M. Stević – S. Popović – M. Jovanović

TEK skripta

Za drugu godinu Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Verzija 0.1

Sadržaj

Pitanje 1 i 2.

Pojam električnog kola i mreže. Modelovanje kola.

Električno kolo predstavlja skup povezanih električnih elemenata koji nema nikakvu vezu sa okolinom (autonomni sistem). Ako su elementi tako povezani da se ne može formirati zatvoren put duž elemenata, takva konfiguracija predstavlja električnu mrežu u užem smislu. U takvoj konfiguraciji se ne može uspostaviti struja u elementima osim ako na neki način ne povežemo krajeve. U širem smislu električna mreža predstavlja skup električnih elemenata koji su tako povezani da obrazuju zatvorene puteve duž njih, ali postoje i izvučeni krajevi preko kojih se može izvršiti povezivanje sa drugim elementima ili mrežama.

Razlika između električne mreže i električnog kola je u tome što električna mreža ima pristupe, za razliku od električnog kola koje predstavlja autonomni skup elemenata. Strogo govoreći, električno kolo se nikada ne može formirati jer interakcija sa okolinom uvek postoji, ali se taj uticaj moze načiniti zanemarljivo malim u odnosu na pojave koje se dešavaju unutar samog kola. Umesto toga se formira model kojim se aproksimira ponašanje tog sistema. Osnovni razlog za formiranje modela je taj da je fizički sistem obično veoma složen i nepraktičan za analizu. U većini slučajeva je složenost sistema izazvana raznim nedominantnim faktorima. Prvenstveni cilj modelovanja jeste da se zadrže samo osnovni faktori koji opisuju, sa zadovoljavajućom tačnošću, suštinu pojava u sistemu.

Pitanje 3.

Elementi električnih kola. Podela elemenata.

Element električnog kola jeste osnovni deo kola koji vrši određenu funkciju. On može biti prost (iz jednog sastavnog dela) ili složen (iz više sastavnih delova) ali takav da se ne može razložiti a da pri tom ne izgubi svoju osnovnu funkciju. Element ima izvučene krajeve (priključke) preko kojih se vezuje za druge elemente u kolu. Krajevi elemenata se nazivaju i čvorovima.

Svaki od krajeva elementa se nalazi na određenom potencijalu (V_1, V_2).

Napon između krajeva elementa (potencijalna razlika krajeva) jeste napon elementa:

$$u_{12} = v_1 - v_2 = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

Struja elementa predstavlja brzinu proticanja naelektrisanja kroz njegove priključne krajeve:

$$i_{12} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Usaglašeni smerovi: smer struje je od tačke višeg potencijala ka tački nižeg potencijala.

Klasifikacija se može vršiti na razne načine. Na osnovu broja priključaka, odnosno na osnovu broja pristupa, elementi mogu biti sa *dva* kraja (jedan pristup), sa *tri* kraja (najviše dva nezavisna pristupa) itd.

Na osnovu dominantnih fizičkih procesa koji se odvijaju u elementu oni mogu biti:

1) **Rezistivni elementi**

   Opisani su algebarskim vezama napona u_i i struja i_i na pristupima. Za element sa jednim pristupom karakteristika je oblika:

   $$F(u, i, t) = 0$$

   Ako karakteristika ne zavisi od vremena imamo:

   $$F(u, i) = 0$$

   Rezistivni elementi nemaju sposobnost akumulisanja energije. Zovu se još i nedinamički elementi ili elementi bez memorije.

2) **Induktivni elementi**

   Opisani su algebarskim vezama između struja i_j i magnetskih flukseva Φ_j. Za element sa jednim pristupom karakteristika je oblika

   $$F(\Phi, i, t) = 0$$

   Kako je

   $$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

   to je napon na pristupu induktivnog elementa određen izvodom struje pristupa po vremenu.

   Ako karakteristika ne zavisi od vremena imamo:

   $$F(\Phi, \mathrm{i}) = 0$$

   Induktivni elementi su dinamički elementi (elementi sa memorijom) jer imaju sposobnost akumulisanja magnetne energije i stvaranja magnetnog polja.

3) **Kapacitivni elementi**

Opisani su algebarskim vezama između napona u_k i količina naelektrisanja q_k. Za element sa jednim pristupom relacija je

$$F(q, u, t) = 0$$

Kako je $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, to znači da će struja kapacitivnog elementa zavisiti od izvoda napona elementa po vremenu.

Kapacitivni elementi su dinamički elementi (elementi sa memorijom) jer imaju sposobnost akumulisanja električne energije i stvaranja električnog polja.

Karakteristika elementa može biti promenljiva sa vremenom. Takvi elementi se zovu vremenski promenljivi. U suprotnom oni su vremenski nepromenljivi.

Algebarske relacije koje opisuju element mogu biti linearne funkcije ili ne, na osnovu čega vršimo podelu elemenata na linearne i nelinearne.

Podela elemenata može se vršiti i na osnovu pasivnosti, recipročnosti i sl.

Pitanje 4.
Ulazna snaga elementa. Opšti uslov pasivnosti.

Snaga predstavlja brzinu promene energije elementa.

Trenutna ulazna snaga (definiše se za usaglašene referentne smerove), jednaka je proizvodu napona i struje na pristupu elementa

$$p = ui\,,$$

a za element sa n pristupa

$$p = \sum_{j=1}^{n} p_j \quad , \quad p_j = u_j i_j\,.$$

Trenutna izlazna snaga definiše se za neusaglašene referentne smerove.

Za element sa jednim pristupom:

$$p_{ulE} = u_{12} i_{12}$$
$$p_{izE} = u_{12} i_{21} = -p_{ulE}$$
$$p_{ulE} + p_{izE} = 0$$
$$p_{ulN} = u_{12} i' = u_{12}(-i_{12}) = -p_{ulE} = p_{izE}$$
$$p_{ulE} + p_{ulN} = 0$$

Ulazna snaga elementa se definiše preko energije koju ostatak kola uloži u element.

Izlazna snaga se definiše preko energije koju element preda ostatku kola.

Ako je trenutna ulazna snaga elementa pozitivna tada element prima energiju od ostatka kola, a kada je trenutna ulazna snaga elementa negativna element predaje energiju ostatku kola.

Ako je trenutna ulazna snaga elementa uvek jednaka nuli, tada je element bez gubitaka.

Energija (rad) koja se spolja ulaže u element od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ predstavlja sumu elementarnih radova u tom intervalu

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}a(\tau) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d\tau} = W(t) - W(t_0) + a_m(t_0, t)$$

gde je a_m mehanički rad.

Ako se do trenutka t_0 sva uložena energija akumulisala ($a_m(-\infty, t_0) = 0$) tada akumulisanu energiju u trenutku t_0 određujemo kao

$$W(t_0) = a(-\infty, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(\tau)\mathrm{d}(\tau)$$

pri čemu se podrazumeva da je $W(-\infty) \ = \ 0$.

Pasivnost elementa se određuje na osnovu uloženog rada i akumulisane energije u elementu.

Element je pasivan ako je za bilo koji trenutak t_0 i $t > t_0$ suma akumulirane energije i uloženog rada nenegativna

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Ako se sav uloženi rad akumuliše u vidu neke druge energije (magnetske ili električne), tada je uslov pasivnosti

$$w(t) \geq 0$$

$$P = \frac{a(t_0, t)}{t - t_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau, T = t - t_0$$

Pitanje 5.

Rezistivni elementi sa jednim pristupom.

