PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA
(SI2PMT)

Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2012/2013.

Zadatak 1: Binarno statističko kodovanje po Hafmenovom postupku (1)

* Posmatra se izvor koji emituje dva simbola sa sledećim verovatnoćama: $P(s_1)=0.7$, $P(s_2)=0.3$.

Izvršiti binarno statističko kodovanje (po Hafmenovom postupku) izvora informacija, njegovog drugog i trećeg proširenja. Odrediti efikasnost svakog od postupaka i uporediti rezultate sa postavkom Prve Šenonove teoreme.

* **Rešenje:**

  I Originalni izvor:

- Postupak statističkog kodovanja elemenata liste originalnog izvora:

s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.7	0
s_2	0.3	1

- Entropija originalnog izvora: $$H(s)=0.7\log_2\frac{1}{0.7}+0.3\log_2\frac{1}{0.3}=0.8813\ Sh/simb$$

- Srednja dužina kodne reči: $$L_{sr}=0.7*1+0.3*1=1\ bit/simb$$

- Efikasnost $$\eta=\frac{0.8813}{1}\cdot 100\%=88.13\%$$

Zadatak 1: Binarno statističko kodovanje po Hafmenovom postupku (2)

* **II Drugo proširenje:**
  - Postupak statističkog kodovanja elemenata liste II proširenja izvora:

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
$\sigma_1=s_1\ s_1$	0.49	1	σ_1	0.49	1	$\sigma_2\sigma_3\sigma_4$	0.51*****	0
$\sigma_2=s_1\ s_2$	0.21	01	$\sigma_3\sigma_4$	**0.30***	00	σ_1	0.49	1
$\sigma_3=\mathbf{s_2\ s_1}$	**0.21**	000	σ_2	**0.21**	01			
$\sigma_4=\mathbf{s_2\ s_2}$	**0.09**	001						

* **Kako je u pitanju izvor bez memorije, važi:**

$$H^2(s)=2H(s)=1.7626\ Sh/simb$$

* **Srednja dužina kodne reči**

$$L_{sr}=0.49*1+0.21*2+0.21*3+0.09*3=1.81\ bit/simb$$

* **Efikasnost**

$$\eta=\frac{1.7626}{1.81}\cdot 100\%=97.38\%$$

Zadatak 1: Binarno statističko kodovanje po Hafmenovom postupku (3)

III Treće proširenje: Postupak statističkog kodovanja elemenata liste III proširenja izvora:

s_i	$P(s_i)$	$\mathbf{x_i}$	S_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
$\sigma_1=s_1\ s_1s_1$	0.343	**00**	σ_1	0.343	**00**	σ_1	0.343	**00**	σ_1	0.343	**00**
$\sigma_2=s_1\ s_1s_2$	0.147	**11**	σ_2	0.147	**11**	σ_2	0.147	**11**	$*\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	**10**
$\sigma_3=s_1\ s_2s_1$	0.147	**010**	σ_3	0.147	**010**	σ_3	0.147	**010**	σ_2	0.147	**11**
$\sigma_4=s_1\ s_2s_2$	0.063	**1000**	σ_5	0.147	**011**	σ_5	0.147	**011**	σ_3	0.147	**010**
$\sigma_5=s_2s_1s_1$	0.147	**011**	$*\sigma_7\sigma_8$	0.090	**101**	$*\sigma_4\sigma_6$	0.126	**100**	σ_5	0.147	**011**
$\sigma_6=s_2\ s_1s_2$	0.063	**1001**	σ_4	0.063	**1000**	$\sigma_7\sigma_8$	0.090	**101**			
$\sigma_7=s_2\ s_2s_1$	0.063	**1010**	σ_6	0.063	**1001**						
$\sigma_8=s_2\ s_2s_2$	0.027	**1011**									

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
σ_1	0.343	**00**	$*\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	**1**	$*\sigma_1\sigma_3\sigma_5$	0.637	**0**
$*\sigma_3\sigma_5$	0.294	**01**	σ_1	0.343	**00**	$\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	**1**
$\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	**10**	$\sigma_3\sigma_5$	0.294	**01**			
σ_2	0.147	**11**						

Zadatak 1: Binarno statističko kodovanje po Hafmenovom postupku (4)

III Treće proširenje:

