PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA
(SI2PMT)

Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2012/2013.

-IV-
Linearni sistemi

Sistemi za prenos signala

* **Sistem je opšti naziv za entitet sastavljen od međusobno povezanih uređaja, u kome se obavlja transformacija ulaznog signala u signal na izlazu iz sistema.**
* **Ulazni i izlazni signal po pravilu su *funkcije vremena*, mada mogu da budu i funkcije drugih argumenata.**
* **Podela**
  - **Linearni**
    - Signal na izlazu je linearna transformacija ulaznog signala.
      - homogenost $\boldsymbol{f}[kx(t)]=k\boldsymbol{f}[x(t)]$;
      - aditivnost $\boldsymbol{f}[x_1(t)+x_2(t)]=\boldsymbol{f}[x_1(t)]+\boldsymbol{f}[x_2(t)]$.
    - Linearnost dozvoljava da se odziv sistema predstavi kao suma špojedinačnih odziva na pobudu pojedinačnim komponentama (sabircima!) pobudnog signala.
  - **Nelinearni**
    - Ne zadovoljavaju gornje uslove.

Osobine sistema

- **Izvor nema memoriju ako signal u trenutku *t* zavisi samo od ulaznog signala u trenutku *t* (ne zavisi od prethodnih trenutaka).**
- **Vremenska invarijantnost**

  $F[x(t)]=y(t) \text{ -> } F[x(t-\tau)]=y(t-\tau)$

  Ako je na ulazu u linearan vremenski invarijantan sistem prisutana (kompleksna) pobuda na samo jednoj učestanosti, na izlazu se pojavljuje odziv na istoj toj učestanosti (samo na njioj!)
- **Kauzalnost** – odziv u posmatranom trenutku ne zavisi od odziva u prethodnim trenucima, uključujući tu i tekući.
- **Stabilnost** – ako konačna pobuda proizvodi konačan odziv.

Uvod u linearne sisteme – signal pobude

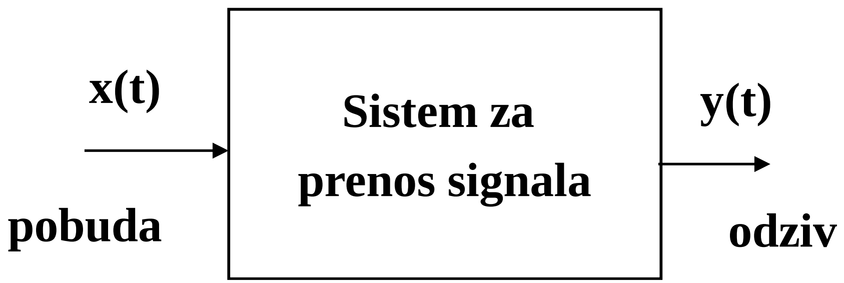
* **Ako na ulazu sistema za prenos postoji nekakav signal $x(t)$, on se naziva pobuda.**
  - Pobuda se može predstaviti kao zbir prostoperiodičnih komponenti.

$$x(t) = \sum_i x_i(t)$$

  - Svaka prostoperiodična komponenta je oblika

$$x_i(t) = X_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i)$$

* **Signal $y(t)$ koji se pojavi na njegovom izlazu je tada odziv.**
  - Odziv se, kao i svaki drugi signal, takođe rastaviti na nekakve prostoperiodične komponente (u opštem slučaju broj ovih komponenti i njihove učestanosti ne moraju biti iste kao kod pobudnog signala).
* **Sistem za prenos se tada posmatra kao crna kutija (*black box*) koja je potpuno opisana pobudom i odzivom.**



Uvod u linearne sisteme – vremenski domen

* Za linearne vremenski varijantne sisteme važi:

- Ako pobudi *x*(t) odgovara odziv *y*(t), tada pojačanoj i zakašnjenoj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude

$$\boldsymbol{x(t) \rightarrow y(t) \quad => \quad Ax(t-t_0) \rightarrow Ay(t-t_0)}$$

- Kod linearnih sistema prenosa pobudi prostoperiodičnim signalom na jednoj učestanosti odgovara takođe prostoperiodični signal na istoj učestanosti (u opšem slučaju, sa promenjenom amplitudom i početnim faznim stavom)

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega_i t + \theta_{xi}) \rightarrow y_i(t) = Y_i \cos(\omega_i t + \theta_{yi})$$

- Pošto je pobuda složena, odziv se može napisati kao zbir prostoperiodičnih komponenti koje imaju iste učestanosti kao komponente pobudnog signala:

pobuda

$$x_i(t) = \sum_i X_i \cos(2\pi f_i t + \theta_{xi})$$

Linearni sistem

$$\boldsymbol{Y_i = A_i X_i}$$

$$\boldsymbol{\theta_{yi} = \theta_{xi} + \theta_i}$$

odziv

$$y_i(t) = \sum_i Y_i \cos(2\pi f_i t + \theta_{yi})$$

Primer linearnog sistema

* **Za linearne vremenski varijantne sisteme važi:**
  - Ako pobudi *x*(t) odgovara odziv *y*(t), tada pojačanoj i zakašnjenoj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude
* **Primer sa prošlog časa:**

$$x(t)=0.2*\sin(2*\pi*100*t)+\sin(2*\pi*200*t)+0.7*\sin(2*\pi*50*t)$$

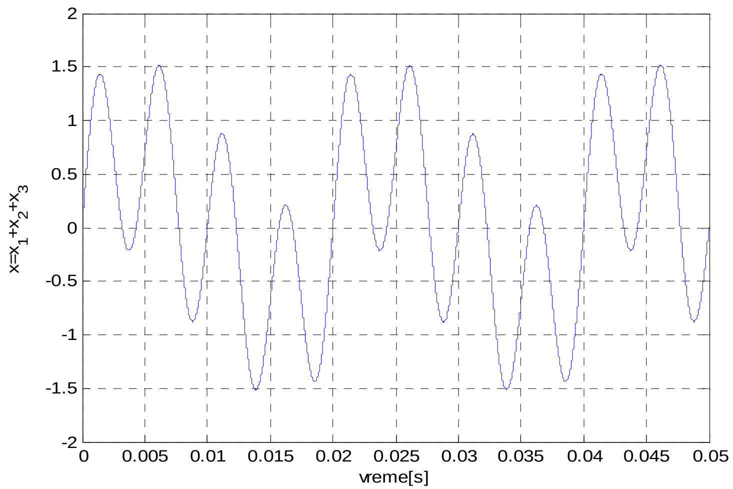
$$y(t)=0.2*\sin(2*\pi*100*t)+0.1*\sin(2*\pi*200*t)+1*\sin(2*\pi*50*t)$$

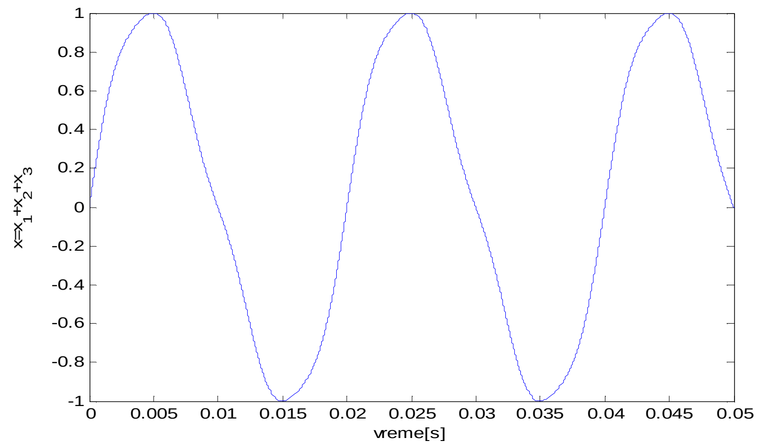
* **Pojačanje na pojedinim učestanostima**

A(50Hz)=1/0.7=1.4286 – pojačanje komponente na niskim učestanostima

A(100Hz)=0.2/0.2=1 – nema promene amplitude/snage na učestanosti 100Hz

A(200Hz)=0.1/1=0.1 – amplituda komponente oslabljena 10 puta (snaga 100 puta)





Zapis pojačanja/slabljenja u decibelima

* **Ako je pojačanje amplitude A (apsolutna vrednost), tada je pojačanje snage signala $A_p=A^2$, slabljenje je 1/A a slabljenje snage $1/A^2$ pa je:**
  - **Pojačanje u decibelima:** $a=20\log_{10}(A)$ [dB] $=10\log_{10}(A_P)$ [dB]
  - **Slabljenje u decibelima:** $a_t=-20\log_{10}(A)$ [dB] $=-10\log_{10}(A_P)$ [dB]

* **Prethodni primer**

  A(50Hz)=1.43, A_P (50Hz)=2.05 –> a=3.11dB>0

  A(100Hz)=1, A_P (100Hz)=1 –> a=0

  A(200Hz)=0.1 , A_P (200Hz)=0.01 –> a=-20dB<0

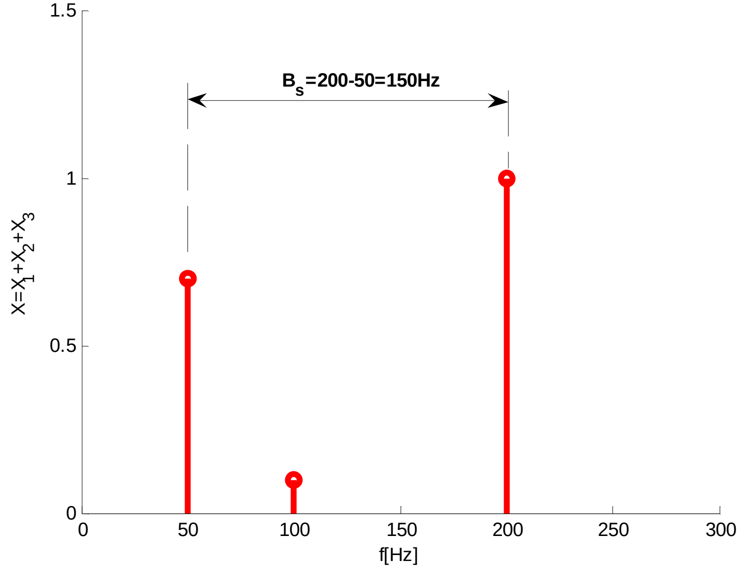
* Kada je pojačanje veće od jedan (signal je zaista pojačan), vrednost u decibelima je veća od nule a kada je pojačanje manje od jedan (signal je oslabljen), vrednost u decibelima je manja od nule. Za slabljenje važi obrnuto pravilo.