Pod rezistivnim elementom sa jednim pristupom podrazumeva se idealizovan (čist) element koji je opisan samo algebarskom relacijom između napona i struje na pristupu. Ta relacija naziva se karakteristika rezistivnog elementa i za elemente sa jednim pristupom je oblika

$$F(u, i, t) = 0,$$

a ako se karakteristika ne menja sa vremenom onda je oblika

$$F(u, i) = 0.$$

Rezistivni elementi sa jednim pristupom nazivaju se *otpornici*. Kod njih se vrši nereverzibilan proces pretvaranja uložene električne energije u drugi vid energije, pa se elementi sa ovim svojstvom nazivaju i elementi sa gubicima.

Neki rezistivni elementi imaju mogućnost da duže vreme predaju energiju drugim elementima u kolu i oni se nazivaju *generatori*.

Rezistivni elementi su:

1) ***Strujno kontrolisani*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $u = f(i, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti struje odgovara samo jedna vrednost napona, ali obrnuto ne mora da važi.

2) ***Naponski kontrolisani*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $i = g(u)$. U tom slučaju svakoj vrednosti napona odgovara samo jedna vrednost struje, ali obrnuto ne mora da važi.

3) ***Kontrolisani i strujom i naponom*** i njihova karakteristika je striktno monotona, a može biti rastuća ili opadajuća.

Rezistivni elementi su *linearni* ukoliko je $u = ki$, a u suprotnom su *nelinearni*.

Rezistivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.

2) ***Unilateralni*** ukoliko karakteristika rezistivnog elementa nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva. Ovakvi elementi su uvek nelinearni.

Rezistivni elementi su *vremenski promenljivi* ukoliko im karakteristika zavisi od vremena, a u suprotnom su *vremenski nepromenljivi*.

Otpornost je osnovni parametar kojim je karakterisan otpornik.

Dinamička otpornost se definiše nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$R = \left.\frac{\partial u}{\partial i}\right|_M = \tan\alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti napona i struje na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je $R = R(u, i, t)$.

Statička otpornost je količnik napona i struje koji definišu radnu tačku, označava se sa R_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke otpornosti

$$R_0 = \frac{U}{I} = \tan\alpha_0 = R_0(u, i, t) \neq R(u, i, t).$$

Dinamička provodnost:

$$G = \left.\frac{\partial i}{\partial u}\right|_M = \tan\beta = G(u, i, t) = R^{-1}$$

Statička provodnost:

$$G_0 = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_0}$$

U slučaju linearnog otpornika dinamička i statička otpornost su jednake u svakoj tački karakteristike *u posmatranom trenutku* jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je on potpuno definisan vrednošću statičke otpornosti (provodnosti) jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije:

$$R = \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial i} = \frac{U}{I} = \tan\alpha_0 = R_0$$

odnosno,

$$u = Ri = R_0 i$$
$$i = Gu = G_0 u$$

pri čemu je $G = R^{-1}$.

Ako je otpornik i vremenski nepromenljiv onda važi i

$$(\forall t) R = R(t) = R_0 = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju otpornika.

Pitanje 6.
Pasivnost rezistivnih elemenata sa jednim pristupom.

Trenutna ulazna snaga otpornika sa jednim pristupom određena je opštom relacijom:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

kao za bilo koji element sa jednim pristupom. Smerovi napona i struje na pristupu su usaglašeni.

Za naponsko kontrolisan otpornik:

$$p(t) = u(t)g[u(t)]\,,$$

a za strujno kontrolisan otpornik:

$$p(t) = i(t)f[i(t)]\,.$$

Uložena energija u otpornik od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određena je opštom relacijom:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{\mathrm{t}} u(\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Pasivnost otpornika je definisana opštim uslovom pasivnosti:

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako je otpornik element bez memorije (ne akumuliše energiju) imamo da je

$$W(t_0) = 0\,,$$

pa se pasivnost otpornika svodi na uslov

$$a(t_0, t) \geq 0$$

za bilo koje t_0 i $t > t_0$ i za sve moguće vrednosti napona i struje na pristupu.

Vidimo da mora da važi:

$$p(t) = u(t)i(t) \geq 0,$$

što znači da struja i napon pasivnog otpornika uvek moraju biti istog znaka (karakteristika prolazi samo kroz I i III kvadrant u $u - i$ ravni). Otpornik koji ne zadovoljava ovaj uslov je aktivan. Ovim je definisana *globalna pasivnost (aktivnost) otpornika*.

Definise se još i *lokalna pasivnost (aktivnost) otpornika*. Otpornik je lokalno pasivan u radnoj tački M ako je priraštaj uložene snage u otpornik u okolini radne tačke nenegativan:

$$\Delta p \;=\; \Delta u \Delta i \;\geq\; 0$$

što praktično znači da je njegova dinamička otpornost (nagib tangente na karakteristiku $u \sim i$) nenegativna u toj tacki, a ukoliko je ona negativna otpornik je *lokalno aktivan*.

Ako je $p(t) = u(t)i(t) = 0$ za svako t, otpornik je bez gubitaka.

Pitanje 7.

Kapacitivni element sa jednim pristupom.

Kapacitivni element sa jednim pristupom se nazivaju kondenzatori. Oni su opisani algebarskom relacijom između količine naelektrisanja i napona na pristupu

$$F(q, u, t) = 0$$

a imaju i sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije. Ako se karakteristika ne menja sa vremenom ona je oblika

$$F(q, u).$$

Kapacitivnost pločastog kondenzatora je

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

gde je ε - dielektrična konstanta, S – površina obloga, d - debljina dielektrika.

Struja kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Kapacitivni elementi su:

1) ***Naponski kontrolisani*** ukoliko je karakteristika kapacitivnog elementa oblika $q = f(u, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti napona odgovara samo jedna vrednost opterećenja, ali obrnuto ne mora da važi.

2) ***Kontrolisani opterećenjem*** ukoliko je njegova karakteristika oblika $u = g(q, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti opterećenja odgovara samo jedna vrednost napona, ali obrnuto ne mora da važi.

3) ***Kontrolisani i opterećenjem i naponom*** i tada je njihova karakteristika strogo monotona, a može biti i rastuća i opadajuća.

Kapacitivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ako je karakteristika kondenzatora simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.
2) ***Unilateralni*** ako karakteristika kondenzatora nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva u kolo.

Kapacitivnost je osnovni parametar kojim je okarakterisan kondenzator.

Dinamička kapacitivnost definiše se nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$C = \left.\frac{\partial q}{\partial u}\right|_M = \tan\alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti opterećenja i napona na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je

$$C = C(q, u, t).$$

Statička kapacitivnost je količnik opterećenja i napona koji definišu radnu tačku, označava se sa C_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke kapacitivnosti:

$$C_0 = \frac{Q}{U} = \tan\alpha_0 = C_0(q, u, t) \neq C(q, u, t)$$

U slučaju linearnog kondenzatora dinamička i statčka kapacitivnost su jednake u svakoj tački karakteristike *u posmatranom trenutku* jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je on potpunosti definisan vrednošću statičke kapacitivnosti jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije:

$$C = \tan\alpha = \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{Q}{U} = C_0.$$

Ako je kondenzator i *vremenski nepromenljiv* važi

$$(\forall t) C = C(t) = Co = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju kondenzatora.

Struja *linearnog* kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[C(t)u(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}u(t) + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t},$$

a ako je i *vremenski nepromenljiv* onda je

$$i(t) = C_0\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Elastansa (recipročna kapacitivnost) se određuje kao nagib tangente na krivu

$$u = g(q)$$

$$S = \left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_M = \tan\beta.$$

Pitanje 8.
Akumulirana energija kondenzatora.

Kondenzatori imaju sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije. Akumulirana energija kondenzatora u nekom trenutku t može se odrediti eksperimentalno, na nekom konkretnom primeru, npr. na sledeći način.

