ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА

Δ Нека је ф-ја f дефинисана на произвољном интервалу I (затворен, отворен, полуотворен) и постоји F таква да за свако $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Каже се да је $F(x)$ **ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА** ф-је $f(x)$ на I. Ако је $F(x)$ примитивна ф-ја функције $f(x)$ онда је то и $F(x)+c$ ($c \in R$ произвољна константа)
Класа примитивних ф-ја $F(x)+c$ биће означена са

$$F(x)+c = \int f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x)$$

$$d\int f(x)\,dx = dF(x) = f(x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

ОПШТЕ МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

I ТАБЛИЦА ОСНОВНИХ ИНТЕГРАЛА

1) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|, \quad x \neq 0$

3) $\int e^{x}\,dx = e^{x}$

4) $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a}, \quad a>0, a\neq 1$

5) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arctg} x \end{cases}$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \end{cases} \quad |x|<1$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm 1}| = \begin{cases} \operatorname{arcsh} x \text{ за } + \\ \operatorname{arcch} x \text{ за } - \text{ и } x>1 \end{cases}$

8) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} \operatorname{arcth} x, & |x|<1 \\ \operatorname{arccth} x, & |x|>1 \end{cases}$

9) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

10) $\int \cos x\,dx = \sin x$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$

13) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$

14) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$

15) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x$

16) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x$

II ЛИНЕАРНОСТ

Т Ако ф-је f и g имају примитивну функцију на I тада ф-ја $\alpha f(x)+\beta g(x)$ има примитивну ф-ју на I и важи:

$$\underbrace{\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx}_{L}=\underbrace{\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx}_{D}$$

доказ

dD
$$d\left[\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx\right]=\alpha\cdot d\int f(x)dx+\beta\cdot d\int g(x)dx=(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$$
dL

III СМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ

Т Ако су на I ф-је f, φ и φ' непрекидне и ако функција $x=\varphi(t)$ има инверзну ф-ју $t=\varphi^{-1}(x)$ и притом важи $\varphi'(t)\neq 0$ на I, тада је

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,\quad t=\varphi^{-1}(x)$$

доказ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\frac{dt}{dt}\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=$$
$$=\frac{1}{\cancel{\varphi'(t)}}f(\overset{x}{\varphi(t)})\cancel{\varphi'(t)}=f(x)$$

IV ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

$$d(uv)=udv+vdu$$
$$uv=\int udv+\int vdu$$
$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

V СВОЂЕЊЕ (КАНО) КВАДРАТНОГ ТРИНОМА НА КАНОНСКИ ОБЛИК

$$\int\frac{dx}{1+x^2},\ \int\frac{dx}{1-x^2},\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}$$
$$\int\sqrt{1-x^2}dx,\ \int\sqrt{x^2-1}dx,\ \int\sqrt{x^2+1}dx$$

$x=\operatorname{ch}t$ $\quad \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$ $\quad x=\operatorname{sh}t$

VI МЕТОДА НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА

VII ИНТЕГРАЦИЈА ПОМОЋУ РЕКУРЕНТНИХ ФОРМУЛА

$$I(n)=F(I(n-1))$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx=I_{n-1}-\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}\ \ldots=I_{n-1}-\frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(1-x^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}$$

ПОСЕБНЕ МЕТОДЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

I ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad P$ и Q полиноми; $dg P\geq dg Q$ (неправа р. ф-ја) $\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$

Посматрајмо случај $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $dgP<dgQ$ (права рационална ф-ја)

Ф-ја f се разлаже на парцијалне разломке

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c \quad k=2,3,4,\dots$

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx$ (тј. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ $\quad b^2-4ac<0$) $= A\int\frac{x\,dx}{x^2+1} + B\int\frac{dx}{x^2+1}$ $\quad t = x^2+1$ ТАБЛИЧНИ СЛУЧАЈ

ово је шира класа али због једноставности треба прво свести на ①

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+1)^k}$ $\quad k=2,3,4,\dots$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+1)^k}dx = A\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^k} + B\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^k}dx = \int\frac{\frac{A}{2}dt}{t^k} + B\int\frac{dx}{(1+x^2)^{k-1}} - B\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^k}$$

$t = 1+x^2$

II ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ Ф-ЈА

1) Ако је $\int R(x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2},\dots,x^{p_n/q_n})dx$ где је R рационална ф-ја, а p_i и q_i цели бројеви, уводи се смена $x=t^q$ где је $q = НЗС(q_1,q_2,\dots,q_n)$

Уопштење: ако се уместо x појави $ax+b$ или $\frac{ax+b}{cx+d}$ исто смена $ax+b=t^q$; $\frac{ax+b}{cx+d}=t^q$

2) Ојлерове смене

Ако је $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где је R рационална ф-ја своди се на рационалну ф-ју на следећи начин:

1) за $a>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$
2) за $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm\sqrt{c}$
3) Ако су нуле квадратног тринома x_1 и x_2 реалне и различите $a(x-x_1)=(x-x_2)t^2$ тј. $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$

За $a<0$ и ако нема реалне различите нуле онда је корен недефинисан

3) Интеграл биномног диференцијала $\int x^m(a+bx^n)^p dx$; $m,n,p\in R$

1° $p\in Z$
а) $p\in N$: биномна формула
б) $p<0$: своди се на II 1)

2° $p\notin Z$, $\frac{m+1}{n} = q$
а) $q\in Z$ $\quad a+bx^n=t^r$ где је r именилац разломка p
б) $q\notin Z$ $\quad p+q\in Z$ уводи се смена $\frac{a}{x^n}+b=t^r$ где је r именилац разломка p

3° **У ОСТАЛИМ СЛУЧАЈЕВИМА ИНТЕГРАЛ ЈЕ НЕРЕШИВ!**

III ИНТЕГРАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

1) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ где је R рационална функција
смена: $\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

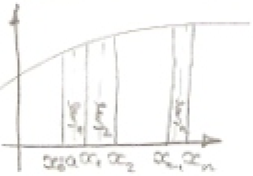
2) $\int R(tg x)dx$; смена $\boxed{tg x = t}$ $\quad \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt$ $\quad dx = \frac{1}{1+t^2}dx$