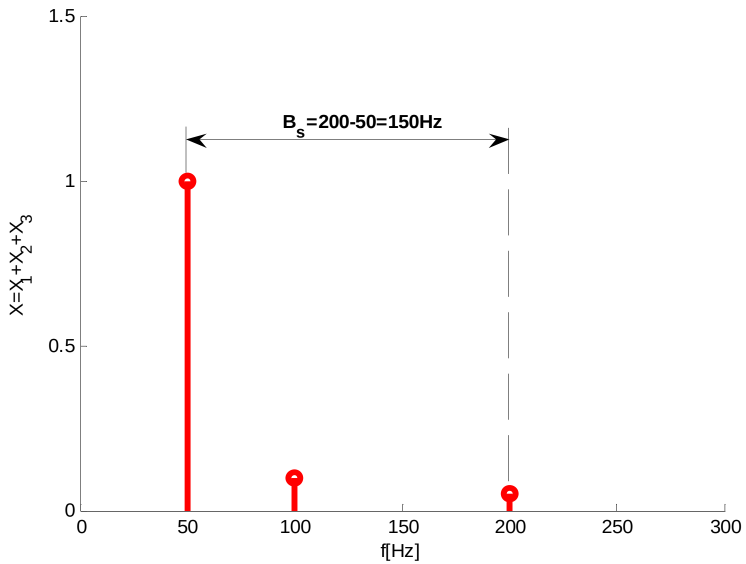
* Tipične vrednosti:
  * $A_P=2$ => a=3dB, $A_P=4$ (A=2) => a=6dB (a_t =-6dB)
  * $A_P=.5$ => a=-3dB, $A_P=.25$ (A=0.5) => a=-6dB (a_t =6dB)
  * $A_P=10$ => a=10dB, $A_P=100$ (A=10) => a=20dB (a_t =-20dB)
  * $A_P=0.1$ => a=-10dB, $A_P=0.01$ (A=0.1) => a=-20dB (a_t =20dB)

Uvod u linearne sisteme - spektar

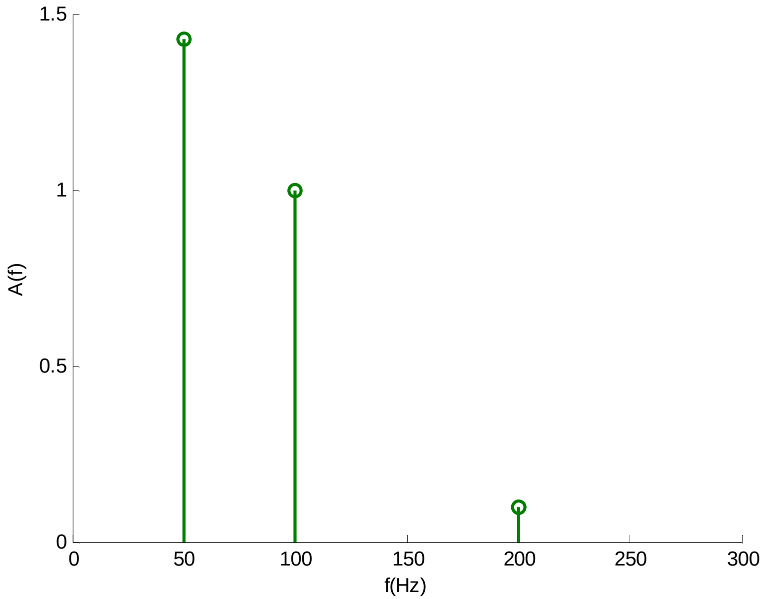
* **Ako spektar signala pobude ima komponente na učestanostima f_1, f_2, ..., f_N, tada se komponente u spektru signala odziva mogu pojaviti samo na ovim istim učestanostima!**
* **Za svaku komponentu u spektru (na učestanosti f_i) može se odrediti pojačanje i promena faznog stava koje unosi sistem za prenos, da bi se od pobudnog signala dobio signal koji predstavlja odziv.**
* **Unapred se ne zna da li će na ulaz sistema biti doveden periodičan signal (diskretan spektar - komponente na samo nekim učestanostima) ili aperiodičan signal (kontinualan spektar - komponente na svim učestanostima)**
* **Zato treba odrediti pojačanje i promenu faze na bilo kojoj učestanosti f**
  * Pojačanje linearnog sistema na učestanosti f obeležava se sa $A(f)$ i definiše kao odnos amplituda komponenata odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj. $A(f)=Y(f)/X(f)$.
  * Fazni pomeraj koji unosi linearni sistem na učestanosti f_i obeležava se sa $\theta(f_i)$ i definiše kao odnos amplituda komponenata odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj. $\theta(f) = \theta_y(f) - \theta_x(f)$.

Primer linearnog sistema





- Sve ovo se mnogo lakše vidi ako se uporede spektri signala na ulazu i izlazu sistema.
- U ovom slučaju nije bilo promene faznog stava pa fazna karakteristika nije ni prikazana.
- Ovako se dobija pojačanje sistema na onim učestanostima na kojim postoje komponente signala sa ulaza. Koliko je pojačanje na drugim učestanostima?



Veza spektara signala na ulazu i izlazu linearnog sistema

* **Periodični signali:**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn(2\pi f_0)t} \rightarrow y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nf_0)e^{\theta(nf_0)} X_n e^{jn(2\pi f_0)t}$$

$$\boxed{Y_n = A(nf_0)e^{\theta(nf_0)} X_n}$$

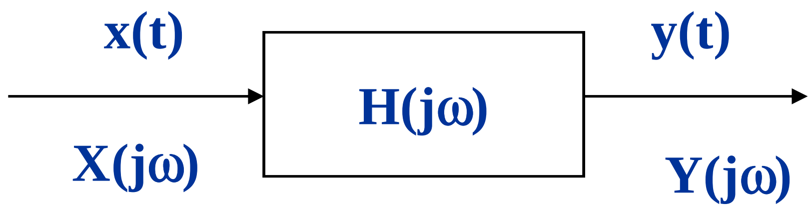
* **Aperiodični signali:**

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)e^{jft}df \rightarrow \qquad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf)e^{jft}df$$

$$\boxed{Y(jf)=A(f)e^{\theta(f)}X(jf)}$$

Prenosna funkcija linearnog sistema

* **Oblik spektra:**



* **Ako se** **prenosna funkcija** **linearnog sistema označi sa *H*(*jf*), tada se može pisati izraz:**

$$\boxed{Y(jf) = H(jf)X(jf)}$$

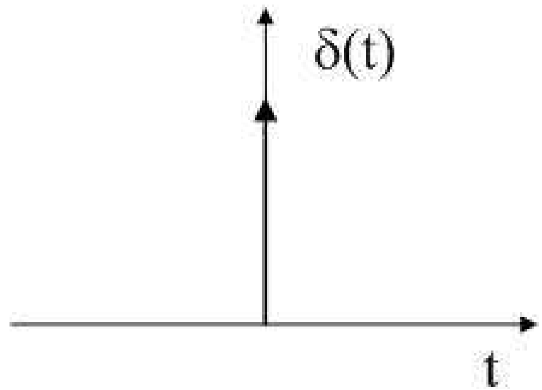
* **Prenosna funkcija sistema može se rastaviti na amplitudsku i faznu karakteristiku (A(*f*) određuje pojačanje a θ(*f*) promenu faze pobudne komponente na proizvoljnoj učestanosti *f*)**

$$H(jf) = A(f)e^{j\theta(f)}$$

* **Prenosna funkcija je <u>isključivo karakteristika sistema za prenos</u> i ni na koji način ne zavisi od pobude ili odziva!**
  - Ipak, ona se ne može odrediti ako na ulazu nemamo nikakvu pobudu!
  - Kakva pobuda je optimalna (poželjno da to bude aperiodičan signal)?