Za krajeve kondenzatora, čija se akumulirana energija određuje, veže se, u trenutku t, linearan vremenski nepromenljiv i pasivan otpornik otpornosti R.

Ako je kolo autonomno tada će energija koja se u otporniku nepovratno pretvori u toplotu, od trenutka t do $+\infty$ biti jednaka akumulisanoj energiji kondenzatora u početnom trenutku t

$$a_R(t,\infty) = \int_t^{\infty} u_R(\tau)i_R(\tau)\mathrm{d}\tau = W_C(t)$$

Kako je

$$i_R = -i$$
$$u_R = u$$
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

sledi da je

$$W_C(t) = -\int_t^{\infty} u(\tau)\frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\,.$$

Ako je karakteristika kondenzatora q – *kontrolisana*, tada je napon na njegovim krajevima

$$u(\tau) = g[q(\tau), t],$$

Napomenimo da smo karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

Dalje je:

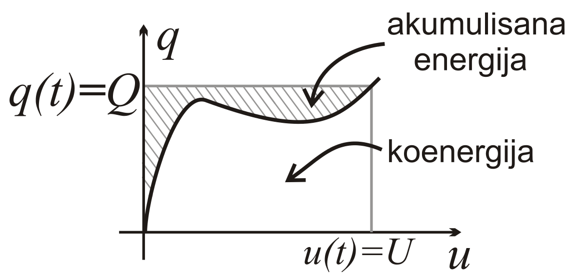
$$W_C(t) = -\int_t^{\infty} g[q(\tau), t]\frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{q(\infty)}^{q(t)} g[q(\tau), t]\,\mathrm{d}q(\tau)$$

Otpornik je po pretpostavci pasivan, što znači da on samo prima energiju od ostatka kola, odnosno kondenzatora, tako da će se kondenzator posle dovoljno dugo vremena isprazniti, tj. $q(\infty) = 0$.

Dakle, akumulirana energija kondenzatora je

$$W_C(t) = \int_0^{q(t)} g[q(\tau), t]\mathrm{d}q(\tau)$$

Akumulirana energija kondenzatora u nekom trenutku t određena je opterećenjem u tom trenutku, ali i karakteristikom u tom trenutku. Početni uslovi nisu jedine veličine koje određuju akumuliranu energiju kondenzatora, već na nju utiče i oblik karakteristike.



Nekad je teško izračunati akumuliranu energiju, naročito kada karakteristika kondenzatora nije q-kontrolisana. Tada je lakše izračunati komplement akumulisane energije koji nazivamo koenergija.

Ako je kondenzator *kontrolisan naponom*, tada imamo

$$q(\tau) = f(u_c(\tau), t)$$

Napomenimo da smo i ovde karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

$$W_{KOC}(t) = \int_0^{u(t)} f[u(\tau), t]\mathrm{d}u(\tau)$$

$$W_{tot}(t) = W_C(t) + W_{KOC}(t) = QU$$

$$W_C(t) = QU - W_{KOC}(t)$$

Samo za linearan kondenzator određujemo akumuliranu energiju na osnovu početnog uslova kao:

$$W_C(t) = \int\limits_{q(\tau)=q(\infty)=0}^{q(t)} \frac{q(\tau)}{C(t)} \mathrm{d}q(\tau) = \frac{1}{C(t)} \frac{1}{2} [q^2(\tau)]_{\tau=0}^{q(t)} = \frac{1}{2C(t)} q^2(t) = \frac{1}{2C(t)} u^2(t) C^2(t)$$

Pitanje 9.

Uložena energija u kondenzator.

Rad koji se ulaže u kondenzator od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određen je opštom relacijom

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u_C(\tau) i_C(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga u kondenzator.

Poznato je da važi

$$i_C(\tau) = \frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}.$$

za q-*kontrolisan* kondenzator je $u_c(\tau) = g(q(\tau), t)$, gde je t fiksirano.

Dalje je:

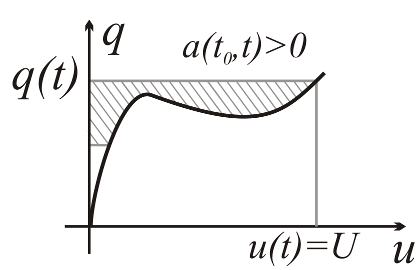
$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} g(q(\tau), t)\ \frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} g(q(\tau), t)\, \mathrm{d}q(\tau).$$

Ako je kondenzator *vremenski nepromenljiv* onda važi:

$$a(t_0, t) = \int_0^{q(t)} g(q)\mathrm{d}q - \int_0^{q(t_0)} g(q)\mathrm{d}q$$

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) = \Delta W_C$$

Sledi da je uloženi rad jednak priraštaju akumulirane energije od t_0 do $t > t_0$.



Za vremenski promenljive kondenzatore važi

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) + a_m(t_0, t) \ ,$$

gde je $a_m(t_0, t)$ mehanički rad koji izvrše elektrostatičke sile pri promeni konfiguracije kondenzatora.

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_C}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau$$

Ako je $a(t_0, t) < 0$ kondenzator *predaje energiju* ostatku kola, a ako je $a(t_0, t) > 0$ kondenzator *prima energiju* od ostatka kola.

Pitanje 10.

Pasivnost kondenzatora.

Polazeći od opšteg uslova pasivnosti dobijamo da je kondenzator pasivan ako je za proizvoljan trenutak t_0 i $t > t_0$, suma akumulirane energije u trenutku t_0, $w_C(t_0)$, i uložene energije od t_0 do t, $a(t_0, t)$ nenegativna

$$W_C(t_0) + a(t_0, t) \geq \ 0$$

Kako opštem slučaju važi

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) + a_m(t_0, t)$$

uslov pasivnosti se svodi na

$$w_C(t) \ + \ a_m(t_0, t) \ \geq \ 0,$$

gde je

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_C}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau \ .$$

Dobijamo da moraju da važe uslovi:

$$W_C(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\partial W_C}{\partial t} \leq 0$$

Za *vremenski nepromenljive* kondenzatore mehanički rad je jednak nuli pa se uslov pasivnosti svodi na:

$$w_C(t) \ \geq \ 0$$

što mora biti ispunjeno za svako t i za sve moguće varijacije napona na pristupu kondenzatora.

Za *linearne* kondenzatore uslov pasivnosti se svodi na uslove:

$$C(t) \;\geq\; 0 \text{ i } \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} \geq\; 0.$$

***Dokaz*:**

Izvod snage koja se ulaže u kondenzator po vremenu je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = p(t) = \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_C(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} + 0 + p_m(t)$$

gde je

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

pa iz linearnosti kondenzatora sledi

$$p(t) = u(t)\frac{\mathrm{d}\big(C(t)u(t)\big)}{\mathrm{d}t} = u(t)\left[u(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right].$$

Iz linearnosti kondenzatora takođe sledi i:

$$\frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}C(t)u^2(t)\right] = \frac{1}{2}u^2(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} + C(t)u(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Dalje je:

$$p_m(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} = p(t) - \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}u^2(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$a_m(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} u^2(\tau)\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Sledi da je uslov pasivnosti:

$$w_C(t) \;+\; a_m(t_0, t) \;\geq\; 0,$$

za *linearne* kondenzatore ekvivalentan uslovu:

$$\frac{1}{2}C(t)u^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} u^2(\tau)\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \geq 0$$

što je ispunjeno za $C(t) > 0$ i $\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} > 0$.

Pitanje 11.
Induktivni elementi sa jednim pristupom.