* **Kako je u pitanju izvor bez memorije, važi:**

$$H^2(s) = 3H(s) = 2.6439\ Sh/simb$$

* **Srednja dužina kodne reči**

$$L_{sr} = 2*(0.343+0.147)+3*(0.147+0.147)+4*(0.063+0.063+0.063+0.027) =$$
$$= 2*0.49+3*0.294+4*0.216 = 2.726\ bit/simb$$

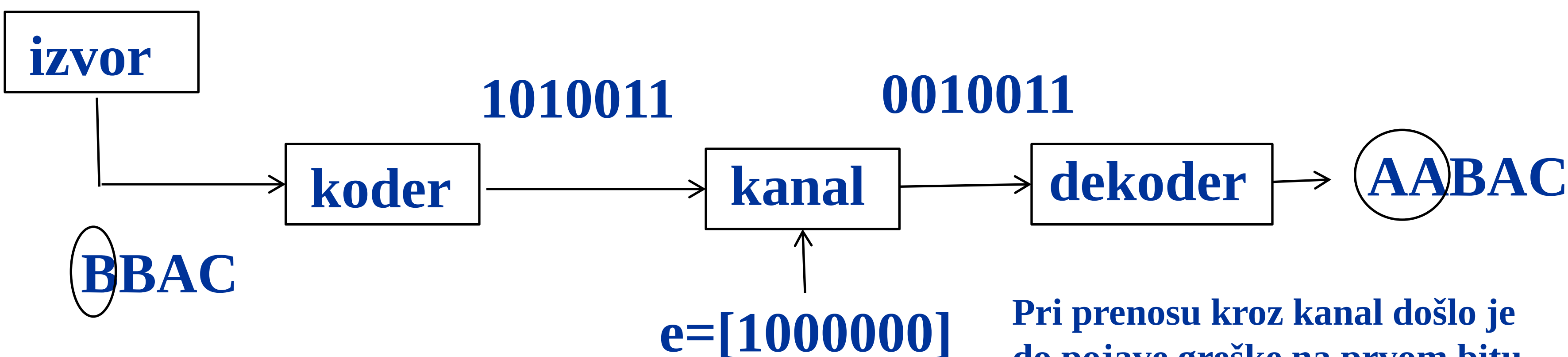
* **Efikasnost**

$$\eta = \frac{2.6439}{2.726}\cdot 100\% = 96.98\%$$

Primer: Propagacija greške pri kodovanju po Hafmenovom postupku

* Posmatra se izvor koji emituje simbole A, B i C sa sledećim verovatnoćama: P(A)=0.5, P(B)=0.25, P(C)=0.25
* Statističko kodovanje elemenata liste vrši se na sledeći način

s_i	$P(s_i)$	X_i
A	0.5	0
B	0.25	10
C	0.25	11



Pri prenosu kroz kanal došlo je do pojave greške na prvom bitu

* Greška u kanalu izazvala je grešku u dekodovanju na jednom simbolu i pojavu jednog simbola koji nije postojao na ulazu u koder

Zadatak 2: Hemingov kod (7, 4)

a) * **Primenom Heming (7,4) kodovati i dekodovati sekvencu 0101 ako pri prenosu nije bilo greške**

b) **Primenom Heming (7,4) kodovati i dekodovati sekvencu 1110 ako je pogrešno prenet 4. bit.**

c) **Primenom Heming (7,4) kodovati i dekodovati sekvencu 1110 ako je pogrešno preneti 4. i 5. bit. Komentarisati sindrome i dekodovanu sekvencu.**

Rešenje:

a) Proces kodovanja: i_1=0, i_2=1, i_3=0, i_4=1

$$k_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$k_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$k_1 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$c = [k_1 \; k_2 \; i_1 \; k_3 \; i_2 \; i_3 \; i_4] = [0\;1\;0\;0\;1\;0\;1]$$

1	00**1**	k_1	c_1
2	0**1**0	k_2	c_2
3	011	i_1	c_3
4	**1**00	k_3	c_4
5	101	i_2	c_5
6	110	i_3	c_6
7	111	i_4	c_7

Zadatak 2: Hemingov kod (7, 4)

Prenos kroz kanal:

$$c = [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]$$
$$e = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$
$$r = [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]$$