Delta impuls

* **Impuls izuzetno kratkog trajanja i teorijski beskonačno velike amplitude, ali tako da njegova površina ima jediničnu vrednost.**



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

* **Furijeova transformacija funkcije δ(*t*) jednaka je konstanti, koja pritom ima jediničnu vrednost.**
* **Zato je spektar Delta impulsa (aperiodičan signal) kontinualan i definisan na svim učestanostima.**
  * **Pritom je amplitudski spektar jednak jedinici a na svakoj učestanosti je početni fazni stav jednak nuli.**
  * **Spektar Delta impulsa je kontinualan, ravan i beskonačno širok!**

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

Impulsni odziv linearnog sistema

* **Impulsni odziv predstavlja odziv sistema na pobudu delta impulsom:**

* **Spektar signala na izlazu je tada jednak prenosnoj funkciji:**

$$\boxed{Y(jf)=X(jf)H(jf)=\Delta(jf)H(jf)=H(jf)}$$

  - **Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls a na izlaz priključi spektralni analizator, na njemu možemo očitati prenosnu funkciju sistema.**
  - **Sličan rezultat se dobija ako se na ulaz dovede pravougaoni impuls kratkog trajanja.**

* **Izraz za impulsni odziv zavisi samo od prenosne funkcije:**
  - **Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls a na izlaz priključi osciloskop (jednostavniji uređaj!), na njemu možemo očitati impulsni odziv sistema.**
  - **Furijeovom transformacijom impulsnog odziva može se dobiti *H*(*jf*) i obrnuto:**

$$\boxed{h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}H(jf)e^{jft}df}$$

Kako opisati signal na izlazu?

* **Spektar signala na izlazu sistema za prenos jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije**
  - **Da bi ga odredili treba poznavati spektar signala na ulazu (karakteristika signala koji se prenosi) i prenosnu funkciju (karakteristika sistema za prenos).**

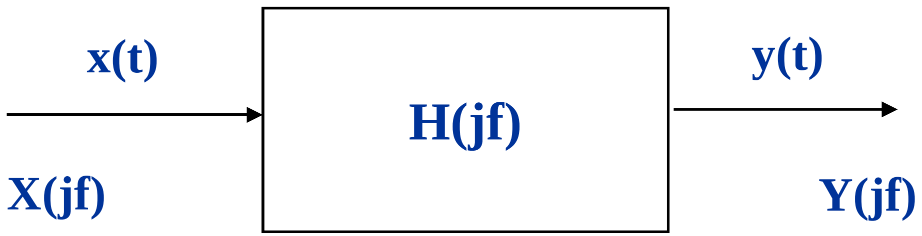
$$\boxed{Y(jf) = X(jf)H(jf)}$$

* **Signal na izlazu sistema za prenos jednak je konvoluciji ulaznog signala i impulsnog odziva**
  - **Da bi odredili vremenski oblik izlaznog signala treba poznavati vremenski oblik ulaznog signala koji treba preneti i impulsni odziv sistema (karakteristika sistema za prenos).**

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau}$$

Idealan sistem za prenos (vremenski domen)

* Signal sa ulaza ne sme biti izobličen, tj. u veoma sličnom obliku treba da se pojavi na izlazu:
  - Amplituda mu je promenjena (pojačanje ne mora biti jedinično, dovoljno je da je konstantno tj. isto na svakoj učestanosti);
  - Zakašnjen je u vremenu (kašnjenje ne mora biti nula, tj. odziv se ne mora pojaviti u istom trenutku kada i pobuda).



$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

Idealan sistem za prenos (frekvencijski domen)

* **Spektar signala na izlazu je tada**

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(\tau)e^{-j\omega t(t_0+\tau)}d\tau$$

$$= Ae^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = Ae^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

* **Prenosna funkcija idealnog sistema:**
  - **Pojačanje je <u>konstantno na svim učestanostima</u>;**
  - **Fazna karakteristika je <u>linearna funkcija učestanosti</u>.**
  - **Konstanta t_0 koja određuje nagib krive fazne karakteristike naziva se grupno kašnjenje!**

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Ae^{-j\omega t_0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= A = const. \\ \theta(\omega) &= -\omega t_0 \pm n\pi \end{aligned}}$$

Idealan sistem za prenos - primer

- **Primer sa prošlog časa:**

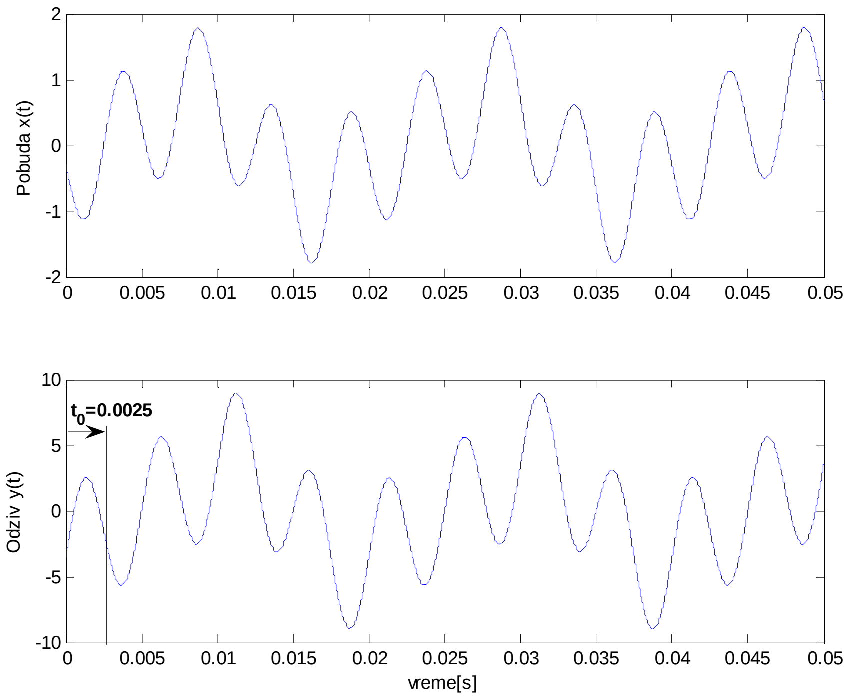
  $x(t)$=0.2*sin(2*π*100*t)+sin(2*π*200*t)+0.7*sin(2*π*50*t)

  $y(t)$=sin(2*π*100*t-π/2)+5*sin(2*π*200*t-π)+3.5*sin(2*π*50*t-π/4)

- **Pojačanje na pojedinim učestanostima**

  - amplituda svake komponente pojačana 5 puta - A(50Hz)=A(100Hz)=A(200Hz)=5

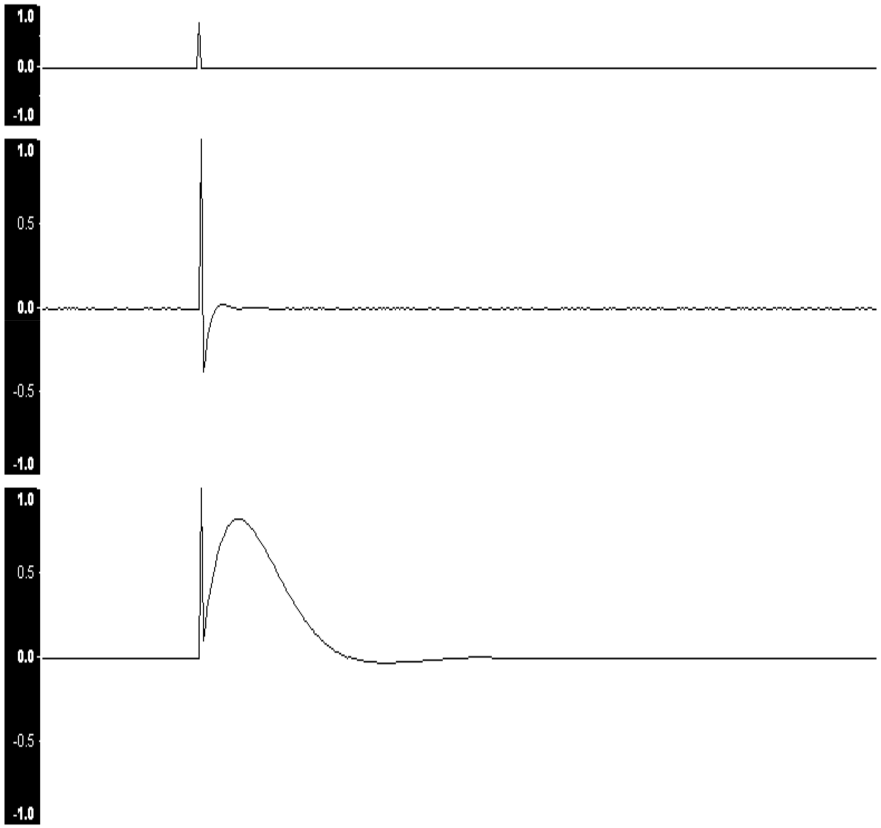
  - fazni stav svake komponente smanjuje se za π/4*(f[Hz]/50)=2π*f[Hz] /400 pa je grupno kašnjenje u ovom slučaju t_0=1/400 =0.0025s.