Induktivni elementi sa jednim pristupom naziva se kalem. Najčešće se realizuje kao određen broj zavojaka žice namotan na telo (jezgro) pogodnog oblika.

U tim zavojcima pod dejstvom promenljive struje stvara se fluks magnetske indukcije. Stoga u električnom pogledu kalem je opisan algebarskom relacijom između magnetnog fluksa i struje na pristupu elemnta. Ta relacija naziva se karakteristika induktivnog elementa i za elemente sa jednim pristupom je oblika

$$F(\Phi, i, t) \ = \ 0$$

a ako se karakteristika ne menja sa vremenom onda je oblika

$$F(\Phi, i) \ = \ 0.$$

Induktivni elementi imaju sposobnost akumulisanja magnetske energije. Kod ovih elemenata su jako (jače nego kod otpornika i kondenzatora) prisutni parazitni efekti.

Napon kalema definišemo na sledeći način

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

Induktivni elementi su:

1) ***strujno kontrolisani*** ukoliko je karakteristika induktivnog elementa oblika $\Phi(t) = f(i, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti struje odgovara samo jedna vrednost fluksa, ali obrnuto ne mora da važi.
2) ***kontrolisani fluksom*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $i = g(\Phi, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti fluksa odgovara samo jedna vrednost struje, ali obrnuto ne mora da važi.
3) ***Kontrolisani i strujom i fluksom*** i njihova karakteristika je striktno monotona, a može biti rastuća ili opadajuća.

Induktivni elementi su ***linearni*** ukoliko je $\Phi = ki$, a u suprotnom – ***nelinearni***.

Induktivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ukoliko je karakteristika induktivnog elementa simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.

2) ***Unilateralni*** ukoliko karakteristika induktivnog elementa nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva. Ovakvi elementi su uvek nelinearni.

Induktivni elementi su *vremenski promenljivi* ukloiko im karakteristika zavisi od vremena, a u suprotnom su vremenski *nepromenljivi*.

Induktivnost je osnovni parametar kojim je karakterisan kalem.

Dinamička induktivnost se definiše nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$C = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial i}\right|_M = \tan \alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti fluksa i struje na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je

$$L = L(\Phi, i, t) .$$

Statička induktivnost je količnik fluksa i struje koji definišu radnu tačku, označava se sa L_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke induktivnosti

$$L_0 = \frac{\Phi}{I} = \tan \alpha_0 = L_0(\Phi, i, t) \neq L(\Phi, i, t).$$

U slučaju *linearnog kalema* dinamička i statička induktivnost su jednake u svakoj tački karakteristike u posmatranom trenutku jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je kalem potpuno definisan vrednošću statičke induktivnosti jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije

$$L = \tan \alpha = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} = \frac{\Phi}{I} = \alpha_0 = L_0.$$

odnosno,

$$\Phi = Li = L_0 i .$$

Ako je kalem i vremenski nepromenljiv važi:

$$(\forall t) \;\; L = L(t) = L_0 = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju kalema.

Napon linearnog kalema je

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[L(t)i(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\, i(t) + \frac{L(t)\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

a ako je i vremenski nepromenljiv onda je

$$u(t) = L_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Pitanje 12.

Akumulirana energija kalema.

Kalem ima sposobnost akumulisanja magnetske energije. Akumulirana energija kalema u nekom trenutku t može se odrediti eksperimentalno, na nekom konkretnom primeru, npr. na sledeći način

Za krajeve kalema, čija se akumulisana energija određuje, veže se, u trenutku t, linearan vremenski nepromenljiv i pasivan otpornik otpornosti R.

Ako je kolo autonomno tada će energija koja se u otporniku nepovratno pretvori u toplotu, od trenutka t do $+\infty$ biti jednaka akumuliranoj energiji kalema u početnom trenutku t

$$a_R(t, \infty) = \int_t^{\infty} u_R(\tau) i_R(\tau) \mathrm{d}\tau = W_L(t)$$

Kako je

$$i_R = -i$$
$$u_R = u$$
$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

sledi da je

$$W_L(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} i(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Ako kalem *kontrolisan fluksom*, tada je struja na njegovim krajevima:

$$i(\tau) = g[\Phi(\tau), t]\,.$$

Napomenimo da smo karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

Dalje je:

$$W_L(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot g[\Phi(\tau), t] \mathrm{d}\tau = \int_{\Phi(\infty)}^{\Phi(t)} g[\Phi(\tau), t]\, \mathrm{d}\Phi(\tau)$$

Otpornik je po pretpostavci pasivan, što znači da on samo prima energiju od ostatka kola, odnosno kalema, tako da će se fluks kroz kalem posle dovoljno dugo vremena iščeznuti, tj. $\Phi(\infty) = 0$.

Dakle, akumulirana energija kalema je

$$W_L(t) = \int_0^{\Phi(t)} g[\Phi(\tau), t] \mathrm{d}\Phi(\tau)$$

Akumulirana energija kalema u nekom trenutku t određena je opterećenjem u tom trenutku, ali i karakteristikom u tom trenutku. Početni uslovi nisu jedine veličine koje određuju akumuliranu energiju kalema, već na nju utiče i oblik karakteristike.

Nekad je teško izračunati akumuliranu energiju, naročito kada karakteristika kalema nije Φ-kontrolisana. Tada je lakše izračunati komplement akumulisane energije koji nazivamo koenergija.

Ako je kalem *kontrolisan strujom*, tada imamo:

$$\Phi(\tau) = f(i_L(\tau), t)$$

Napomenimo da smo i ovde karakteristiku kalema fiksirali u trenutnku t!

$$W_{KOL}(t) = \int_0^{i(t)} f[i(\tau), t] \mathrm{d}i(\tau)$$

$$W_{tot}(t) = W_L(t) + W_{KOL}(t) = \Phi\, I$$

$$W_L(t) = \Phi\, I - W_{KOL}(t)$$

Samo za *linearan* kalem određujemo akumuliranu energiju na osnovu početnog uslova kao

$$W_L(t) = \int\limits_{\Phi(\tau)=\Phi(\infty)=0}^{\Phi(t)} \frac{\Phi(\tau)}{L(t)} \mathrm{d}\Phi(\tau) = \frac{1}{L(t)} \frac{1}{2} [\Phi^2(\tau)]_{\tau=0}^{\Phi(t)} = \frac{1}{2L(t)} \Phi^2(t) = \frac{1}{2L(t)} i^2(t) L^2(t)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L(t) i^2(t) = \frac{1}{2} \Phi(t) i(t)$$

Pitanje 13.
Uložena energija u kalem.

Rad koji se ulaže u kalem od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određen je opštom relacijom

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u_L(\tau) i_L(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga u kalem.

Poznato je da važi

$$u_L(\tau) = \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$$

Za kalem *kontrolisam fluksom* $i_L(\tau) = g(\Phi(\tau), t)$, gde je t fiksirano.

Dalje je:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot g(\Phi(\tau), t)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} g(\Phi(\tau), t)\,\mathrm{d}\Phi(\tau)\,.$$

Ako je kalem *vremenski nepromenljiv* onda:

$$a(t_0, t) = \int_{0}^{\Phi(t)} g(\Phi)\mathrm{d}\Phi - \int_{0}^{\Phi(t_0)} g(\Phi)\mathrm{d}\Phi$$

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) = \Delta W_L$$

Sledi da je uloženi rad jednak priraštaju akumulirane energije od t_0 do $t > t_0$.

Za *vremenski promenljiv* kalem

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) + a_m(t_0, t)$$

gde je $a_m(t_0, t)$ mehanički rad koji izvrše magnetske sile pri promeni konfiguracije kalema.

