcima f_0.**
- **Nule anvelope spektra javljaju se kada je ispunjeno**

$$\sin(\omega\tau/2) = 0 \Rightarrow \omega\tau/2 = k\pi \Rightarrow f = k/\tau,\ (k \in Z,\ k \neq 0)$$

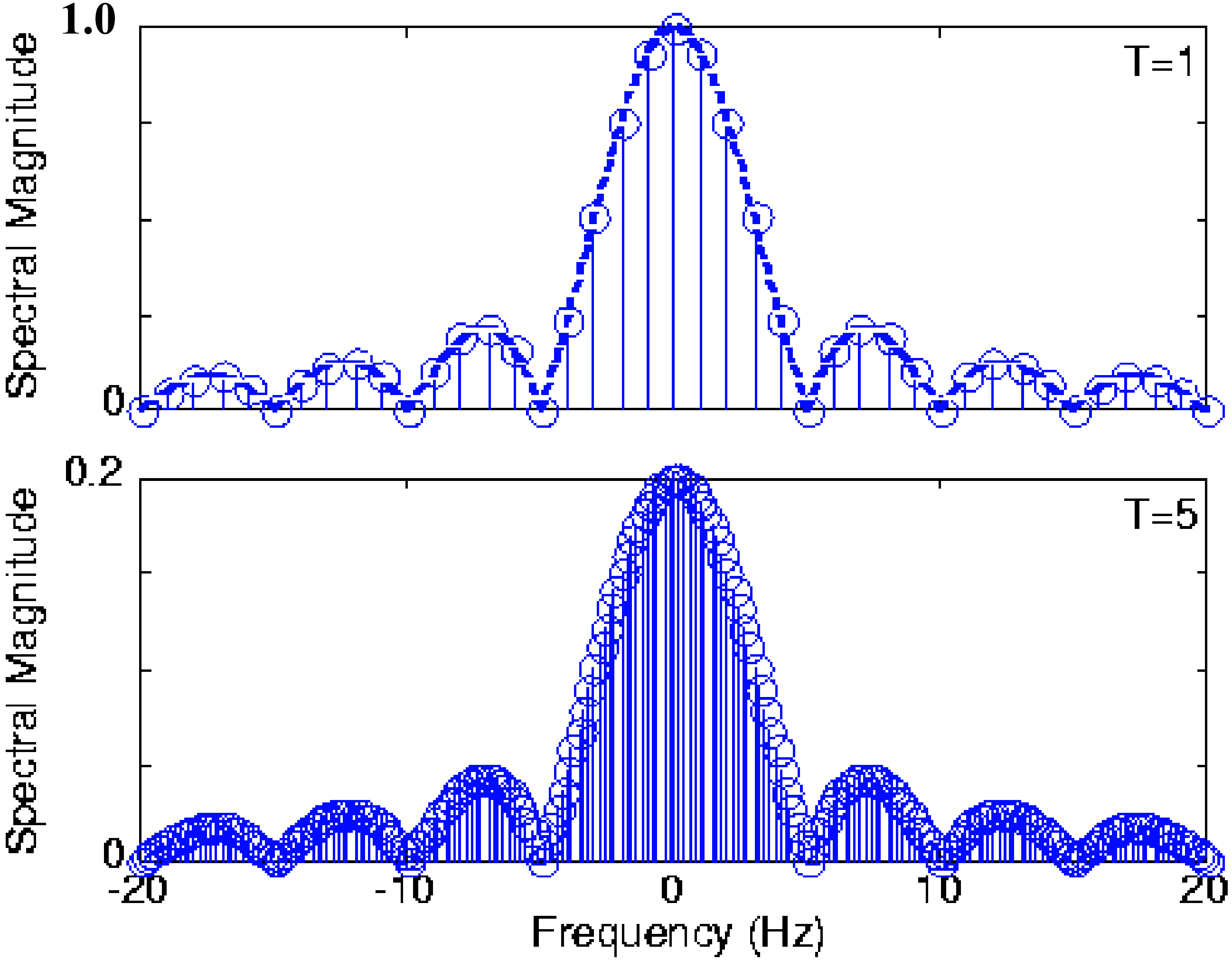
- **Nula anvelope može se/ne mora poklopiti sa učestanošću harmonika!**
- **Slika sa desne strane prethodnog slajda predstavlja deo koji množi $e^{j\theta n}$ dok <u>amplitudski spektar strogo predstavlja apsolutnu vrednost prikazanih vrednosti</u> (amplitude su uvek pozitivne!).**