Realan sistem za prenos

* **Da bi sistem za prenos bio idealan:**
  - **Amplitudska karakteristika funkcije prenosa mora biti ravna <u>na svim učestanostima</u> (ovo dovodi do iste promene amplitude svih spektralnih komponenti signala koji se prenosi!).**
  - **Fazna karakteristika funkcije prenosa mora biti linearna <u>na svim učestanostima</u> (što dovodi <u>samo</u> do kašnjenja signala na izlazu sistema u poređenju sa onim na ulazu!).**
  - **Kada se na ulazu pojavi Delta impuls, na izlazu bi trebalo da se pojavi pojačan/oslabljen i zakašnjen za t_0 (ali ne i razliven) Delta impuls.**

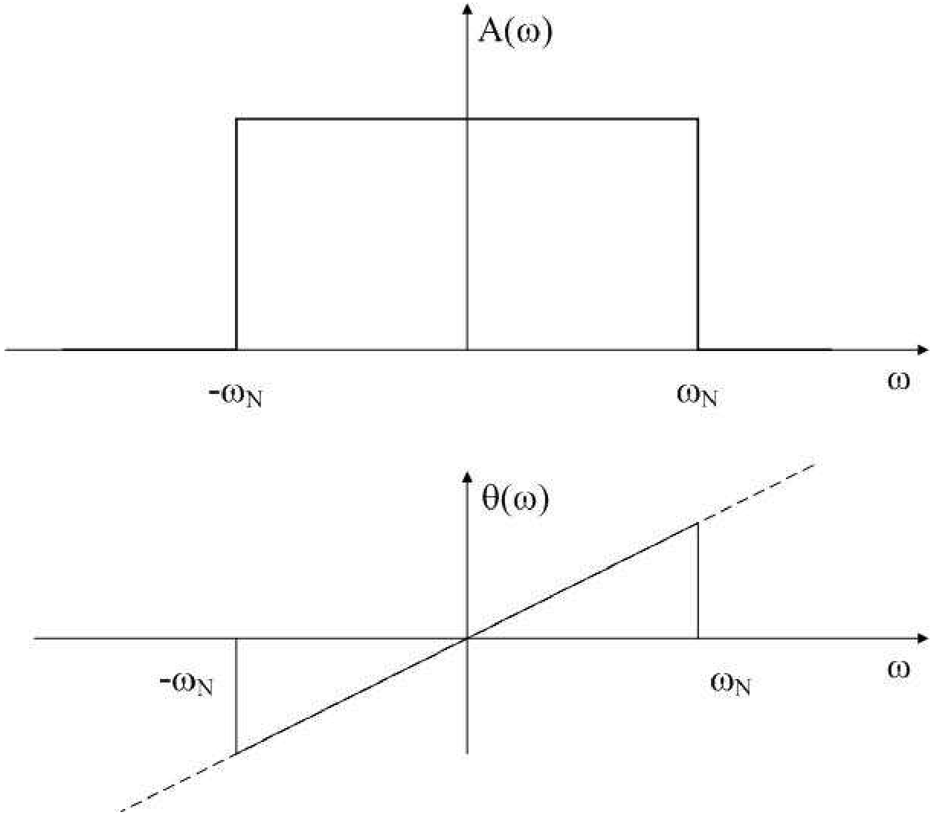
* **Realan sistem (pobuda i impulsni odziv tipičnog audio sistema):**



Filtar propusnik niskih učestanosti (NF filtar)

* **NF filtar propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi iznad granične učestanosti f_N (tj. kružne granične učestanosti $\omega_N=2\pi f_N$)**

- **Naziva se i LP filtar (*low pass filter*).**
- **Kada ω_N->∞, filtar postaje idealan sistem prenosa.**



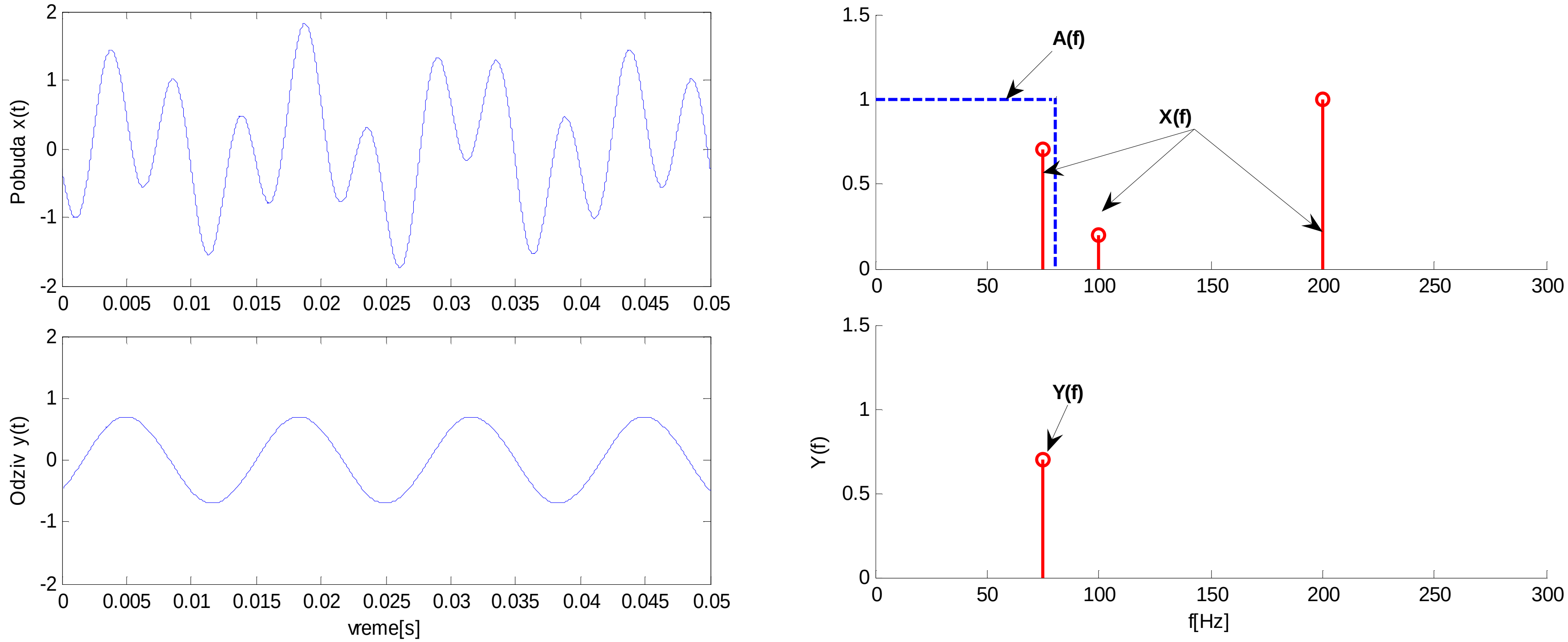
$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| \le \omega_N$$
$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_N$$

Idealni NF filtar – primer 1

- **Primer sa prošlog časa**

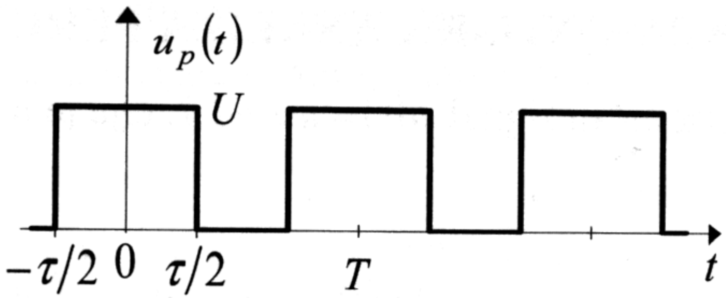
  $x(t)$=0.2*cos(2π*100t)+cos(2π*200t+π/2)+0.7*cos(2π*75t+5π/4)

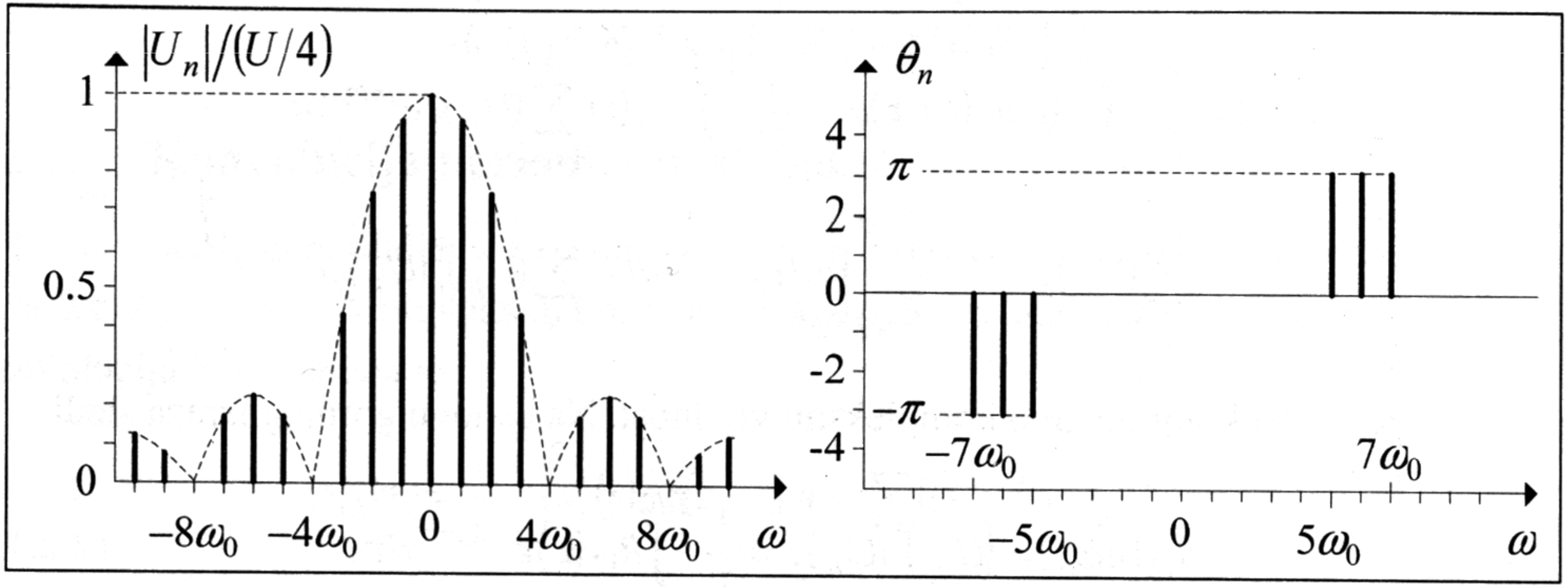
- **Signal se filtrira kroz NF filtar granične učestanosti 80Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je A=1).**
  - **Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 0.7 na učestanosti 75Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).**