3) $R(\sin x,\cos x) = R(-\sin x,-\cos x)$ тј. ако је R парна по $\sin x$, $\cos x$ уводи се смена $\boxed{tg x = t}$

4) $R(\sin x,\cos x) = -R(-\sin x,\cos x)$; $\boxed{\cos x = t}$
(непарна по $\sin x$)

5) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ смена $\boxed{\sin x = t}$
(непарна по $\cos x$)

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ



ПОДЕЛА d одсечка $[a,b]$ $d = (x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$
$x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Д РИМАНОВА (ИНТЕГРАЛНА) СУМА ф-је R на $[a,b]$ је
$$S(f, d, a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Д НОРМА дате поделе d је $\|d\| = \max_{0 \le i \le n-1}(x_{i+1} - x_i)$

! **Д** Нека је ф-ја f дефинисана на $[a,b]$. Ако $(\exists I \in R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall d)(\|d\| < \delta \Rightarrow |S(f,d,a,b) - I| < \varepsilon)$ тада се I назива **ОДРЕЂЕН (РИМАНОВ) ИНТЕГРАЛ** ф-је f на $[a,b]$ и пише се:
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

! **Д** За ф-ју f која има Риманов интеграл каже се да је **ИНТЕГРАБИЛНА** на $[a,b]$. ! $\lim_{\|d\| \to 0} S(f,d,a,b) = I$!

Т Свака ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$ ограничена је на $[a,b]$.

Д Нека је ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$. Ако одсечак $[a,b]$ поделимо на $x_0, x_1, \dots, x_n$ (подела d) и формирамо суме:
$$\underline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$
$$\overline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$
где су m_i и M_i infinum тј. supremum ф-је f на $[x_i, x_{i+1}]$. $\underline{S}$ и $\overline{S}$ су **ДОЊА** и **ГОРЊА ДАРБУОВА СУМА** ф-је f на $[a,b]$.

! **Т** Ограничена ф-ја је интеграбилна на $[a,b]$ ако и само ако је
$$\lim_{\|d\| \to 0}(\overline{S}(f,d,a,b) - \underline{S}(f,d,a,b)) = \lim_{\|d\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$$
$$M_i > m_i \quad \sup[x_{i+1} - x_i] > \inf[x_{i+1} - x_i], \quad x_{i+1} > x_i$$

Т Ако је f непрекидна на $[a,b]$ онда је и интеграбилна на $[a,b]$.

доказ

f непрекидна на $[x_i, x_{i+1}]$ за $\forall i \Rightarrow$ по Вајерштрасовој теореми $m_i = f(u_i)$, $M_i = f(v_i)$ $u_i, v_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Такође по Канторовој теореми $f(x)$ је униформно непрекидна на $[a,b]$; $(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1))(|u_i - v_i| < \delta_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(u_i) - f(v_i)| < \varepsilon_1)$ за свако i; изаберемо $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{b-a}$ и поделу d тако да је $\|d\| < \varepsilon_1$.
$\lim_{\|d\| \to 0}(\overline{S} - \underline{S})$?
$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(f(v_i) - f(u_i))(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) =$$
$$= \varepsilon_1(b-a) = \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{\|d\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$$

Т Ако је ф-ја f дефинисана и ограничена на $[a,b]$ и на њену има коначно много прекида, онда је а интеграбилна на $[a,b]$.
Т Ако је ф-ја f дефинисана и ограничена на $[a,b]$ и на њену има пребројиво много прекида, онда је и интеграбилна на $[a,b]$
Т Ако је ф-ја f дефинисана и монотона на $[a,b]$ онда је и интеграбилна на $[a,b]$

ОСОБИНЕ РИМАНОВОГ ИНТЕГРАЛА

Т $\int_a^a f(x)dx = 0$

Т $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
$b = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = a$

код другог интеграла мења се знак суме

Т Ако су f и g интеграбилне на $[a,b]$, интеграбилна је и ф-ја $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, α, β - константе и важи

ЛИНЕАРНОСТ

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

доказ Заснива се на линеарности суме

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))(x_{i+1} - x_i) =$$
$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Т Ако је ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$ тада је интеграбилна и ф-ја $g(x) = |f(x)|$ и важи

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Ово је последица особине суме $\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$

Т Ако је $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ и ако је ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$, интеграбилна је и на $[\alpha, \beta]$

доказ

$\lim_{\|d\| \to 0} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$ ако је овај лимес нула на $[a,b]$, при том су α, β деоне тачке, онда се у суми примењеној на $[\alpha, \beta]$ појављује део сабирака $\Rightarrow$ лимес је опет нула.

Т $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ за сваку тачку c за коју ти интервали постоје

Т Ако је $f(x) = g(x)$ за свако $x \in [a,b]$ осим у коначно много тачака и ако је једна од ових ф-ја интеграбилна на $[a,b]$, интеграбилна је и друга и важи:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Т Нека је ф-ја f интеграбилна на одсечку $[a,b]$ тада је
1° $(\forall x \in [a,b])(f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0)$
2° $(\forall x \in [a,b])(f(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0)$

(П) Нека су f и g интеграбилне на $[a,b]$, тада:

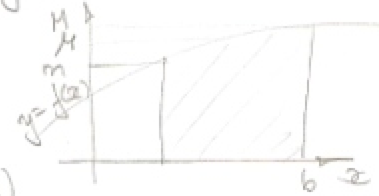
1° $(\forall x\in[a,b])(f(x)\le g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx)$

2° исто за $<$

(Т) СТАВ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

Нека је ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$ и нека је $(\forall x\in[a,b])$
$m\le f(x)\le M$ $\quad m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ $\quad M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ тада

$$\exists \mu\in[m,M] \qquad \int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$$



Ако је још и непрекидна, тада:

$$(\exists c\in[a,b])\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

доказ

$$m\le f(x)\le M \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\mu} \le M \Rightarrow \mu(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

Ако је $f(x)$ непрекидна тада за $(\forall\mu\in[m,M])(\exists c\in[a,b])\ \mu=f(c)$