* Granični slučajevi

- **Kada perioda raste, spektar se zgušnjava, za T->∞ spektar postaje kontinualan (a signal aperiodičan).**
- **Kada se trajanje impulsa skraćuje nule anvelope se pomeraju ka višim vrednostima, za τ->0 anvelopa spektra postaje ravna.**
- **Kada istovremeno važi τ->0, E->∞ a Eτ=1 povorka impulsa se pretvara u periodičnu povorku Delta impulsa – [anvelopa=1/T].**

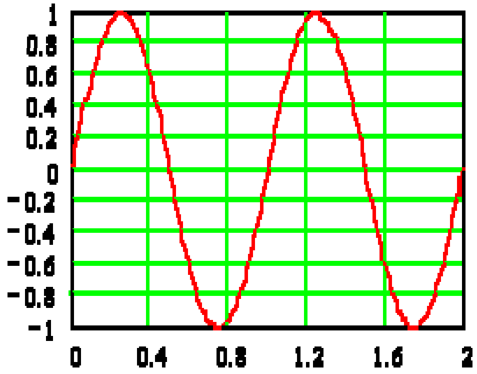
Uticaj periode signala na oblik spektra

* **Maksimum na U** τ/T**, nule na** n/τ **!**

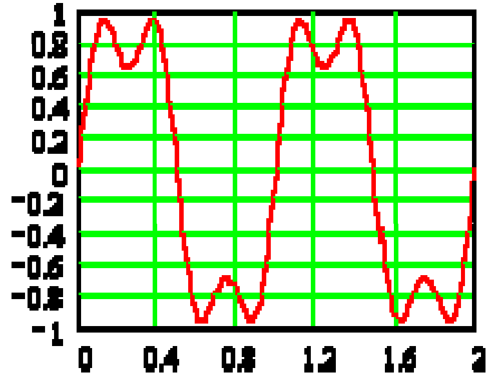


Značaj komponenti spektra

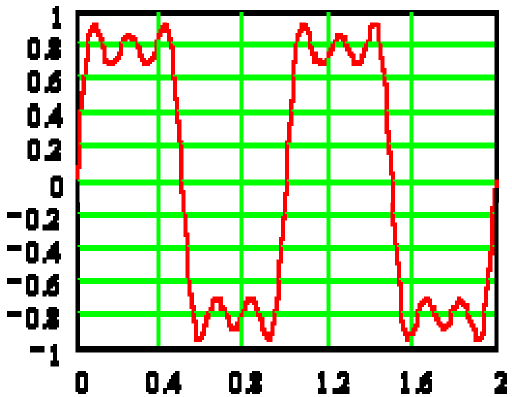
$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T)$



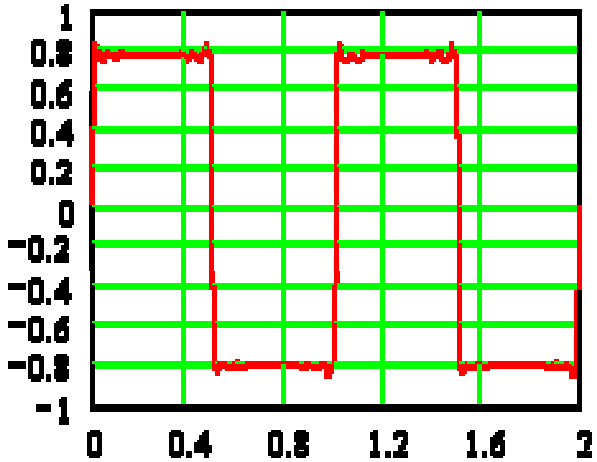
$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T) + (1/3) * \sin(6\pi t/T)$