Idealni NF filtar – primer 2

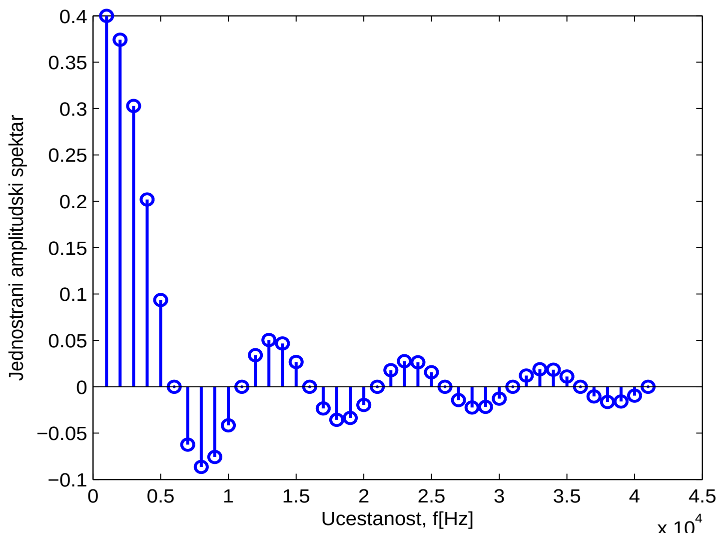
* **Pobudni signal je periodična povorka impulsa:**

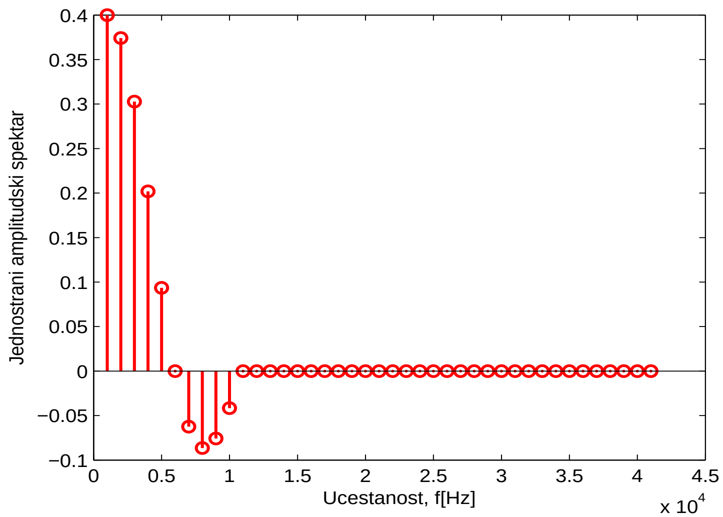




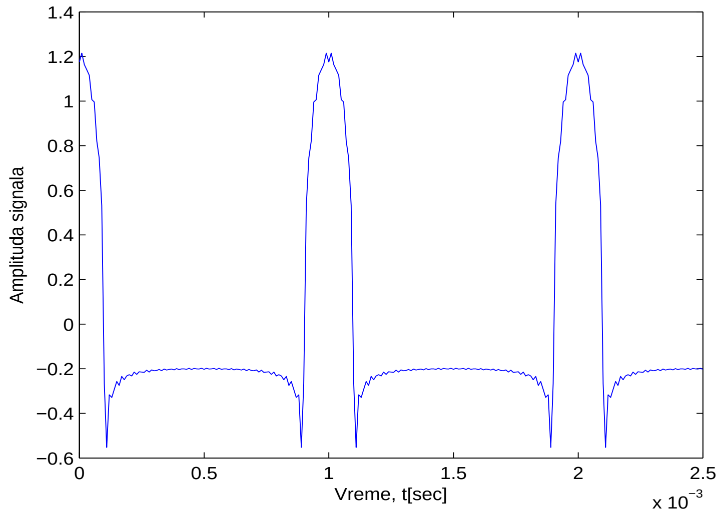
Idealni NF filtar – primer 2

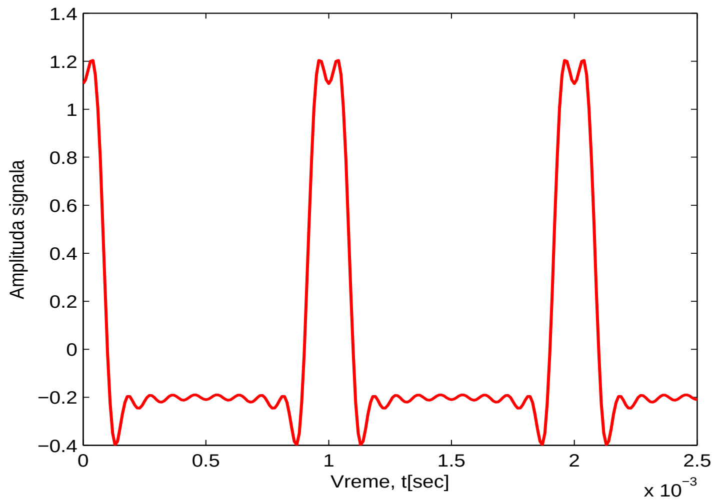
* Spektar:





* Vreme:

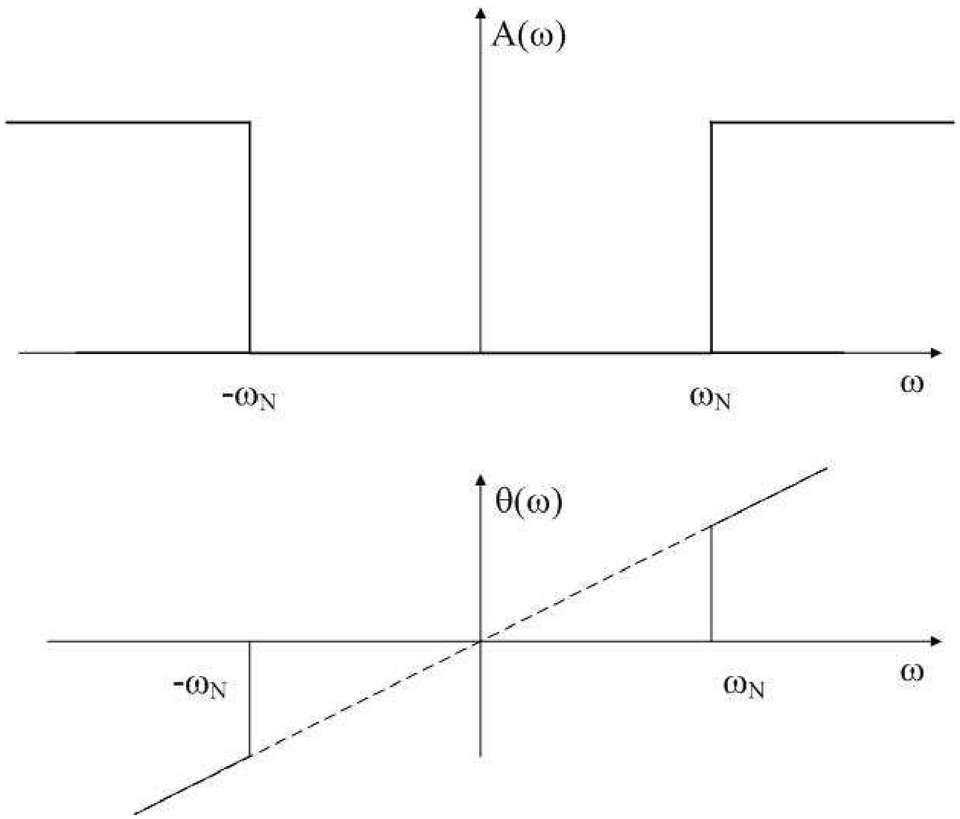




Filtar propusnik visokih učestanosti (VF filtar)

* **VF filtar** **propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi ispod granične učestanosti f_N (tj. kružne granične učestanosti $\omega_N=2\pi f_N$)**

- **Naziva se i HP (*high pass filter*).**
- **Kada $\omega_N=0$, filtar postaje idealan sistem prenosa.**