(Д) СРЕДЊА ВРЕДНОСТ Ф-ЈЕ f на $[a,b]$ је $f_s=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ, ВЕЗА ИЗМЕЂУ ОДРЕЂЕНОГ И НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

(Т) Нека је f интеграбилна на $[a,b]$ и нека је за $x\in[a,b]$:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

1° ф-ја $F(x)$ непрекидна је на $[a,b]$

2° ако је и f непрекидна на $[a,b]$ тада је F примитивна ф-ја f на $[a,b]$

доказ $x\in[a,b]$, Δx довољно мало тако да је $\Delta x+x\in[a,b]$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu\Delta x \qquad m\le\mu\le M$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to0}(F(x+\Delta x)-F(x)) = \mu\Delta x \to 0 \Rightarrow$ F је непрекидна на $[a,b]$

Ако је f непрекидна $\Rightarrow \mu=f(c)$, $c\in(x,x+\Delta x)$ тј $c=x+\theta\Delta x \quad 0<\theta<$

$F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\theta\Delta x)\Delta x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\Delta x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \lim_{\Delta x\to0} f(x+\theta\Delta x)=$$

$$= f\left(\lim_{\Delta x\to 0}(x+\theta\Delta x)\right) = f(x)$$

$F(x)=\int_a^b f(t)\,dt$ – јесте примитивна ф-ја $f(x)$

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c$ јесу све примитивне ф-је од $f(x)$

За фиксирано c:

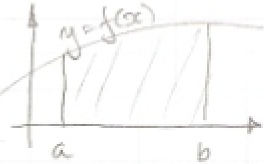
$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt + c \Rightarrow F(a)=c$$

ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ПРИМЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

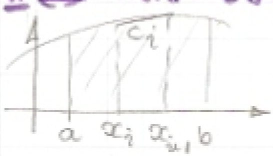
I ЗАПРЕМИНА ОБРТНОГ ТЕЛА



$$V=\lim_{\|d\|\to 0}\pi\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i))^2(x_{i+1}-x_i)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$\mathbf{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

II ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ



Нека је f диференцијабилна на $[a,b]$ и нека је $f'(x)$ непрекидна

$$c_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}=$$

$$=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(x_{i+1}-x_i)^2(f'(\xi_i))^2}=(x_{i+1}-x_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}$$

$$\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,(x_{i+1}-x_i)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$ где је

$x=\varphi(t)$ $\quad y=\psi(t)$ $\quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\mathbf{l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

III ПОВРШИНА ОБРТНОГ ТЕЛА $\quad \mathbf{P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

△ Нека је интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx \overset{\text{деф}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \overset{\text{деф}}{=}\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ако на десној страни постоји одговарајући интеграл за свако b односно за свако a, интеграбилна на левој страни назива се **НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ** ф-је f са бесконачним границама. Ако је одговарајући лимес коначан, несвојствени интеграл је **КОНВЕРГЕНТАН**. У противном је **ДИВЕРГЕНТАН**.

△ Ако је ф-ја f интеграбилна на сваком одсечку $[a, b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ и неограничена у околини тачке b тада је $\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{деф}}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$. Ако је лимес коначан интеграл је конвергентан у супротном је дивергентан.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1 Δ Једначина $F(x,y,y',y'',\dots y^{(n)})=0$ где је y непозната, n-пута диференцијабилна функција независне променљиве x зове се **ОБИЧНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА n-ТОГ РЕДА**

Задатак: одредити непознату ф-ју (не број!!!)

2 Δ Решење ДЈ јесте свака ф-ја $y(x)$ која дату ј-ну претвара у идентитет.

3 Δ **ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ДЈ** n-тог реда је свака ф-ја дата са $G(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$ где су $C_1,C_2,\dots,C_n$ произвољне константе такве да важи: 1) $y(x)$ је решење ДЈ
2) дата ДЈ се може добити из $G(x,y,C_1,\dots,C_n)=0$

4 Δ **ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ ДЈ** је решење које је обухваћено општим решењем (тј. може да се добије из општег решења за конкретне вредности константи)

5 Δ **СИНГУЛАРНО РЕШЕЊЕ ДЈ** је решење које није обухваћено општим.

6 Δ Партикуларно решење ДЈ n-тог реда које задовољава услове:

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{array}\right\} (*)$$

назива се **КОШИЈЕВО РЕШЕЊЕ** за почетне услове (*). Услови (*) зову се **КОШИЈЕВИ УСЛОВИ**

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ Ј-НЕ I РЕДА

I ДЈ КОЈА РАЗДВАЈА ПРОМЕНЉИВЕ $f(x)dx+g(y)dy=0$

Решава се директном интеграцијом $\int f(x)dx+\int g(y)dy=C$

II $y'=g(ax+by)$

уводи смена $ax+by=z \quad z=z(x)$

$$\Downarrow$$

$$a+by'=z' \quad a+b\cdot g(z)=z' \ \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$dx=\frac{dz}{a+bg(z)}$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{a+bg(z)}$$

III ХОМОГЕНА ДЈ $y'=f\left(\frac{x}{y}\right)$

1) $f(t)=t$

$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$

ДЈ I

2) $f(t)\neq t$

смена $\frac{y}{x}=z$

IV $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ $\quad a_i^2+b_i^2 \neq 0$

1) $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ III ХОМОГЕНА ДЈ
2) $a_1 = a_2 = 0$ или $b_1 = b_2 \Rightarrow$ Ј-НА КОЈА РАЗДВАЈА ПРОМЕНЉИВЕ
3) $c_1^2+c_2^2 \neq 0$; $a_1^2+a_2^2 \neq 0$; $b_1^2+b_2^2 \neq 0$

a) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \quad z = a_1x+b_1y$$

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right) \rightarrow \text{раздваја променљиве}$$

б) $D \neq 0$ смена $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$

$$v' = f\left(\frac{a_1(u+\alpha)+b_1(v+\beta)+c_1}{a_2(u+\alpha)+b_2(v+\beta)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u+b_1v+\underbrace{c_1+a_1\alpha+b_1\beta}_{=0}}{a_2u+b_2v+\underbrace{c_2+a_2\alpha+b_2\beta}_{=0}}\right)$$

$$v' = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right) \Rightarrow \text{ХОМОГЕНА ДЈ}$$