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_L}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau$$

Ako je $a(t_0, t) < 0$ kalem *predaje energiju* ostatku kola, a ako je $a(t_0, t) > 0$ kalem *prima energiju* od ostatka kola.

Pitanje 14.

Pasivnost kalema.

Polazeći od opšteg uslova pasivnosti dobijamo da je kalem pasivan ako je za proizvoljan trenutak t_0 i $t > t_0$, suma akumulirane energije u trenutku t_0, $W_L(t_0)$, i uložene energije od t_0 do t, $a(t_0, t)$ nenegativna:

$$W_L(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako opštem slučaju važi

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) + a_m(t_0, t)$$

uslov pasivnosti se svodi na

$$w_L(t) + a_m(t_0, t) \geq 0,$$

gde je

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_L}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau .$$

Dobijamo da moraju da važe uslovi

$$W_L(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\partial W_L}{\partial t} \leq 0.$$

Za *vremenski nepromenljiv kalem* mehanički rad je jednak nuli pa se uslov pasivnosti svodi na

$$W_L(t) \geq 0$$

što mora biti ispunjeno za svako t i za sve moguće varijacije struje na pristupu kalema.

Za linearan kalem uslov pasivnosti se svodi na uslove

$$L(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} \geq 0.$$

Dokaz: Izvod snage koja se ulaže u kalem po vremenu je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = p(t) = \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_L(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} + 0 + p_m(t)$$

gde je

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} i(t)$$

pa iz linearnosti kalema sledi

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}\big(L(t)i(t)\big)}{\mathrm{d}t} i(t) = i(t)\left[i(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + L(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right].$$

Iz linearnosti kalema takođe sledi i

$$\frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}L(t)i^2(t)\right] = \frac{1}{2}i^2(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + L(t)i(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dalje je:

$$p_m(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} = p(t) - \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}i^2(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$a_m(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{\mathrm{d}L(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Sledi da je uslov pasivnosti:

$$W_{L(t)} + a_m(t_0,t) \geq 0\ ,$$

za *linearne kondenzatore* ekvivalentan uslovu:

$$\frac{1}{2}L(t)i^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{\mathrm{d}L(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \geq 0$$

što je ispunjeno za L$(t) > 0$ i $dL(t)/dt > 0$.

Pitanje 15.

Gubici kalema i faktor dobrote.

Pod pojmom gubitak podrazumeva se nereverzibilni proces pretvaranja uložene električne energije u neki drugi vid energije. Gubici kod kalema su: gubici usled skin efekta, gubici usled efekta blizine i gubici usled vrtložnih struja.

Ako kalem poseduje jezgro od feromagnetskog materijala tada nastaju i specifični histerezisni gubici koji su srazmerni površini histerezisne petlje.

Elementarni uloženi rad je

$$\mathrm{d}a = i(\Phi)\mathrm{d}\Phi$$

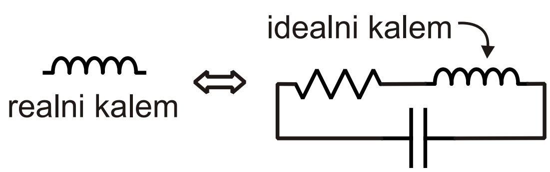
Od tačke A do tačke B rad je pozitivan – kalem prima energiju;

Od tačke B to tačke C rad je negativan – kalem daje energiju;

Od tačke C do tačke D rad je pozitivan – kalem prima energiju; itd...

Kalem od kola prima više energije nego što odaje kolu. Uočavamo da je razlika primljene i predane energije jednaka površini histerezisa. Ta razlika predstavlja gubitke energije.

Svi gubici kalema mogu se predstaviti ekvivalentnom realnom otpornošću, tj. otpornošću gubitaka.



Kalem je kvalitetniji ukoliko su njegovi gubici manji. Kao merilo kvaliteta kalema koristi se faktor dobrote, ***Q – faktor***. On predstavlja odnos maksimalne akumulirane energije kalema i rada koji se u njemu nepovratno izgubi u vidu toplote za vreme jedne periode naizmenične struje:

$$Q = 2\pi \frac{W_{Lmax}}{a_R(T)}$$

Maksimalna akumulirana energija *linearnog* kalema je

$$W_{Lmax} = \frac{1}{2} L i_{Lmax}^2$$

Rad koji se za vreme T ulaže u nepovratne procese je

$$a_R(t) = RI_L^2 T,$$

gde je I_L efektivna vrednost periodične struje $i_L(t)$ sa periodom T:

$$I_L = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} i_L^2(t)\mathrm{d}t}$$

Ako je struja kalema prostoperiodična:

$$I_L(t) = I_m \cos(L\omega t + \psi)$$

maksimalna akumulirana energija će biti

$$W_{Lmax} = \frac{1}{2} L I_m^2 \,,$$

a efektivna vrednost struje je

$$I_L = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

tako da je

$$Q_L = \frac{2\pi L}{RT} \,.$$

Kako je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \,,$$

faktor dobrote kalema je

$$Q_L = \frac{L\omega}{R} \,.$$

Značaj uvođenja Q-faktora za opisivanje kalema ogleda se u tome što je vrednost ovog parametra konstantna u relativno širokom opsegu učestanosti.

Pored induktivnosti i Q-faktora, za fizičke kalemove je potreban i podatak o maksimalnoj dozvoljenoj struji I_{max} što je određeno zagrevanjem provodnika i njegovom sposobnošću da disipira toplotu okolini.

Pitanje 16.
Neprekidnost napona kondenzatora.

Karakteristika linearnih kondenzatora je

$$C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} =^{*} \frac{Q}{U}$$

* – jer se karakteristika i tangenta na karakteristiku i radnoj tački poklapaju.

Struja kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

a za linearan kondenzator će biti

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}[C(t)u(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}u(t) + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Ako je kondenzator i *vremenski nepromenljiv* važi

$$(\forall t)\ C = C(t) = C_0 = const,$$

i tada je

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Napon kondenzatora

početni uslov: $u(t_0) = U_0$

za $t > t_0$: $u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = U_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$

Teorema o neprekidnosti napona kondenzatora

Ako je struja linearnog i vremenski nepromenljivog kondenzatora ograničena u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$ tada je napon kondenzatora neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Dokaz:

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Opterećenje kondenzatora je

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$q(t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = q(t) + \int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Zaključujemo da je priraštaj opterećenja:

$$\Delta\mathrm{q(t)} = \ q(t+\Delta t) - q(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \Delta\mathrm{q(t)} = 0$$

u intervalu (t_1, t_2) u kome je struja kondenzatora ograničena, jer površina koja je određena integralom

$$\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \Delta\mathrm{q(t)} \to 0, \qquad (\Delta\mathrm{t} \to 0)$$

dok je priraštaj napona

$$\Delta\mathrm{u(t)} = u(t+\Delta\mathrm{t}) - \mathrm{u(t)}$$

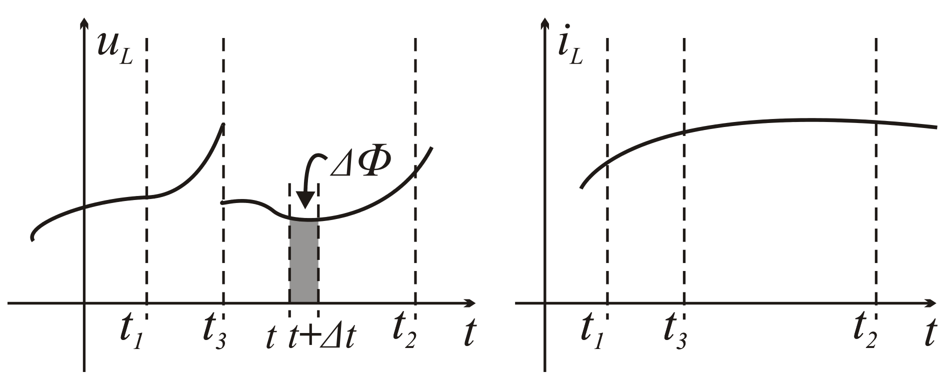
$$\Delta\mathrm{u(t)} = U_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta\mathrm{t}} i(\tau)\mathrm{d}\tau - U_0 - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta\mathrm{t}} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Delta\mathrm{u(t)} = \frac{1}{\mathrm{C}}\Delta\mathrm{q(t)}\,.$$

Zaključujemo:

$$\lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \Delta\mathrm{u(t)} = 0,$$

odnosno, struja kondenzatora može imati skokove (uslov je samo da bude ograničena), ali je napon kondenzatora neprekidna funkcija vremena.