$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T) + (1/3) * \sin(6\pi t/T) + (1/5) * \sin(10\pi t/T)$



Zbir prvih 79 spektralnih komponenti



Pregled osobina periodičnih signala

* **Najvažnije osobine:**
  - **Spektar je** diskretan
    - Spektar pokazuje amplitude i faze kosinusoida čijim se zbirom može odrediti polazni periodični signal;
    - Rastojanje komponenti u spektru iznosi $f_0=1/T$ i ni u kom slučaju ne može biti manje od toga;
    - Broj komponenti u spektru može biti beskonačan (ali ne mora!).
  - **Deo snage koji "nosi" odgovarajuća spektralna komponenta srazmeran je** kvadratu njene amplitude**;**
  - **Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od *n*);**
  - **Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od *n*;**
  - **Neke komponente u spektru su manje bitne – ako ne uđu u zbir, signal rezultat neće mnogo odstupati od originalnog periodičnog signala.**

Korelacija periodičnih signala

* Korelacija pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$, koji imaju istu periodu T, i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraj τ.
* Definicija korelacije

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\,x_2(t+\tau)\,dt$$

* Furijeov transformacioni par:

$$R_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(X_n)_1^*(X_n)_2\,e^{jn\omega_0\tau}$$

$$(X_n)_1^*(X_n)_2=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau)\,e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau$$

Autokorelacija periodičnih signala

* **Autokorelacija pokazuje sličnost (stepen poklapanja) signala $x_1(t)$, koji ima periodu T, sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomeraj τ.**
* **Definicija autokorelacije**

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\, x_1(t+\tau)\, dt$$

* **Furijeov transformacioni par**

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

$$|X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

Konvolucija periodičnih signala

* **Konvolucija** pokazuje stepen poklapanja signala $x_1(t)$ i signala $x_2(t)$, kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za proizvoljni pomeraj τ.
* **Definicija korelacije**

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\,x_2(\tau-t)\,dt$$

* **Furijeov transformacioni par**

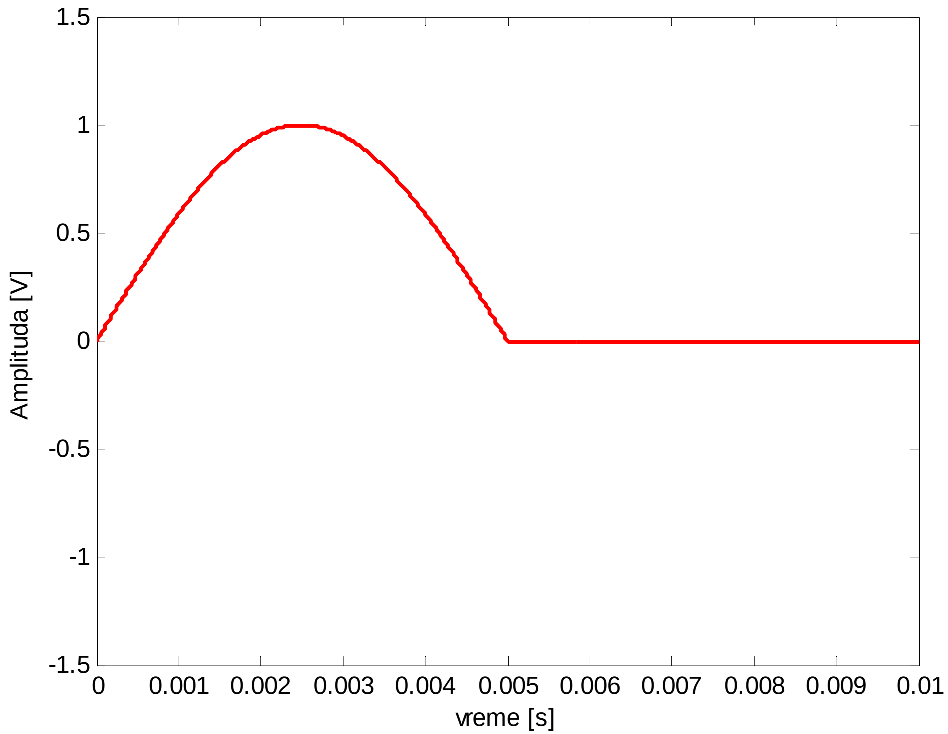
$$\rho_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(X_n)_1(X_n)_2\,e^{jn\omega_0\tau}$$

$$(X_n)_1(X_n)_2=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\rho_{12}(\tau)\,e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau$$

Šta ako signal nije periodičan?