V ЛИНЕАРНА ДЈ $\quad y'+P(x)y = Q(x)$

– $Q(x) = 0 \rightarrow$ ЛИНЕАРНА ХОМОГЕНА ДЈ $\quad y'+P(x)y = 0$

$$y' = -P(x)y$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + C \qquad \boxed{y = c_1 e^{-\int P(x)dx}}$$

$$|y| = e^{-\int P(x)dx}\, e^{C} = c_1$$

– $Q(x) \neq 0 \rightarrow$ ЛИНЕАРНА НЕХОМОГЕНА ДЈ $\quad y'+P(x)y = Q(x)$

$$y'+P(x)y = Q(x) \;/\; e^{\int P(x)dx}$$

$$\left(y e^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} \qquad \left(y\cdot e^{\int P(x)dx}\right)' = y' e^{\int P(x)dx} + y\cdot e^{\int P(x)dx}\underbrace{\frac{d}{dx}\int P(x)dx}_{P(x)}$$

$$y\cdot e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx}dx\right]}$$

VI БЕРНУЛИЈЕВА ДЈ $\quad y'+P(x)y = y^m Q(x)$ $\quad m\neq 0, m\neq 1, m\in R$

своди се на линеарну ДЈ сменом $z = y^{1-m}$ $\quad z = z(x) \Rightarrow z' = (1-m)y'y^{-m}$

ДЈ постаје

$$\frac{y'}{y^m} + \frac{P(x)}{y^{m-1}} = Q(x) \Rightarrow \frac{z'}{1-m} + P(x)z = Q(x)$$

$$z = e^{-\int(1-m)P(x)dx}\left[C + \int(1-m)Q(x)e^{\int(1-m)P(x)dx}dx\right]$$

VII РИКАТИЈЕВА ДЈ $\quad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

$P\neq 0$; $R \neq 0$

У општем случају не може се решити помоћу квадратура. Ако је познато једно њено партикуларно решење y_p сменом $y = y_p + \frac{1}{z}$, $z = z(x)$ своди се на линеарну ДЈ

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

$$\left(y = y_p + \tfrac{1}{z}\right)' \Rightarrow y' = y_p' - \frac{z'}{z^2}$$

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$$z' + (2y_pP(x) + Q(x))z = -P(x) \rightarrow \text{ЛИНЕАРНА ДЈ}$$

ДЈ ВИШЕГ РЕДА

НЕКЕ ДЈ ДРУГОГ РЕДА

I $F(x,y',y'')=0$ смена $y'=t$ $(t=t(x)) \Rightarrow y''=t'$

$F(x,t,t')=0$

II $F(y,y',y'')=0$ нека је сада y независно променљива
смена $y'=t$, $t=t(y)$ $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dy}=t't$

$F(y,t,t't)=0$

ЛИНЕАРНЕ ДЈ ВИШЕГ РЕДА

7 (Д) **ЛИНЕАРНА ХОМОГЕНА ДЈ** $y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\dots+f_{n-1}(x)y'+f_n(x)y=0$ $(L^n(y))$
$y(x)=0$ увек је решење овакве ДЈ $L^n(y)=0$
Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења ДЈ тада и $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ јесте решење дате ДЈ

8 (Д) Функције $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ дефинисане на интервалу I су **ЛИНЕАРНО ЗАВИСНЕ НА I** ако постоје $k_1,k_2,\dots,k_n$ такве да $k_1^2+k_2^2+\dots+k_n^2\neq0$ и да је $(\forall x\in I)$ $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\dots+k_ny_n(x)=0$. У противном су **ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНЕ**.

9 (Д) Нека су $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ решења једначине $L^n(y)=0$. Детерминанта

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n;x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

назива се детерминанта **ВРОНСКОГ** (Вронскијан)

1 (Т) Нека су $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ решења ј-не $L^n(y)=0$. Тада је или
1) $(\forall x\in I)$ $W(y_1,y_2,\dots,y_n;x)\neq0$ и ј-је $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ су линеарно независне или
2) $(\forall x\in I)$ $W(y_1,\dots,y_n;x)=0$ и ј-је $y_1(x),\dots,y_n(x)$ су линеарно зависно.

НАПОМЕНА У случају $n=2$ линеарно независна једначина се своди на $y_1/y_2\neq const$

2 (Т) Ако су $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ решења једначине $L^n(y)=0$ и ако су функције $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ линеарно независне тада је опште решење дате ј-не $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)$ (c_i - константе)

ЛИНЕАРНА ХОМОГЕНА ДЈ ДРУГОГ РЕДА $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

3 (Т) ЛИВИЛОВА ФОРМУЛА
Ако је $y_1(x)$ једно нетривијално партикуларно решење линеарне ДЈ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ тада је

$$y_2(x)=y(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$$

такође партикуларно решење дате ј-не, линеарно независно од y_1.

Доказ

$y_1(x)$ дато партикуларно решење $\Rightarrow$

$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ смена $y = y_1 z$, $z = z(x)$

$\Rightarrow y' = y_1' z + z' y_1$

$y'' = y_1'' z + y_1' z' + z'' y_1 + z' y_1' = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z''$

ДЈ постаје

$$\underbrace{y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + p(x) y_1' z + p(x) y_1 z' + q(x) y_1 z}_{=0} =$$

$$= y_1 z'' + z'(2y_1' + p(x)y_1) = 0 \quad / : y_1$$

$$z'' + z'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right) = 0 \quad \text{ЛДЈ I реда по } z'(x)$$

$t = z'$ $\quad t' + t\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right) = 0 \Rightarrow$

$$t = c e^{-2\int\left[\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right]dx} = c e^{-2\int \frac{y_1'}{y_1}dx} \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$t = c e^{-2\ln|y_1| - \int p(x)dx} = c \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

$$z' = t \Rightarrow z = \int c \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx + c_1$$

$$y = y_1 z = c\, y_1 \underbrace{\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx}_{y_2(x)} + c_1 y_1$$

$$y = A y_1(x) + B y_2(x)$$

ЛИНЕАРНА НЕХОМОГЕНА Ј-НА $L^n(y) = F(x)$

4 **Т** Нека је y_h опште решење хомогене ј-не $L^n(y) = 0$ и y_p једно партикуларно решење нехомогене ј-не $L^n(y) = F(x)$. Тада је опште решење нехомогене једначине $L^n(y) = F(x)$ дато са: $y = y_h + y_p$.