Pitanje 17.

Memorisanje napona kondenzatora

Memorisanje napona kondenzatora iskazuje sposobnost kondenzatora da akumuliše energiju.

Ukoliko u trenutku t_0 „isključimo kondenzator iz mreže“, odnosno, ako je $i_C(t) = 0$, za $t \geq t_0$ tada će napon kondenzatora zadržati svoju vrednost koju je imao u trenutku t_0, tj. $u_C(t) = u_C(t_0)$ za svako $t \geq t_0$.

Dokaz:

$$t < t_0: \qquad u_C(t) = u(t)$$

$$t \geq t_0: \quad u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau = u_C(t_0),$$

jer je $i_C(t) = 0 \; za \; t \geq t_0$

Pitanje 18.

Neprekidnost struje kalema

Karakteristika *linearnog kalema* je:

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} =^{*} \frac{\Phi}{I}$$

* – jer se karakteristika i tangenta na karakteristiku i radnoj tački poklapaju.

Napon kalema je

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t},$$

a za linearan kalem će biti

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}[L(t)i(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}i(t) + L(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Ako je kalem i vremenski nepromenljiv važi

$$(\forall t)L = L(t) = L_0 = const,$$

i tada je

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Struja kalema

početni uslov: $i(t_0) = I_0$

za $t > t_0$: $$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Teorema o neprekidnosti struje kalema

Ako je napon linearnog i vremenski nepromenljivog kalema ograničen u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$ tada je struja kalema neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Dokaz:

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Fluks kalema je

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Phi(t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \Phi(t) + \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Zaključujemo da je priraštaj fluksa:

$$\Delta\Phi(\mathrm{t}) = \Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta \mathrm{t}\to 0} \Delta\Phi(\mathrm{t}) = 0$$

u intervalu (t_1, t_2) u kome je napon kalema ograničen, jer površina koja je određena integralom

$$\int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)d\tau = \Delta\Phi(\mathrm{t}) \to 0, \quad \Delta\mathrm{t} \to 0,$$

dok je priraštaj struje

$$\Delta i(t) = i(t + \Delta \mathrm{t}) - i(t)$$

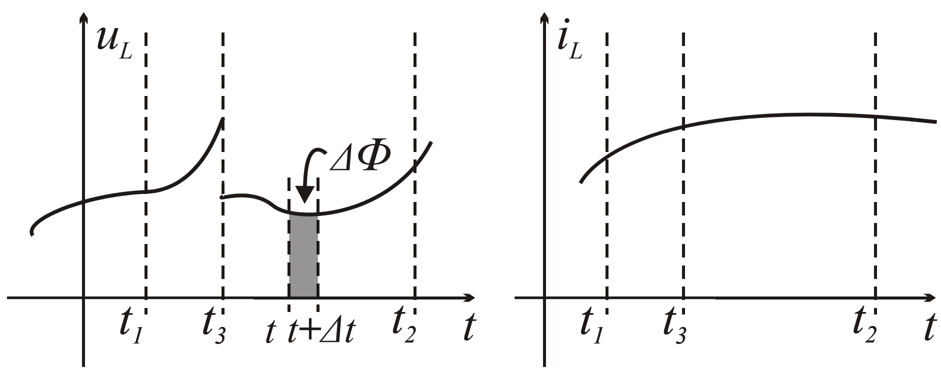
$$\Delta i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta \mathrm{t}} u(\tau)\mathrm{d}\tau - I_0 - \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{t}^{t+\Delta \mathrm{t}} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Delta i(t) = \frac{1}{L}\Delta\Phi(t)$$

Zaključujemo:

$$\lim_{\Delta \mathrm{t}\to 0} \Delta i(t) = 0,$$

odnosno, napon kalema može imati skokove (uslov je samo da bude ograničen), ali je struja kalema neprekidna funkcija vremena.



Pitanje 19.

Memorisanje struje kalema.

Memorisanje struje kalema iskazuje sposobnost kalema da akumuliše energiju.

Ukoliko u trenutku t_0 „isključimo kalem iz mreže“, odnosno, ako je $u_L(t) = 0$, za $t \geq t_0$ tada će struja kalema zadržati svoju vrednost koju je imala u trenutku t_0, tj. $i_L(t) = i_L(t_0)$ za svako $t \geq t_0$.

Dokaz:

$$t < t_0: \qquad i_L(t) = i(t)$$

$$t \geq t_0: \quad i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau = i_L(t_0),$$

jer je $u_L(t) = 0$ za $t \geq t_0$.

Pitanje 20.

Elementi sa više pristupa. Opšta svojstva.

Za element sa više pristupa, npr. k krajeva, uvodimo referentni čvor.

Čvor k uzmemo za referentni, odnosno $V_k = 0$.

Za ovaj element možemo pisati *Kirchhof*-ove relacije:

$$u_{12} + u_{23} + \dots + u_{k-1k} + u_{k1} = 0$$
$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k - 1 - i_k = 0$$

Ovaj element ima $k-1$ nezavisnih pristupa i $2(k-1)$ nezavisnih veličina ($k-1$ napon i $k-1$ struju).

Pristupe ovom elementu nazivamo pristupi sa zajedničkim krajem.

Element možemo vezati tako da pristupi nemaju zajednički priključak. U tom slučaju kažemo da su pristupi izolovani. Ako je k parno onda element ima $k/2$ izolovanih pristupa.

Važi:

$$i_1 = i_2$$
$$i_3 = i_4$$
$$\vdots$$

Ako se posmatra idealizovan element (u smislu njegovog fizičkog ponašanja) on je opisan algebarskim relacijama između ulaznih i izlaznih veličina

$$x_i, y_j, \qquad i, j = 1, 2, \dots, k$$

Zavisno od prirode ovih velicina vrsi se podela ovih elemenata na

1) ***rezistivne*** ($x_i = u, y_j = i$)
2) ***induktivne*** ($x_i = \Phi, y_j = i$) i
3) ***kapacitivne*** ($x_i = q, y_j = u$)

Karakteristika elementa je data sistemom algebarskih jednačina po x_i, y_j, s tim da jednačine mogu zavisiti i od vremena:

$$F_1(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k;\ t) = 0$$
$$F_2(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k;\ t) = 0,$$
$$\dots,$$
$$F_k(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k;\ t) = 0$$

Prema obliku algebarskih jednačina elementi mogu biti *linearni* i *nelinearni*, a prema zavisnosti od vremena, elementi su *vremenski promenljivi* ili *nepromenljivi*.