* Ako signal nije periodičan, da li je moguće takav signal predstaviti zbirom određenog broja kosinusoida?
* Za sada ćemo se ograničiti samo na signale koji nisu periodični ali jesu deterministički – mogu se predstaviti nekakvom matematičkom funkcijom.
* Primer:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi ft), & t \in [0, 1/(2f)] \\ 0, & t \notin [0, 1/(2f)] \end{cases}$$



Harmonijska analiza aperiodičnih signala

* Ovi signali nisu periodični - ne postoji *T* tako da je x(*t*)=x(t+T).
  - Može se smatrati da im je perioda beskonačna.
  - Zato $f_0=1/T\rightarrow 0$, spektralne komponente se približavaju a spektar postaje kontinualan!
* Signal *x*(*t*) se ipak može predstaviti u obliku

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{+j\omega t}dt}$$

* Pri čemu je sa *X*(*jω*) označen spektar signala

$$\boxed{X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

a spektar postoji pod uslovom da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<+\infty$$

Harmonijska analiza aperiodičnih signala

* Spektar se opet može napisati u kompleksnom obliku

$$X(j\omega) = \left|X(j\omega)\right| e^{j\theta(\omega)}$$

i rastaviti na

- spektar amplituda, označen sa $\left|X(j\omega)\right|$;
- spektar faza, označen sa $\theta(\omega)$.

pri čemu važi:

$$\theta(\omega) = \arg\left\{X(j\omega)\right\}$$

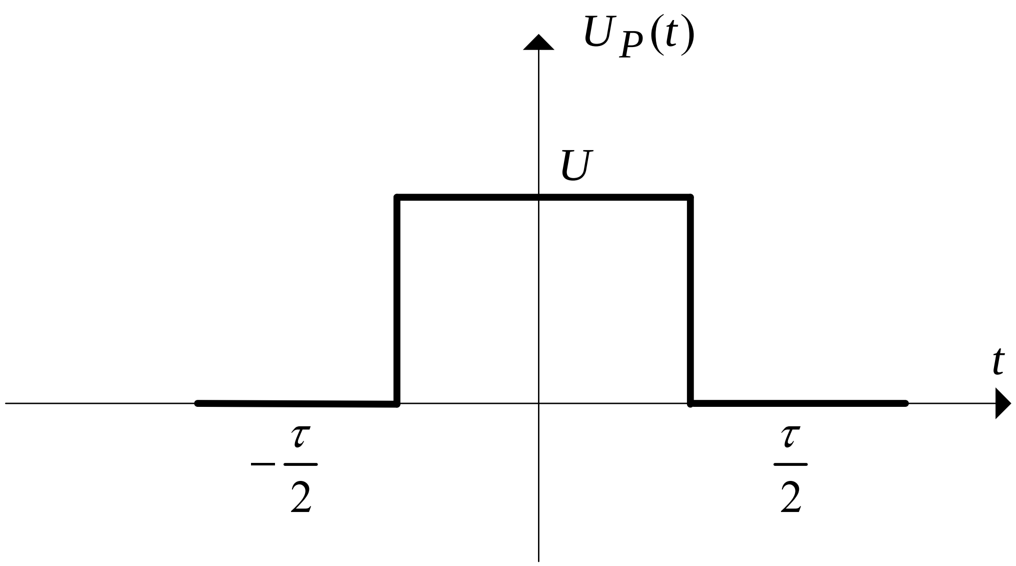
$$\left|X(-j\omega)\right| = \left|X(j\omega)\right|$$

$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$$

Usamljeni pravougaoni impuls

* Signal dobijen od periodične povorke pravougaonih impulsa kada T->∞.