5 **Т** МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

Нека је $y_h = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ опште решење једначине $L^n(y) = 0$. Тада је опште решење нехомогене ј-не $L^n(y) = F(x)$ дато са $y = d_1(x) y_1(x) + \dots + d_n(x) y_n(x)$ где су $d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)$ функције чији се изводи налазе решавањем система ј-на

$$d_1'(x) y_1(x) + d_2'(x) y_2(x) + \dots + d_n'(x) y_n(x) = 0$$
$$d_1'(x) y_1'(x) + d_2'(x) y_2'(x) + \dots + d_n'(x) y_n'(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$d_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + d_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + d_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = F(x)$$

а затим се $d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)$ налазе интеграцијом.

Доказ Т4

$y_h^{(n)} + f_1 y_h^{(n-1)} + \dots + f_n y_h = 0$ јер је y_h решење $L^n(y) = 0$

$y_p^{(n)} + f_1 y_p^{(n-1)} + \dots + f_n y_p = F(x)$ јер је y_p партикуларно реш. $L^n(y) = F(x)$

$$\underbrace{(y_h + y_p)}_{y}^{(n)} + f_1 (y_p + y_h)^{(n-1)} + \dots + f_n (y_h + y_p) = F(x)$$

ЛИНЕАРНА ДЈ СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

I ХОМОГЕНА Ј-НА

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y = 0 \;(*)$$

Тражи се партикуларно решење у облику $\boxed{y = e^{\lambda x}}$

Заменом у једначину добија се: $e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n) = 0$

10 Д Алгебарска ј-на $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ зове се **КАРАКТЕРИСТИЧНА Ј-НА** ДЈ (*)'.

6 Т Карактеристична једначина има n корена и сваком корену одговара по 1 партикуларно решење по следећим правилима:

1) Сваком простом реалном корену λ одговара једно партикуларно решење $y_p = e^{\lambda x}$
2) Сваком реалном корену λ реда $k > 1$ одговара k партикуларних решења $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
3) Сваком пару простих комплексних корена $\alpha \pm i\beta$ одговара пар $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$
4) Сваком пару $\alpha \pm i\beta$ реда $k > 1$ одговара скуп
$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Применом 1)–4) на све корене карактеристичне једначине добија се скуп од n линеарно независних решења $y_1, y_2, \dots, y_n$ па је опште решење (*)' $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$

II НЕХОМОГЕНА Ј-НА

Решавање нехомогене ј-не састоји се из два корака:

1. корак: Реши се хомогена ј-на (тј. одреди се y_h)
2. корак: Одређује се опште решење нехомогене ј-не методом варијације константи. Када је $F(x)$ специјалног облика може се методом неодређених коефицијената одредити и партикуларно решење y_p нехомогене ј-не па је $y = y_h + y_p$

МЕТОД НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА

Ради ако је $F(x)$ облика:

1. $F(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$ (P_m – полином степена m)
   а) α није корен карактеристичне ј-не $y_p = e^{\alpha x}Q_m(x)$
   б) α јесте корен реда $k \geq 1$ $y_p = x^k e^{\alpha x}Q_m(x)$
   Коефицијенти $Q_m(x)$ одређују се заменом y_p у једначину (нехомогену) методом неодређених коеф.

2. $F(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}(x)\cos\beta x + R_{m_2}(x)\sin\beta x)$
   а) $\alpha \pm i\beta$ није корен карактеристичне ј-не
   $y_p = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$; $m = \max(m_1, m_2)$
   б) $\alpha \pm i\beta$ је корен реда $k \geq 1$
   $y_p = x^k e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$; $m = \max(m_1, m_2)$
   Коефицијенти $Q_m(x)$ и $R_m(x)$ налазе се заменом y_p у нехомогену ј-ну методом неодређених коефицијената.

РЕДОВИ

1. (Д) Нека је a_n низ. Израз $a_r+a_{r+1}+\ldots=\sum_{k=r}^{+\infty}a_k$ зове се **РЕД** (бесконачан ред) са општим чланом a_k. ($r\in N$, $r=1$ најчешће)
низ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
ред: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

2. (Д) Збирови
$S_1=a_1$ 1. парцијална сума
$S_2=a_1+a_2$ 2. парцијална сума
$\vdots$
$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ n. парцијална сума
зову се **ПАРЦИЈАЛНЕ СУМЕ** реда $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$

3. (Д) Ако је низ парцијалних сума $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ конвергентан тј. ако постоји коначан $\lim S_n = S$ тада кажемо да је дати ред **КОНВЕРГЕНТАН** да му је сума једнака S (пише се $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$)
Ако низ парцијалних сума није конвергентан кажемо да дати ред није конвергентан тј. дивергентан је:
- Ако је $\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$, тада је ред $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **ОДРЕЂЕНО ДИВЕРГЕНТАН** (пише се $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\pm\infty$)
- Ако $\lim S_n$ не постоји, тада је ред $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **НЕОДРЕЂЕНО ДИВЕРГЕНТАН**

4. (Д) Редове делимо у две групе: **БРОЈНИ (НУМЕРИЧКИ) РЕДОВИ** $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ - a_k - бројеви
ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ - a_k - функције

БРОЈНИ (НУМЕРИЧКИ) РЕДОВИ

1. (Т) Особине конвергентних редова

1) линеарност сумирања Ако су $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ конвергентни редови тада је конвергентан и ред
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha a_k+\beta b_k) \quad \alpha,\beta\in R \text{ и важи } \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$$