Ulazna snaga elementa sa q pristupa jednaka je zbiru svih ulaznih snaga pojedinačnih pristupa:

$$p = \sum_{j=1}^{q} p_j = \sum_{j=1}^{q} u_j i_j$$

Uslov za pasivnost elementa sa više pristupa je

$$W(t_0) + \ a(t_0, t) \geq \ 0,$$

pri čemu je $w(t_0)$ akumulirana energija elementa u proizvoljnom trenutku t_0, a $a(t_0, t)$ je električni rad koji se, spolja, ulaže u element od trenutka t_0 do proizvoljnog trenutka $t \geq t_0$:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga elementa dobijena kao suma ulaznih snaga svakog od pristupa.

Pitanje 21.

Rezistivni elementi sa dva pristupa.

Karakteristika rezistivnih elemenata je opisana algebarskim relacijama između napona i struja na pristupima elemenata.

Za elemente sa dva pristupa karakteristika je data sa

$$F_1(u_1, i_1, u_2, i_2;\ t) = \ 0$$
$$F_2(u_1, i_1, u_2, i_2;\ t) \ = \ 0$$

Ne računajući vreme postoji $\binom{4}{2} = 6$ različitih načina za eksplicitno predstavljanje ovih jednačina.

Strujno kontrolisano predstavljanje:

$$u_1 = \ r_1(i_1, i_2; t)$$
$$u_2 = \ r_2(i_1, i_2; t)$$

Naponski kontrolisano predstavljanje:

$$i_1 = \ g_1(u_1, u_2; t)$$
$$i_2 = \ g_2(u_1, u_2; t)$$

Prvo hibridno predstavljanje:

$$u_1 = \ h_1(i_1, u_2, t)$$
$$i_2 = \ h_2(i_1, u_2, t)$$

Drugo hibridno pretstavljanje:

$$i_1 = k_1(u_1, i_2, t)$$
$$u_2 = k_2(u_1, i_2, t)$$

Prvo prenosno predstavljanje:

$$u_1 = a_1(u_2, i_2', t)$$
$$i_1 = a_2(u_2, i_2', t)$$

gde je $i_2' = -i_2$.

Drugo prenosno predstavljanje:

$$u_2 = b_1(u_1, i_1, t)$$
$$i_2' = b_2(u_1, i_1, t)$$

gde je $i_2' = -i_2$.

Pitanje 22.
Linearni rezistivni elementi sa dva pristupa.

Strujno kontrolisano predstavljanje:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

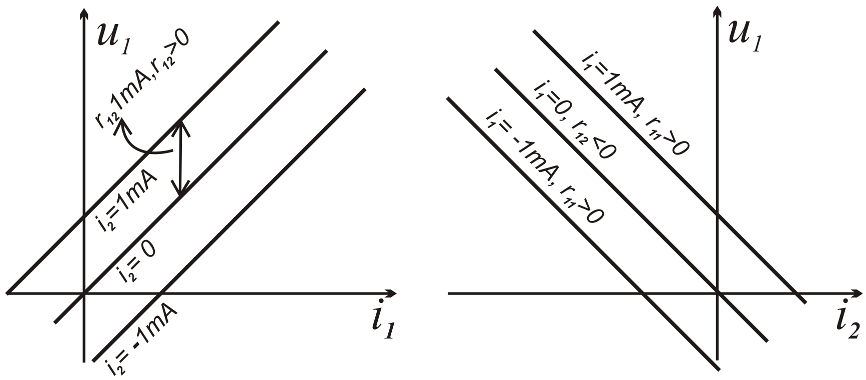
Koeficijenti r_{ij} nazivaju se rezistanse (rezistivni parametri), a određujemo ih na sledeći način:

$$r_{11} = \frac{u_1}{i_1}|_{i_2=0} = R_{ul1}|_{i_2=0}$$
$$r_{12} = \frac{u_1}{i_2}|_{i_1=0}$$

gde se r_{11} i r_{12} nazivaju ulazna i prenosna otpornost prvog pristupa.

$$r_{21} = \frac{u_2}{i_1}|_{i_2=0}$$
$$r_{22} = \frac{u_2}{i_2}|_{i_1=0} = R_{ul2}|_{i_1=0}$$

gde se r_{22} i r_{21} nazivaju ulazna i prenosna otpornost drugog pristupa. r_{12} i r_{21} se još nazivaju i transrezistanse.



Važi:

$$[u] = [r] \cdot [i],$$

gde su $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$, $[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$.

Naponski kontrolisano predstavljanje:

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2$$
$$i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2$$

Koeficijenti g_{ij} nazivaju se konduktanse, dok se g_{12} i g_{21} nazivaju još i transkonduktanse, a određujemo ih na sledeći način:

$$g_{11} = \frac{i_1}{u_1}|_{u_2=0} = G_{ul1}|_{u_2=0} \neq \frac{1}{r_{11}}$$
$$g_{12} = \frac{i_1}{u_2}|_{u_1=0}$$
$$g_{21} = \frac{i_2}{u_1}|_{u_2=0}$$
$$g_{22} = \frac{i_2}{u_2}|_{u_1=0} = G_{ul2}|_{u_1=0} \neq \frac{1}{r_{22}}$$

Važi:

$$[i] = [g] \cdot [u],$$

gde su $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$, $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

Ako postoje $[r]$ i $[g]$ važiće $[g] = [r]^{-1} = \frac{1}{\det[r]}\text{adj}[r]$, dakle,

$$[g] = \frac{1}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}}\begin{bmatrix} r_{22} & -r_{21} \\ -r_{12} & r_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

zaključujemo da je

$$g_{11} = \frac{r_{22}}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}} \neq \frac{1}{r_{11}} \; (*)$$

Slično se može zaključiti i za g_{22}.

Prvo hibridno predstavljanje:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}i_2$$
$$u_2 = h_{21}i_1 + h_{22}i_2$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1}|_{u_2=0} = R_{ul1}|_{i_2=0} = \frac{1}{g_{11}} \neq r_{11}$$

$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2}|_{i_1=0}$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}|_{u_2=0}$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2}|_{i_1=0} = G_{ul2}|_{i_1=0} = \frac{1}{r_{22}} \neq g_{22}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Drugo hibridno predstavljanje:

$$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2$$
$$i_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$k_{11} = \frac{i_1}{u_1}|_{i_2=0} = G_{ul1}|_{i_2=0} = \frac{1}{r_{11}} \neq g_{11}$$

$$k_{12} = \frac{i_1}{i_2}|_{u_1=0}$$

$$k_{21} = \frac{u_2}{u_1}|_{i_2=0}$$

$$k_{22} = \frac{u_2}{i_2}|_{u_1=0} = R_{ul2}|_{u_1=0} = \frac{1}{gr_{22}} \neq r_{22}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje $[h]$ i $[k]$ važiće $[k] = [h]^{-1} = \frac{1}{\det[h]}\text{adj}[h]$

Prvo prenosno predstavljanje:

$$u_1 = a_{11}i_1 + a_{12}(-i_2)$$
$$u_2 = a_{21}i_1 + a_{22}(-i_2)$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$a_{11} = \frac{u_1}{u_2}|_{i_2=0}$$
$$a_{12} = -\frac{u_1}{i_2}|_{u_2=0}$$
$$a_{12} = \frac{i_1}{u_2}|_{i_2=0}$$
$$a_{22} = -\frac{i_1}{i_2}|_{u_2=0}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}.$$

Drugo prenosno predstavljanje:

$$u_2 = b_{11}u_1 + b_{12}i_1$$
$$-i_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_1$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$b_{11} = \frac{u_2}{u_1}|_{i_1=0}$$
$$b_{12} = \frac{u_2}{i_1}|_{u_1=0}$$
$$b_{12} = -\frac{i_2}{u_1}|_{i_1=0}$$
$$b_{22} = -\frac{i_2}{i_1}|_{u_1=0}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje $[a]$ i $[b]$ važiće $[b] = [a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]}\operatorname{adj}[a]$.