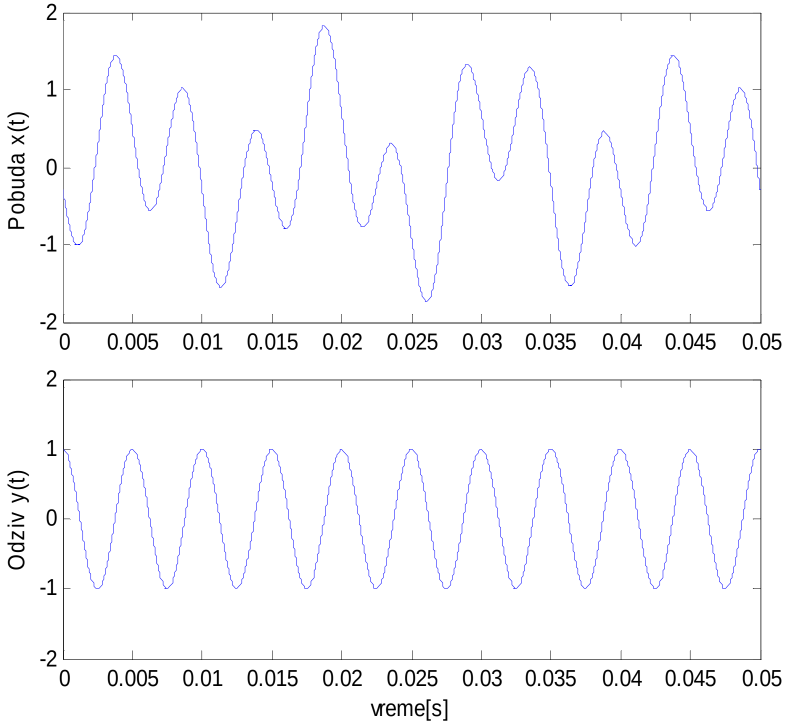
$$H(j\omega)=0, \qquad |\omega|\le\omega_N$$
$$H(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega|>\omega_N$$

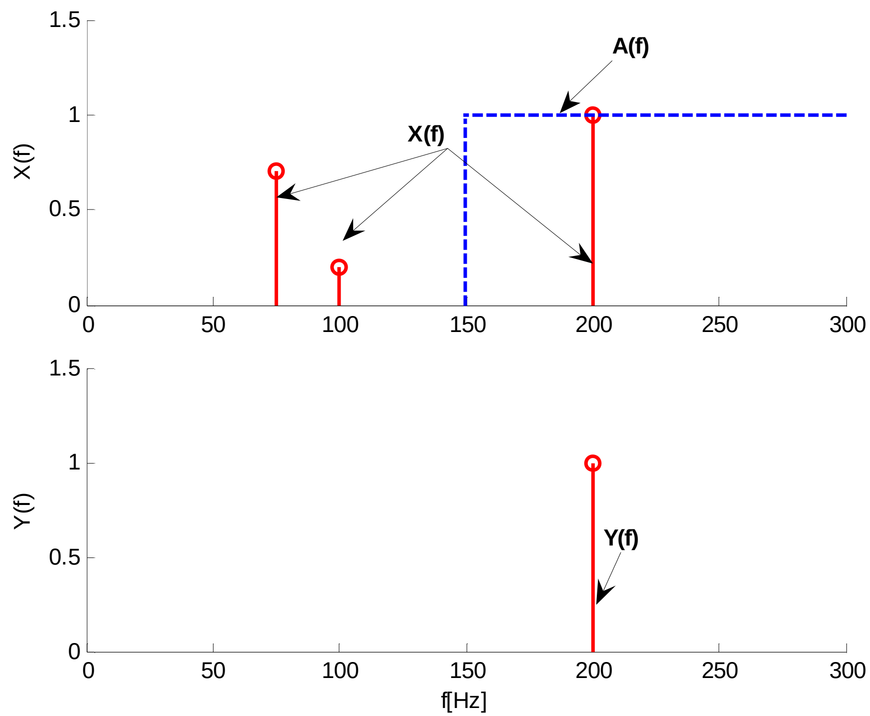
Idealni VF filtar – primer 1

* **Primer sa prošlog časa**

  $x(t)=0.2*\cos(2\pi*100t)+\cos(2\pi*200t+\pi/2)+0.7*\cos(2\pi*75t+5\pi/4)$

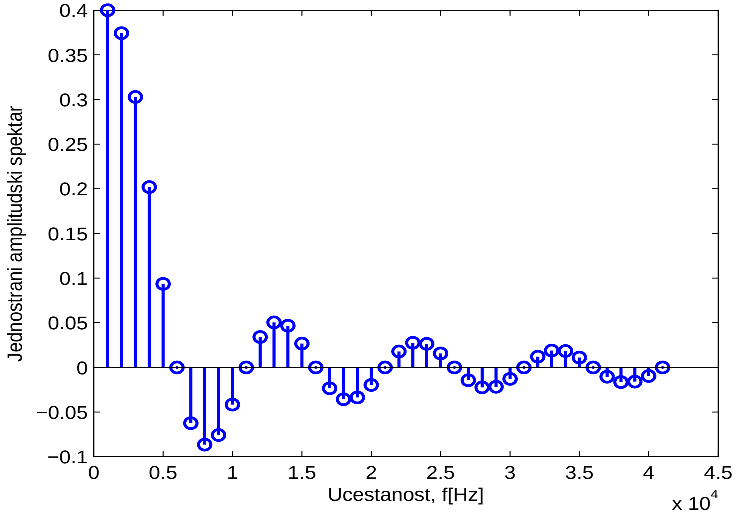
* **Signal se filtrira kroz VF filtar granične učestanosti 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je A=1).**
  - **Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 1 na učestanosti 200Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).**