доказ
$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=S_A \text{ и } \sum_{k=1}^{+\infty}b_k=S_B \quad (S_A, S_B \text{ коначне})$$
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)}_{S_n}=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k \;/\lim_{n\to\infty}$$
важи због дефиниције $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha S_A+\beta S_B$ ← суме су коначне па су и лимеси и ово се може користити
је $\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha S_A+\beta S_B$

2) Ако је $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ конвергентан ред тада је ред $\sum_{k=1}^{+\infty}c\cdot a_k$ ($c\in R$) такође конвергентан

доказ
$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=S_A \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}b_k=S_B$$
из 1 за $\alpha=c$ и $\beta=0$ нпр $\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$

2 (Т) 1) Редови $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$ и $R_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$ су **ЕКВИВАЛЕНТНИ** (одбацивање коначно много чланова реда нема утицај на конвергенцију реда)
(ЕКВИКОНВЕРГЕНТНИ)

2) Ред $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ је конвергентан $\Leftrightarrow \lim_{m\to+\infty} R_m = 0$
$(S = S_m + \underbrace{R_m}_{\to 0})$, $S \approx S_m$)

3 (Т) Ако је $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ конвергентан тада важи $\lim a_n = 0$
($\sum a_k$ конвергентна $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$) потребан услов

доказ $a_n = S_n - S_{n-1}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0$

може јер су S_n и S_{n-1} коначне због конвергенције реда

4 (Т) КОШИЈЕВ КРИТЕРИЈУМ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

$\Leftrightarrow$ Ред $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ако и само ако је низ (S_n) кошијев низ
$((\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon))(n>n_0)(p\in N)(|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon) \Leftrightarrow (|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon)$

РЕДОВИ СА ПОЗИТИВНИМ ЧЛАНОМ

5 (Д) Ред $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ је **ПОЗИТИВАН** ако су сви чланови $a_n>0$ (или за $n>n_0$)

5 (Т) Позитиван ред може бити конвергентан или одређено дивергентан

доказ
Низ $S_1, S_2, \dots, S_n$ је монотон (растући) Ако је низ (S_n) ограничен одозго низ је конвергентан односно постоји коначан $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \Rightarrow$ ДЕФ 3
Ако (S_n) није ограничен одозго $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$ ред конвергира ка $+\infty$

КРИТЕРИЈУМИ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ ЗА ПОЗИТИВНЕ РЕДОВЕ

6 (Т) ПОРЕДБЕНИ КРИТЕРИЈУМИ
Нека су $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ позитивни редови

(I) Ако је $a_n \le b_n$ за скоро свако n тада
1) ако је $\sum b_k$ конвергентан $\Rightarrow \sum a_k$ је конвергентан
2) ако је $\sum a_k$ дивергентан $\Rightarrow \sum b_k$ је дивергентан

доказ Означимо са $\delta_n = a_1+a_2+\dots+a_n$ и са $S_n = b_1+b_2+\dots+b_n$
$\sum b_k$ конвергентан $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ $\quad S$ - коначан

$a_n \le b_n \Rightarrow \delta_n \le S_n \le S \Rightarrow (\delta_n)$ ограничен одозго,
монотон $\Rightarrow$ постоји коначан $\lim_{n\to+\infty}\delta_n \Rightarrow_{\text{ДЕФ 3}} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ је конвергентан

(II) Ако је $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ $(0<c<+\infty)$ тада су ови редови еквиконвергентни

доказ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n>n_0)(|\frac{a_n}{b_n}-c|<\varepsilon)$

$c-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c+\varepsilon \Rightarrow (c-\varepsilon)b_n < a_n < (c+\varepsilon)b_n$

ако је $\sum b_k$ конвергентан $\Rightarrow \sum(c+\varepsilon)b_k$ конвергентан
$\Rightarrow_{\text{Iпк}} \sum a_k$ је конвергентан
$\sum a_k$ конвергентан $\Rightarrow \sum(c-\varepsilon)b_k$ конв. $\Rightarrow \sum b_k$ конв.
ако је $\sum(c-\varepsilon)b_k$ дивергентан $\Rightarrow \sum a_k$ је дивергентан
$\Rightarrow_{\text{Iпк}} \sum b_k$ је дивергентан.

(III) Ако је $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ тада: 1) ако је $\sum b_k$ ковергентан $\Rightarrow \sum a_k$ је конвергентан
2) ако је $\sum a_k$ дивергентан $\Rightarrow \sum b_k$ је дивергентан

доказ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0(\varepsilon))(n>n_0)\left(\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n<\varepsilon b_n$

$\sum b_k$ конвергентан $\Rightarrow \sum\varepsilon b_k$ конвергентан $\underset{I\,п.к.}{\Rightarrow} \sum a_k$ конв.

$\sum a_k$ див. $\underset{I\,п.к.}{\Rightarrow} \sum\varepsilon b_k$ див $\Rightarrow \sum b_k$ див.

IV Ако за скоро свако n важи $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ тада

1) $\sum b_k$ конв $\Rightarrow \sum a_k$ конв.

2) $\sum a_k$ див. $\Rightarrow \sum b_k$ див.

доказ $\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}$

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1} \Rightarrow a_n\le\underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{const}b_n \overset{I\,п.к.}{\Rightarrow}$ да важи тврђење

7 T Ако је $\sum a_k$ позитиван конвергентан ред, а (b_k) позитиван ограничен низ тада је $\sum a_k b_k$ позитиван конвергентан ред.

доказ (b_n) је ограничен $\rightarrow (\exists M)(\forall n)\ b_n<M$

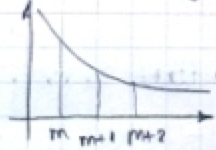
За $\sum a_k b_k$ важи да $a_n b_n<a_n\cdot M$ $\sum a_k$ конвергентан $\Rightarrow$

$\underset{T1(2)}{\Rightarrow} \sum M a_k$ конвергентан $\underset{I\,п.к.}{\Rightarrow} \sum a_k b_k$ је конвергентан.