$$u_P(t) = \begin{cases} U, & -\tau/2 < t \leq \tau/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

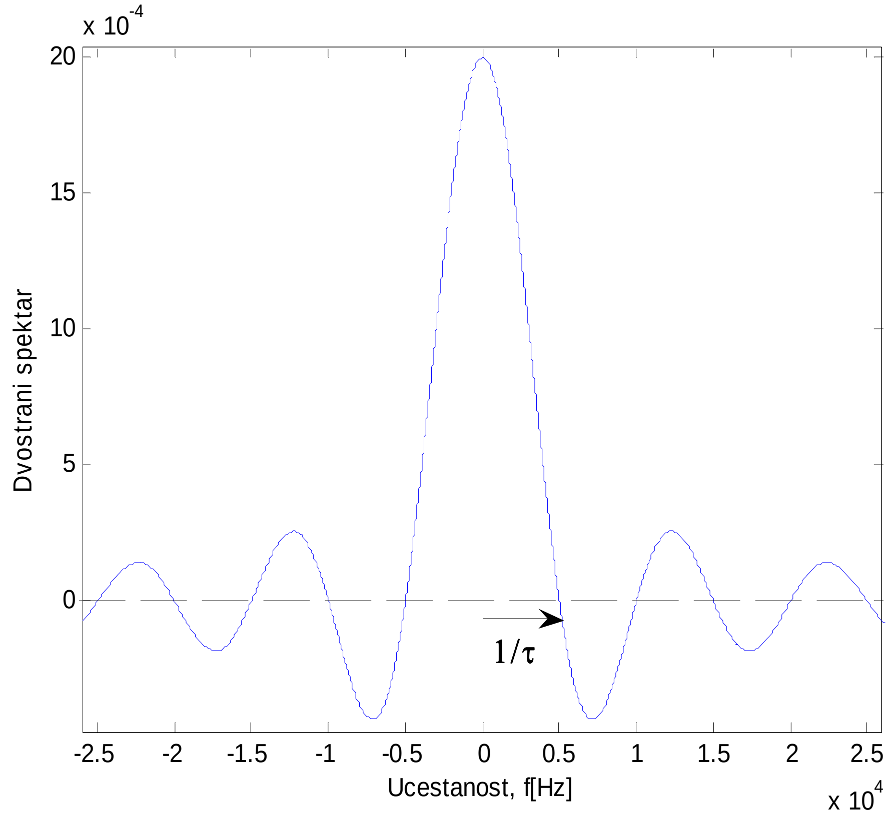


Usamljeni pravougaoni impuls

- Spektar pravougaonog unipolarnog impulsa
  - Spektralna gustina energije dobija se kvadriranjem amplitudskog spektra!
  - Energija signala dobija se integraljenjem spektralne gustine energije po svim učestanostima.

$$\Pi(j\omega) = U\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{j\theta(\omega)}$$

- Primer za impuls:
  - amplitude U=10V
  - trajanja τ=0.2ms
  - prva nula u spektru na $1/\tau$=50kHz
  - spektar u nuli ima vrednost $U\tau$=0.002[Vs]
  - energije $U^2\tau$=0.02[Ws=J].



Osobine spektra usamljenog pravougaonog impulsa

* **Osobine:**
  - Spektar je <u>beskonačno širok</u>!
  - Amplitudski spektar je kontinualan, sadrži komponente na svim učestanostima.
  - Nule spektra javljaju se kada je ispunjeno

$$\mathrm{Sin}(\omega\tau/2)=0 \text{ -> } \omega\tau/2=k\pi$$

  - Nule spektra se nalaze na učestanostima k/τ!

* **Granični slučajevi**
  - Kada se trajanje impulsa povećava nule spektra se pomeraju ka nižim vrednostima, za τ->∞ spektar se svodi na Dirakov impuls.
  - Kada se trajanje impulsa skraćuje nule spektra se pomeraju ka višim vrednostima, za τ->0 spektar postaje ravan.
  - Kada istovremeno važi τ->0, E->∞ a Eτ=1 impuls se pretvara u Delta impuls a spektar ima konstantnu jediničnu vrednost.