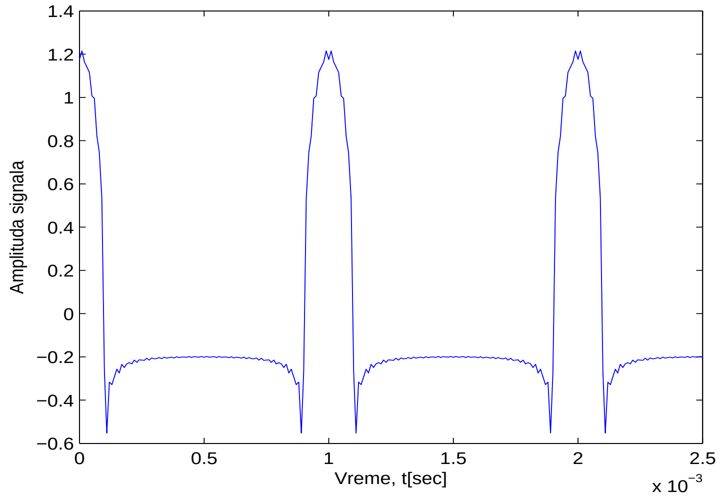


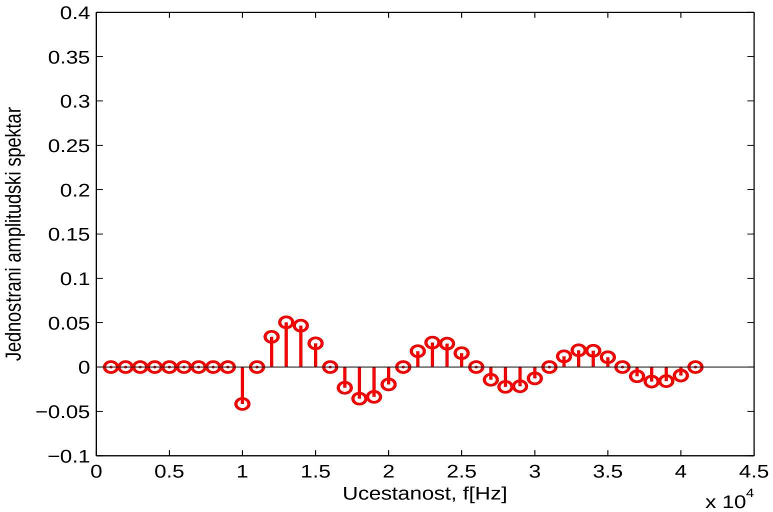


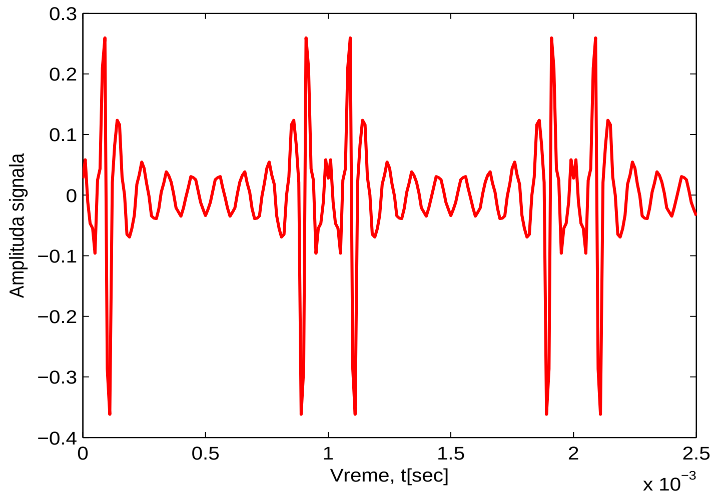
Idealni VF filtar – primer 2

- **Spektar**
- **Vreme**





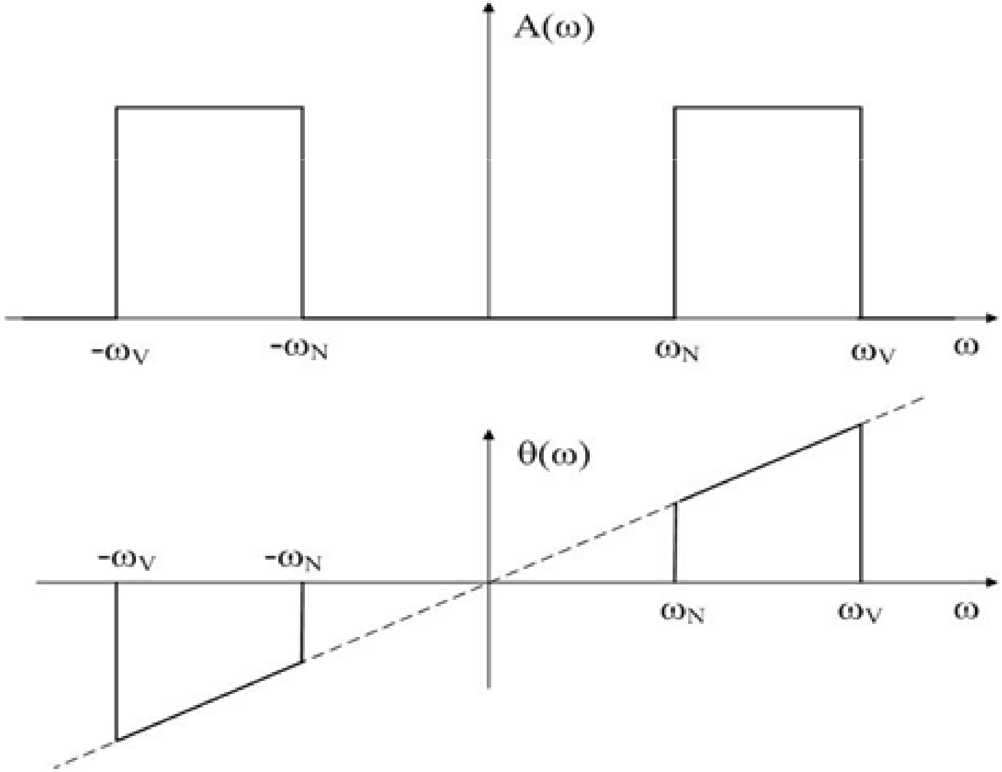




Filtar propusnik opsega učestanosti

***Filtar propusnik opsega učestanosti** **propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi između graničnih učestanosti f_N i f_V (tj. kružnih graničnih učestanosti $\omega_N=2\pi f_N$ ι $\omega_V=2\pi f_V$).**

- **Naziva se i BP (*band pass filter*).**
- **Kada $\omega_N=0$ a $\omega_V\to\infty$, filtar postaje idealan sistem prenosa.**



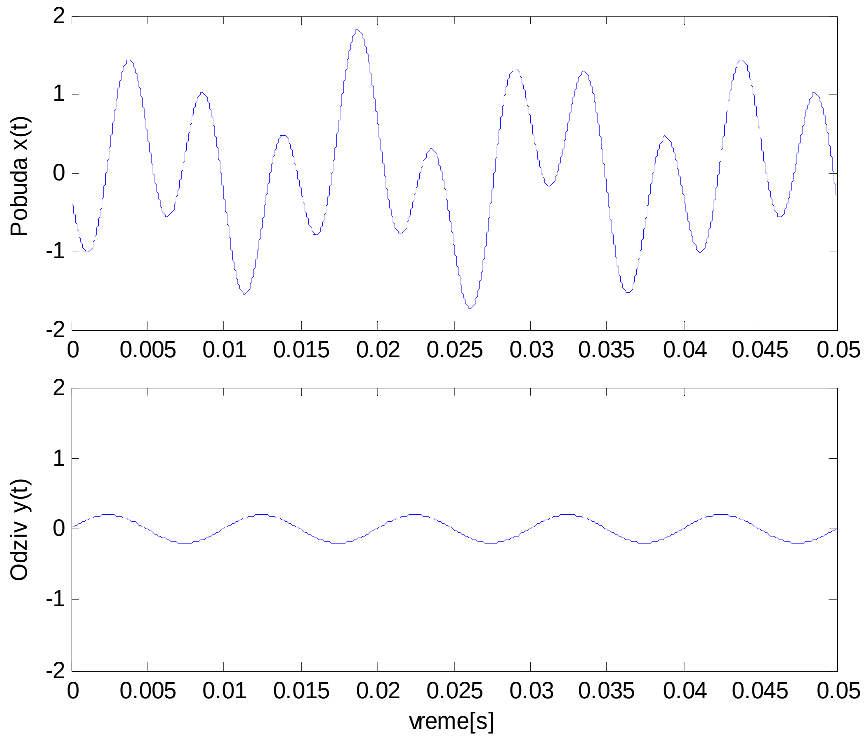
$$H(j\omega)=0, \qquad |\omega|\le\omega_N$$
$$H(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}, \quad \omega_N<|\omega|\le\omega_V$$
$$H(j\omega)=0, \qquad |\omega|>\omega_V$$

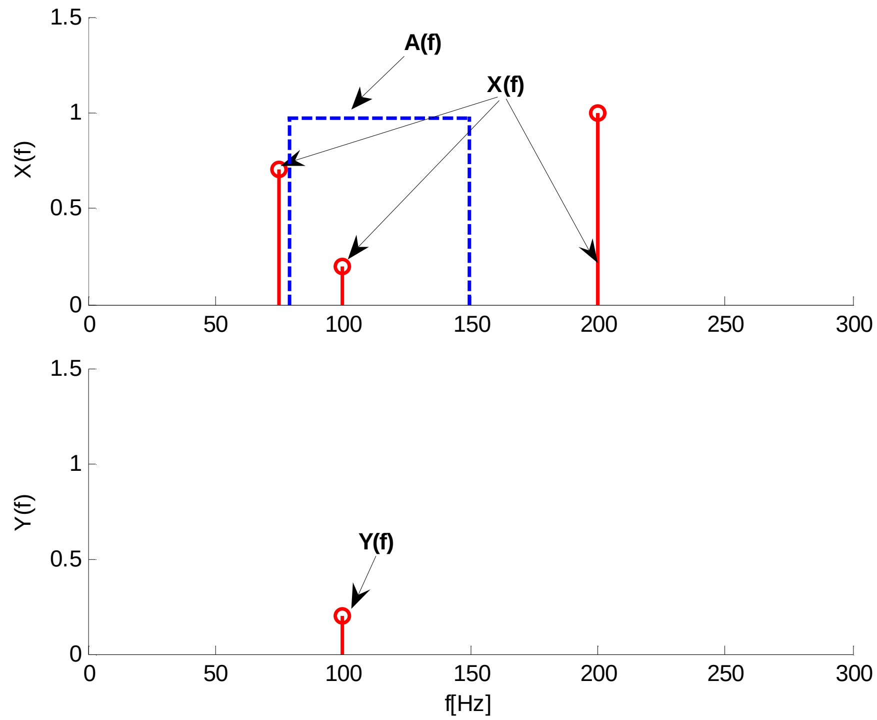
Idealni filtar propusnik opsega – primer

* **Primer sa prošlog časa**

  $x(t)=0.2*\cos(2\pi*100t)+\cos(2\pi*200t+\pi/2)+0.7*\cos(2\pi*75t+5\pi/4)$

* **Signal se filtrira kroz filtar propusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je A=1).**
  - **Na izlazu filtra pojavljuje se komponenta amplitude 0.2 na 100Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).**

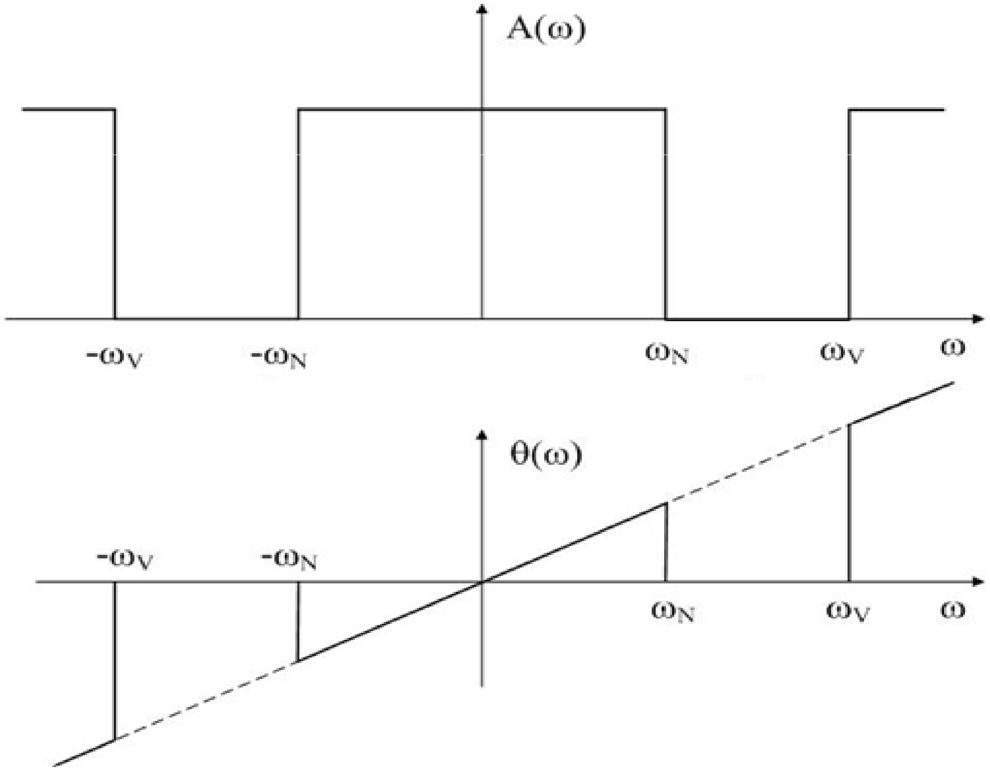




Filtar nepropusnik opsega učestanosti

*Filtar nepropusnik opsega učestanosti propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi u opsezima $(0, f_N)$ i (f_V, ∞) tj. kružnih graničnih učestanosti $(0, \omega_N)$ i (ω_V, ∞).