Proces dekodovanja:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$
$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$
$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$
$$S = [s_3 s_2 s_1] = [000] = 0 \ \Rightarrow \text{ prenos bez greške}$$
$$\hat{c} = c = [0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1] \Rightarrow \hat{i} = [0\ 1\ 0\ 1] = i$$

b) Poslata je sekvenca [1110] a pri prenosu pogrešno je prenet 4. bit

Proces kodovanja $\boldsymbol{i_1=1,\ i_2=1,\ i_3=1,\ i_4=0}$

$$k_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$k_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$k_1 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$c = [k_1\ k_2\ i_1\ k_3\ i_2\ i_3\ i_4] = [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

Zadatak 2: Hemingov kod (7, 4)

Prenos kroz kanal:

$$c = [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$
$$e = [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$$
$$r = [0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]$$

Proces dekodovanja:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$
$$S = [s_3 s_2 s_1] = [100] = 4 \ \Rightarrow \ \text{greška na 4. poziciji}$$
$$\hat{c} = c = [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0] \Rightarrow \hat{i} = [1\ 1\ 1\ 0] = i$$

c) Poslata je sekvenca [1110] a pri prenosu pogrešno je prenet 4. i 5. bit:

Prenos kroz kanal:

$$c = [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$
$$e = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$$
$$r = [0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]$$

Proces dekodovanja:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$
$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$S = [s_3 s_2 s_1] = [001] = 1 \ \Rightarrow \ \text{greška na 1. poziciji}$$
$$\hat{c} = c = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0] \Rightarrow \hat{i} = [1\ 0\ 1\ 0] \neq i$$

* **Verovatnoća da se desi jedna greška ako je *p*=BER=10^{-3}:**

$$P_{e1} = \binom{7}{1} p(1-p)^6 \approx \frac{7!}{1!6!}(10^{-3}) = 7 \cdot 10^{-3}$$

* **Verovatnoća da se dese dve greške:**

$$P_{e2} = \binom{7}{2} p^2(1-p)^5 \approx \frac{7!}{2!5!}(10^{-3})^2 = 2.1 \cdot 10^{-5}$$

Zadatak 3: Hemingov kod (8, 4)

* U cilju zaštite pri prenosu podataka primenjen je Hemingov kod (8,4) za detekciju dve i korekciju jedne greške.
a) Objasniti konstrukciju koda.
b) Dobijenim kodom dekodovati sekvence 00111101 i 00110101.

* REŠENJE:
Konstrukcija je ista kao kod Hemingovog (7,4) koda, samo se dodaje još jedna provera na parnost, tj. četvrti kontrolni bit.

$$k_4 = \sum_{i=1}^{7} c_i, \quad c = \left[k_1 \ k_2 \ i_1 \ k_3 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ k_4 \right]$$

* Na strani prijema, određuje se još jedna kontrolna suma: $s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i$

* U slučaju da je ovaj rezultat jednak jedinici, pri prenosu je bio neparan broj grešaka, ako je ravan nuli pri prenosu je bio paran broj grešaka. Sindrom koji pokazuje potencijalnu poziciju greške i dalje se formira pomoću prva tri bita prijemnih kontrolnih suma.

Zadatak 3: Hemingov kod (8, 4)

* **Ako se posmatra r=00111101, tada je kontrolna suma:**

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

* **Sindrom je** $S = [s_3 \ s_2 \ s_1] = [1 \ 0 \ 0] = 4$

* **Pošto je s_4=1, postojao je neparan broj grešaka pri prenosu (na prvih sedam pozicija!), tj. jedna, tri, pet ili sedam grešaka. Za BER=10^{-3} verovatnoće da se ovo desi su, respektivno:**

$$P_{e1} = \binom{7}{1} p(1-p)^6 \approx 7 \cdot 10^{-3}, \ P_{e3} = \binom{7}{3} p^3(1-p)^4 \approx 3.5 \cdot 10^{-8}, \ P_{e5} = \binom{7}{5} p^5(1-p)^2 \approx 2.1 \cdot 10^{-14}, \ P_{e7} = \binom{7}{7} p^7 \approx 1 \cdot 10^{-21}$$

* **U skladu sa određenim verovatnoćama, logična pretpostavka je da se desila jedna greška i to baš na 4. poziciji na koju pokazuje sindrom. Primljena reč se zato koriguje i iz nje "izvuče" informacija.**

$$c = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \ \Rightarrow \ i = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Zadatak 3: Hemingov kod (8, 4)

b) Ako se posmatra r=00110101, tada je kontrolna suma:

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Sada je jasno da je sindrom $S = [s_3 s_2 s_1] = [001] = 1$

Kako je s_4=0, postojao je paran broj grešaka pri prenosu koji se ne može ispraviti.