Osobine spektra aperiodičnih signala

* **Najvažnije osobine:**
  - Spektar je kontinualan (ne postoje samo neke već sve komponente u spektru);
    - Ovo praktično pokazuje da se aperiodični signal može odrediti zbirom beskonačnog broja sinusoida čije se učestanosti razlikuju za beskonačno malu vrednost.
  - Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od n);
  - Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od n;
  - Spektar snage jednak je kvadratu amplitudskog spektra;
  - Neke od komponenti su više a neke manje istaknute;
  - Ako se odseče deo komponenti koje nose manji deo snage, signal će biti dosta verno rekonstruisan.

Korelacija aperiodičnih signala

* **Korelacija pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva aperiodična signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$, i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraj τ.**
* **Definicija korelacije**

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t+\tau)\, dt$$

* **Furijeov transformacioni par**

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Autokorelacija aperiodičnih signala

* **Autokorelacija pokazuje sličnost (stepen poklapanja) aperiodičnog signala $x_1(t)$ sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomeraj τ.**
* **Definicija autokorelacije**

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_1(t+\tau)\, dt$$

* **Furijeov transformacioni par**

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$\left|X(j\omega)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)\, e^{-jn\omega_0\tau}\, d\tau$$

Konvolucija aperiodičnih signala

- **Konvolucija pokazuje stepen poklapanja dva aperiodična signala x_1(t) i x_2(t), kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za pomeraj τ.**
- **Definicija korelacije**

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(\tau - t)\, dt$$

- **Furijeov transformacioni par**

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$X_1(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Još neke osobine determinističkih signala

* **Bez obzira da li je signal periodičan ili aperiodičan:**
  - Furijeova transformacija korelacije dva signala jednaka je proizvodu amplitudskog spektra jednog i konjugovanog amplitudskog spektra drugog signala;
  - Furijeova transformacija ***autokorelacije*** signala jednaka je ***spektru snage*** signala;
  - Furijeova transformacija ***konvolucije*** dva signala jednaka je ***proizvodu amplitudskih spektara*** dva signala.
  - Pošto pomeraj može biti proizvoljan, korelacija, autokorelacija i konvolucija su <u>uvek</u> ***kontinualne funkcije***
    - Za periodične signale one se dobijaju sabiranjem diskretnih komponenti (u opštem slučaju beskonačne sume);
    - Za aperiodične signale navedene veličine se dobijaju integraljenjem kontinualnih funkcija.

Dodatne osobine *Fourier*-ove transformacije

* **Ako posmatramo dva aperiodična realna signala *x(t)* i *y(t)*, za koje je moguće definisati spektre *X(jω)* i *Y(jω)*, respektivno, kao i kompleksne konstante *a,b* tada važe sledeći izrazi (osobine):**
  - **Linearnost**

$$\mathrm{F}\{ax(t)+by(t)\}=a\mathrm{F}\{x(t)\}+b\mathrm{F}\{y(t)\}=aX(j\omega)+bY(j\omega).$$

  - **pomeranje (translacija) u vremenskom domenu**

$$\mathrm{F}\{x(t-t_0)\}=X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathrm{F}\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(y)e^{-j\omega(y+t_0)}dy=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}x(y)e^{-j\omega y}dy=X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

  - **pomeranje (translacija) u domenu učestanosti**

$$\mathrm{F}\{x(t)e^{-j\omega_0 t}\}=X(j(\omega+\omega_0))$$

$$\mathrm{F}\{x(t)e^{-j\omega_0 t}\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt=X(j(\omega+\omega_0))$$

Dodatne osobine *Fourier*-ove transformacije

- **širenje (ekspanzija) u domenu učestanosti**

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X(j\frac{\omega}{a})$$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-j\omega y/a} dy/a = \frac{1}{a} X(j\frac{\omega}{a})$$

- ***Fourier*-ova transformacija izvoda.**

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$$

- ***Fourier*-ova transformacija integrala.**

$$\mathcal{F}\{\int x(t)dt\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$