8 T ИНТЕГРАЛНИ КРИТЕРИЈУМ

Нека је f непрекидна, позитивна и нерастућа функција за $x\ge m$. Тада су: $\int_m^{+\infty}f(x)$ и ред $\sum_{k=m}^{+\infty}f(x)$ еквиконвергентни.

доказ



За $x\in[k,k+1]$ важи $f(k+1)\le f(x)\le f(k)\ \Big/\int_k^{k+1}$

$\int_k^{k+1}f(k+1)dx\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le\int_k^{k+1}f(k)dx$

$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k)$

$f(m+1)+f(m+2)+\dots+\le\int_m^{+\infty}f(x)dx\le f(m)+f(m+1)+\dots$

$\sum_{k=m+1}^{+\infty}f(k)\overset{L}{\le}\int_m^{+\infty}f(x)dx\overset{D}{\le}\sum_{k=m}^{+\infty}f(k)$

Ако је ∫ конвергентан због L $\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{+\infty}f(k)$ ограничена $\Rightarrow \sum f(k)$ конвергентан

Ако је ∫ дивергентан због D $\Rightarrow$ дивергентан је.

9 T КОШИЈЕВ ПОРЕДБЕНИ КРИТЕРИЈУМ

Нека је $\sum a_k$ позитиван ред

Ако је $\sqrt[n]{a_n}<1$ за скоро свако n, тада је ред $\sum a_k$ конвергентан

Ако је $\sqrt[n]{a_n}\ge1$ за скоро свако n, тада је ред $\sum a_k$ дивергентан

1 П Нека постоји $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. Тада
$L<1\Rightarrow\sum a_k$ конвергира
$L>1\Rightarrow\sum a_k$ дивергира
$L=1\Rightarrow\sum a_k$ је неодлучив

НАПОМЕНА: Ако не постоји $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, али постоји $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ тврђење остаје да важи

10 T ДАЛАМБЕРОВ КОЛИЧНИЧКИ КРИТЕРИЈУМ

Нека је $\sum a_k$ позитиван ред

Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ за скоро свако n тада је $\sum a_k$ конвергентан

Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge1$ за скоро свако n тада је $\sum a_k$ дивергентан

10 Т Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, тада: $L<1$ Σa_k је конвергентан
$L>1$ Σa_k је дивергентан
$L=1$ Σa_k је неодлучив

НАПОМЕНА иста као предходна

РЕДОВИ СА ЧЛАНОВИМА ПРОИЗВОЉНОГ ЗНАКА

АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВИ

6 Д Ред облика $a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$, где је $(\forall k)\ a_k>0$ зове се **АЛТЕРНАТИВНИ РЕД**

11 Т ЛАЈБНИЦОВ КРИТЕРИЈУМ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ
Ако је (a_n) монотоно опадајући низ и $\lim a_n=0$, тада је ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}a_k$ конвергентан. У том случају остатак реда R_n задовољава услов $|R_n|\le a_{n+1}$ и $sgn(R_n)=(-1)^n$

доказ

$$S_{2n}=\underbrace{(a_1-a_2)}_{\geq 0}+\underbrace{(a_3-a_4)}_{\geq 0}+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \qquad (a_n)\searrow$$

$\Rightarrow (S_{2n})$ је монотон (неопадајући) низ

Важи $0\le S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}<a_1 \Rightarrow$ постоји коначан $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+(-1)^{2n}a_{2n+1} \quad /\lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(\underbrace{S_{2n}}_{\to S}+(-1)^{2n}\underbrace{a_{2n+1}}_{\to 0})=S$$

АПСОЛУТНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

12 Т Ако је $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ конвергентан тада је конвергентан и ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$

доказ

Важи да је $\underbrace{|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}|}_{S_{n+k}-S_n}\le\underbrace{|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+k}|}_{\varepsilon=S_{n+k}-S_n>0}$

$\Leftrightarrow$ кошијевом критеријуму

7 Д $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ је
АПСОЛУТНО КОНВЕРГЕНТАН ако конвергира ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|a_k|$
УСЛОВНО (СЕМИ) КОНВЕРГЕНТАН ако $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ конвергира а $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ дивергира

КОМУТАТИВНОСТ И АСОЦИЈАТИВНОСТ

13 Т конвергентан ред има својство асоцијативности
1) позитиван конвергентан ред има својство комутативности
2) апсолутно конвергентан ред има својство —||—
3) семиконвергентан ред нема својство —||—

ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

8 Д Редови чији су чланови ф-је $f_1(x), f_2(x)$ где је $(\forall k)\ f_k: A\to R$ $(A\subseteq R)$ зове се **ФУНКЦИОНАЛНИ РЕД** (пишемо $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_k(x)$)

9 Д Ф-ја $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=S_n(x)$ зове се **N-ТА ПАРЦИЈАЛНА СУМА** реда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_k(x)$.
Низ парц. сума $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x)$ је низ функција (функционални низ)

ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗОВИ

10 Δ Нека је F скуп реалних функција, које су дефинисане на неком скупу $A \subseteq \mathbb{R}$. Произвољно пресликавање $N \to F$ зове се **ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗ**

11 Δ Функционални низ $(f_n(x))$ конвергира у тачки $x_0 \in A$ ка ф-ји $f(x)$ ако низ реалних функција $(f_n(x_0))$ конвергира ка реалном броју $f(x_0)$.

12 Δ Ако низ ф-је $(f_n(x))$ конвергира у свакој тачки $x \in A$ ка ф-ји $f(x)$ тада кажемо да функционални низ $(f_n(x))$ конвергира на скупу A ка ф-ји $f(x)$ $(\forall x_0 \in A)$

$$(\forall x_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon, x_0))(\forall n > n_0)\ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

13 Δ Каже се да ф-нални низ $(f_n(x))$ **УНИФОРМНО КОНВЕРГИРА** на неком скупу A ка функцији $f(x)$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in A)(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

или

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$ (ово је из књиге стр 364.)