- Naziva se i NP(*noch pass filter*).
- Kada $\omega_N = \omega_V$, filtar postaje idealan sistem prenosa.



$$H(j\omega) = 0, \qquad |\omega| \le \omega_N$$

$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad \omega_N < |\omega| \le \omega_V$$

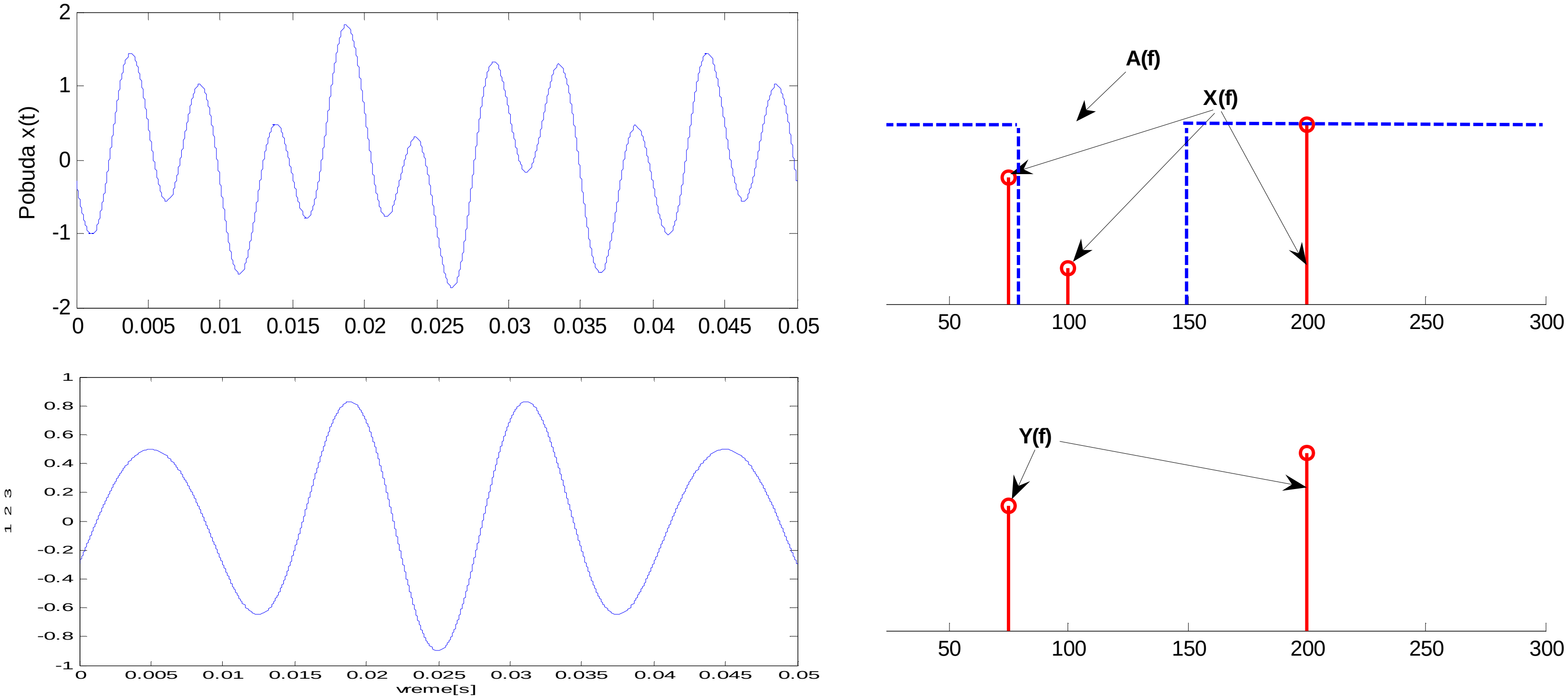
$$H(j\omega) = 0, \qquad |\omega| > \omega_V$$

Idealni filtar nepropusnik opsega – primer

* **Primer sa prošlog časa**

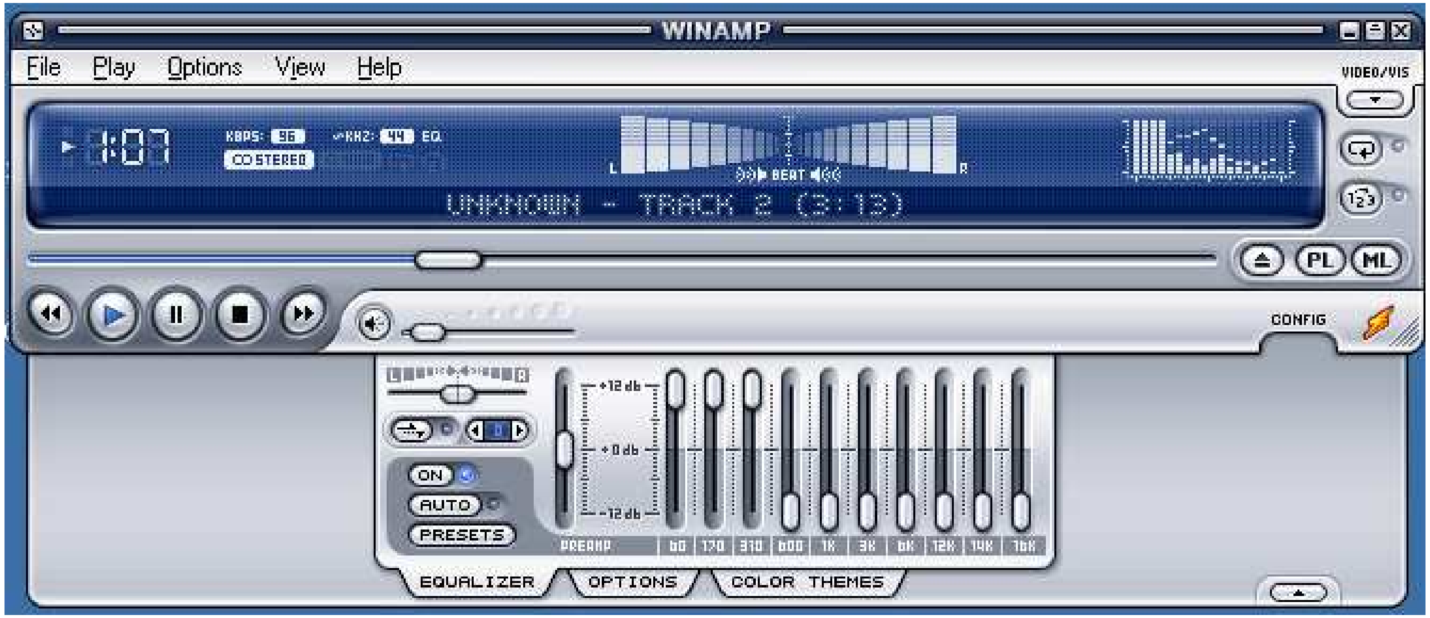
  $x(t)=0.2*\cos(2\pi*100t)+\cos(2\pi*200t+\pi/2)+0.7*\cos(2\pi*75t+5\pi/4)$

* **Signal se filtrira kroz filtar nepropusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je A=1).**
  - **Na izlazu filtra pojavljuju se dve komponenta na učestanostima 75Hz i 200Hz (komponenta na učestanosti 100Hz nije unutar propusnog opsega filtra).**



Ekvilajzeri – primer (Winamp)

* Cilj pojačati niske tonove a potisnuti visoke komponente u spektru (NF filtar).
* Svaki ekvilajzer zadužen za deo opsega (oko 60Hz, 170Hz, 310Hz, 600Hz, 1kHz,...).
    * U gornjem desnom uglu (desni klik na displej) izabrati *Oscilloscope* – na displeju je prikazan vremenski oblik signala, što su niži tonovi više pojačani, signal je više zaobljen.
    * U gornjem desnom uglu (desni klik na displej) izabrati *Spectrum analyzer* – na displeju je prikazan spektar signala –jasno se vidi efekat filtriranja audio signala.



Linearni sistemi - pregled

* **Najvažnije osobine:**
  - Odziv bilo kog sistema na Delta impuls je njegov impulsni odziv!
  - Furijeova transformacija impulsnog odziva je prenosna funkcija posmatranog sistema.
    - ***Spektar signala*** na izlazu sistema jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije sistema.
    - ***Signal (njegov vremenski oblik)*** na izlazu dobija se kao konvolucija signala na ulazu i impulsnog odziva sistema.
  - Filtar propušta samo neke komponente spektra signala na njegovom ulazu (dok ostale "odseca"):
    - ***NF filtar*** – propušta niske učestanosti;
    - ***VF filtar*** – propušta visoke učestanosti;
    - ***Propusnik opsega*** – propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;
    - ***Nepropusnik opsega*** – ne propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;