***Mana ovoga koda je njegova nesposobnost da koriguje (ili bar detektuje) trostruke, petostruke i sedmostruke greške, pa je rezidualna verovatnoća greške (ona koju vidi korisnik) jednaka:**

$$P_e = \binom{7}{3} p^3 (1-p)^4 + \binom{7}{5} p^5 (1-p)^2 + \binom{7}{7} p^7$$

***Za verovatnoću greške po bitu u kanalu od *p*=10^{-3}, korisnik vidi** $P_e \approx 3.5 \cdot 10^{-8}$

Ako se greška javi samo na bitu parnosti (javlja se sa verovatnoćom *p*=10^{-3}), može se uspešno korigovati jer je tada S=[000]=0 a s_4=1.

*

Zadatak 4: Hemingov kod (15, 11)

a) Izvršiti kodovanje sekvence 10101010101 kodom (15,11) i izvršiti dekodovanje odgovarajuće primljene reči ako je pri prenosu deveti bit pogrešno primljen. Koliko grešaka može da koriguje a koliko da detektuje ovaj kod?

b) Kako treba modifikovati kod da bi mogao i da detektuje dve greške.

<u>REŠENJE</u>:

a) Pošto je dužina kodne reči ovog koda *n*=15, prvi veći stepen broja dva je 2^4=16, pa se kod konstruiše pomoću četiri kolone i ima četiri kontrolna bita (*n*-*k*=15-11=4).
Kod se formira na osnovu tabele.

1	000**<u>1</u>**	k_1	c_1
2	00**<u>1</u>**0	k_2	c_2
3	0011	i_1	c_3
4	0**<u>1</u>**00	k_3	c_4
5	0101	i_2	c_5
6	0110	i_3	c_6
7	0111	i_4	c_7
8	**<u>1</u>**000	k_4	c_8
9	1001	i_5	c_9
10	1010	i_6	c_{10}
11	1011	i_7	c_{11}
12	1100	i_8	c_{12}
13	1101	i_9	c_{13}
14	1110	i_{10}	c_{14}
15	1111	i_{11}	c_{15}

*

Zadatak 4: Hemingov kod (15, 11)

Proces kodovanja

$$i = [\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$

$$k_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 \oplus c_9 \oplus c_{11} \oplus c_{13} \oplus c_{15} =$$
$$= i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 \oplus i_9 \oplus i_{11} = 1$$

$$k_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{14} \oplus c_{15} =$$
$$= i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 0$$

$$k_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{14} \oplus c_{15} =$$
$$= i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 1$$

$$k_4 = c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{14} \oplus c_{15} =$$
$$= i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 0$$

$$c = [\ k_1\ k_2\ i_1\ k_3\ i_2\ i_3\ i_4\ k_4\ i_5\ i_6\ i_7\ i_8\ i_9\ i_{10}\ i_{11}\ ] =$$
$$= [\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$

Proces dekodovanja

$$r = [\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} \oplus r_{13} \oplus r_{15} = 1$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 0$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 0$$

$$s_4 = r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 1$$

$$S = [s_4 s_3 s_2 s_1] = [1001] = 9$$

$$\hat{c} = [\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$

$$\hat{i} = [\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$

Na ovaj način otkrivena je i korigovana greška koja se javila na 9. bitu kodne reči. Informacija je ispravno preneta.
Ako želimo da kod detektuje dve greške, potrebno je da se doda i bit parnosti, tj. još jedan kontrolni bit, na 16. poziciji kodne reči. Kod tada postaje (*n*, *k*) = (16,12) a nove kontrolne sume u koderu i dekoderu formiraju se na sledeći način:

$$c_{16} = k_5 = \sum_{i=1}^{15} c_i, \quad s_5 = \sum_{i=1}^{16} r_i, \quad r = c \oplus e$$