14 Δ Функционални ред $\sum f_k(x)$ конвергира на скупу A ка ф-ји $S(x)$ ако функционални низ парцијалних сума $S_1(x), S_2(x), \dots S_n(x)$ конвергира на скупу A ка ф-ји $S(x)$ (пишемо $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = S(x)$)

$$(\exists S(x))(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \geq n_0)$$
$$(\underbrace{|S_n(x) - S(x)}_{R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)}| < \varepsilon) \qquad (\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

15 Δ Каже се да функционални ред облика $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ конвергира униформно на скупу A ако функционални низ $(S_n(x))$ парцијалних сума конвергира униформно на скупу A

$$(\exists S(x))(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n \geq n_0)(|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon)$$

овде је $S(x)$ јер је то ф-ја којој се тежи $R_n(x)$

14 T **ВАЈЕРШТРАСОВ КРИТЕРИЈУМ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ**

Ако $(\forall x \in A)(\forall n \in N)$ важи $|f_n(x)| < c_n$ и ако је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ конвергентан тада је ф-нални ред $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ **УНИФОРМНО КОНВЕРГЕНТАН** на скупу A.

16 Δ Скуп свих вредности x за које ф-нални ред $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ конвергира зове се **ОБЛАСТ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ РЕДА**

СТЕПЕНИ РЕДОВИ

Δ Функционални ред облика $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ назива се **СТЕПЕНИ РЕД**.
Ред облика $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ сменом се своди на горњи ред
Сваки степени ред конвергира за $x = 0$; за остало се не зна

15 T **АБЕЛОВ СТАВ**

Ако је степени ред $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

1) конвергентан у тачки $x = p$, $p \neq 0$, он је апсолутно конвергентан за свако x за које је $|x| < |p|$
2) дивергентан у тачки $x = q$ он је дивергентан за $\forall x$ за које важи $|x| > |q|$

доказ 1) степени ред за $|x|<|p|$, $x\in(-|p|,|p|)$

$\sum a_k p^k$ конвергентан $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n p^n = 0 \Rightarrow \exists M>0$ тако да $|a_n p^n|<M\ (\forall n)$ ← пошто конвергира његов општи члан тежи 0

сада имамо $|a_n x^n| = |a_n p^n (\frac{x}{p})^n| \le M|\frac{x}{p}|^n$ за $|\frac{x}{p}|<1$ $|x|<|p|$

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} M|\frac{x}{p}|^k$ конвергира $\overset{\text{ПК}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{+\infty}|a_k x^k|$ конвергира $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ је апсолутно конв.

2) Ако би за $|x|>|p|$ ред био конвергентан то би противуречило тачки 1) (Ако се претпостави супротно добија се да је $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ конвергентан ↯)

15 Т **КОШИ АДАМАРДОВ СТАВ** (*) $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

доказ Посматрајмо ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ и ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k x^k|$

Ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k x^k|$ конвергира за $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$ Даламберов критеријум

x-фиксирано $|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ тј. $|x|<\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ R

за $|x|>\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ ред $\sum a_k x^k$ дивергира

17 Д (*) **ПОЛУПРЕЧНИК КОНВЕРГЕНЦИЈЕ** степеног реда $\sum a_n x^n$ дефинише се са $R=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ конвергира}\}$ (ово је дефиниција из књиге 372. стр)

нпр.
$R=+\infty$ ред је апсолутно конвергентан
$R=0$ ред је апсолутно конв. за $x=0$

на $(-R,R)$ апсолутна конв. ($\Rightarrow$ конв.), на $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$ дивергира
а за $x=R$, $x=-R$??? не зна се

17 Т Ако је $R>0$ полупречник конвергенције степеног реда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$, тада је тај ред униформно конвергентан на сваком одсечку $[-r,r]$ где је $0<r<R$.

доказ
за $x\in[-r,r]$ $|a_nx^n|\le|a_nr^n|$ и бројни ред $\sum a_k r^k$ је конвергентан (како је R пп. конвергенције и како важи да је $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ за $x<R$ конвергентан $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ конвергентан јер је $r<R$)
Одавде по Вајерштрасовој теореми $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ је униформно конв.

1 П Ред је униформно конвергентан на $[a,b]\subset(-R,R)$ може се диференцирати и интегралити произвољан број пута и новодобијени редови имају исти пп. конвергенције R.

2 П За сваки степени ред $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ постоји $0\le R\le+\infty$ са особином
- за $x\in(-R,+R)$ ред је апсолутно конвергентан
- за $|x|>R$ тј. $x\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$ ред је дивергентан

(Односно $\exists R$ као пп. конв.?)

Т Нека је $R>0$ пп. конв. реда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ и $[a,b]\subset(-R,R)$. На одсечку $[a,b]$ ред се може интегралити и диференцирати члан по члан и новодобијена редови имају исти пп. конв. R.

доказ Нека је $x \in [a,b] \subset (-R,R)$

$\sum a_k x^k = S(x)$ ред униформно конвергира

$$\Rightarrow \int S(x)dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k x^k dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{тј.}$$

$$R_1 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_{n-1}}{n}}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = R$$

$= R_1$ конвергенције овог реда

МАКЛОРЕНОВ РЕД

Д Нека је ф-ја f дефинисана на неком интервалу који садржи нулу и нека постоје сви изводи ф-је f у нули. Степени ред $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ назива се **МАКЛОРЕНОВ РЕД** ф-је f.

Т Довољан услов

Ако на неком интервалу I који садржи тачку 0 постоји $M > 0$ тако да је

$(\forall x \in I)(\forall n)\ |f^{(n)}(x)| < M$ тада се функција f може развити у степени ред на интервалу I. *Све основне елементарне функције задовољавају ове услове.*

Т Ако се функција f може представити степеним редом у интервалу $(-R,R)$ тј. ако је $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ за $x \in (-R,R)$ тада је $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

доказ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ за $x \in (-R,R)$

$f(0) = a_0$

$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} \cdot k \qquad f'(0) = a_1$

$f''(0) = 2 \cdot 1 a_2$

$f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1\, a_3$

$f^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{\infty} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-s+1) x^{k-s} \qquad f^{(s)}(0) = a_s \cdot s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$a_s = \frac{f^{(s)}(0)}{s!}$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in R$

$\ln(1+x) = \sum_{\boxed{k=1}}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1,1]$

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in R$

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in R$