Pitanje 23.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena r-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa, 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

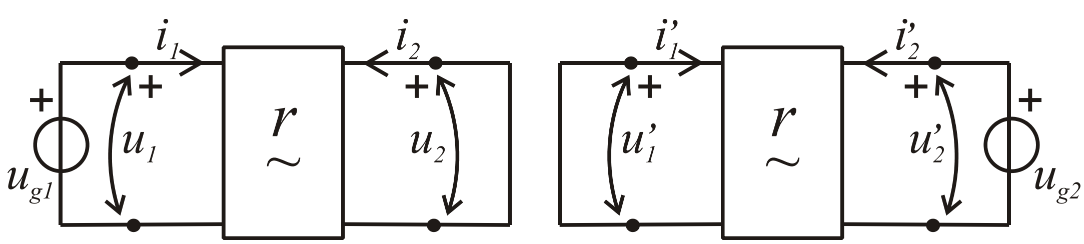
1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen $\boldsymbol{r}$-parametrima je

$$\boldsymbol{r_{12} = r_{21}}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.



$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi

$$i_1' = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa strujno kontrolisano predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \qquad (\mathbf{3})$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2,\ \ u_2 = 0 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1{}' = r_{11}i_1{}' + r_{12}i_2{}',\ \ u_1{}' = 0 \qquad (\mathbf{5})$$
$$u_2{}' = r_{21}i_1{}' + r_{22}i_2{}' \qquad (\mathbf{6})$$

Iz $(\mathbf{4})$ sledi:

$$r_{21}i_1 = -r_{22}i_2 \Rightarrow i_1 = -\frac{r_{22}}{r_{21}}i_2 \qquad (\mathbf{7})$$

Iz $(\mathbf{5})$ sledi:

$$r_{11}i_1' = -r_{12}i_2{}' \qquad (\mathbf{8})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ u $(\mathbf{8})$ dobija se:

$$i_2' = -k\frac{r_{11}}{r_{12}}i_2 \qquad (\mathbf{9})$$

Iz $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{6})$ sledi:

$$r_{21}i_1' + r_{22}i_2' = k\,r_{11}i_1 + k\,r_{12}i_2 \qquad (\mathbf{10})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$, $(\mathbf{9})$ i $(\mathbf{7})$ u $(\mathbf{10})$ dobija se:

$$r_{21}ki_2 - r_{22}k\frac{r_{11}}{r_{12}}i_2 = -k\,r_{11}\frac{r_{22}}{r_{21}}i_2 + k\,r_{12}i_2$$

Sada ćemo celu prethodnu jednačinu podeliti sa ki_2 posle čega dobijamo:

$$r_{21} - r_{22}\frac{r_{11}}{r_{12}} = -r_{11}\frac{r_{22}}{r_{21}} + r_{12}$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$\frac{r_{21}r_{12} - r_{22}r_{11}}{r_{12}} = \frac{r_{21}r_{12} - r_{22}r_{11}}{r_{21}}$$

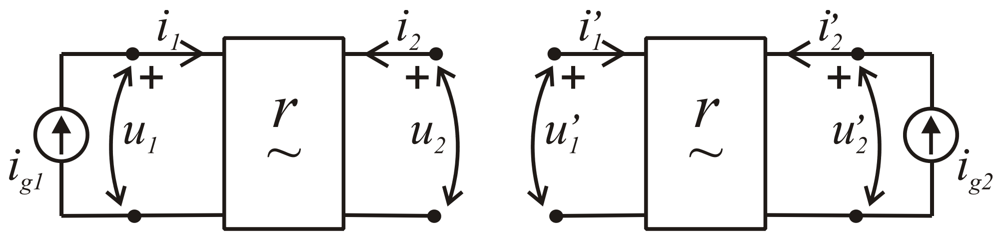
Sledi:

$$\boldsymbol{r_{12} = r_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Na osnovu prethodne relacije sledi da je recipročan rezistivan element opisan sa svoja tri parametra: r_{11}, r_{22}, r_{12} $(= r_{21})$.

***Dokaz*:** (za drugi slučaj)



$$i_{g2} = ki_{g1}$$

Odnosno:

$$i'_2 = ki_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$u'_1 = ku_2 \qquad (\mathbf{2})$$

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2, \qquad i_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = r_{11}i_1 \qquad (\mathbf{3})$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2, \qquad i_2 = 0 \Longrightarrow u_2 = r_{21}\, i_1 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u'_1 = r_{11}i'_1 + r_{12}i'_2, \qquad i'_1 = 0 \Longrightarrow i_2{}' = u'_1/\mathrm{r}_{12} \qquad (\mathbf{5})$$
$$u'_2 = r_{21}i'_1 + r_{22}i'_2, \qquad i'_1 = 0 \Longrightarrow u'_2 = r_{22}\, i'_2 \qquad (\mathbf{6})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{4})$ sledi:

$$u_2 = r_{21}\frac{i'_2}{k}$$

Pa uvrštavanjem $(\mathbf{5})$ u prethodnu dobijamo:

$$u_2 = r_{21}\frac{1}{k}\frac{\mathrm{u}'_1}{\mathrm{r}_{12}}$$

Konačno uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ dobija se:

$$u_2 = r_{21}\frac{1}{k}\frac{ku_2}{\mathrm{r}_{12}}$$

Sledi:

$$r_{12} = r_{21}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 24.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena g-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa, 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen g-parametrima je

$$g_{12} = g_{21}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \quad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i_1' = ki_2 \quad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa naponski kontrolisano predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2, \qquad u_2 = 0 \Longrightarrow i_1 = g_{11}u_1 \\ i_2 &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2, \qquad u_2 = 0 \Longrightarrow i_2 = g_{21}\,u_1 \qquad (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

za kolo sa slike 2:

$$\begin{aligned} i_1' &= g_{11}u_1' + g_{12}u_2', \qquad u_1' = 0 \Longrightarrow i_1' = g_{12}u_2' \qquad (\mathbf{4}) \\ i_2' &= g_{21}u_1' + g_{22}u_2', \qquad u_1' = 0 \Longrightarrow i_2' = g_{22}\,u_2' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{4})$ i $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{2})$ dobija se:

$$g_{12}u_2' = kg_{21}i_1$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u prethodnu jednačinu:

$$g_{12}ku_1 = kg_{21}i_1$$

Sledi:

$$\boldsymbol{g_{12} = g_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 25.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{h}$-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen $\boldsymbol{h}$-parametrima je

$$\boldsymbol{h_{12} = -h_{21}}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u'_2 = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i'_1 = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa prvo hibridno predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = h_{11}i_1 \qquad (\mathbf{3})$$
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow i_2 = h_{21}\, i_1 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1' = h_{11}i_1' + h_{12}u_2', \qquad u_1' = 0 \Longrightarrow h_{11}i_1' = -h_{12}u_2' \qquad \mathbf{(5)}$$
$$i_2' = h_{21}i_1' + h_{22}u_2'$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ i $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{5})$ dobijamo

$$h_{11}ki_2 = -h_{12}ku_1$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u prethodnu jednačinu dobijamo

$$h_{11}kh_{21}i_1 = -h_{12}kh_{11}i_1$$

Sledi:

$$\boldsymbol{h_{12}} = -\boldsymbol{h_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 26.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{k}$-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u_{gk}' = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i_l' = ki_k$, gde je $k = const$.

2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i_{gk}' = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u_l' = ku_k$, gde je $k = const$.

3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i_{gk}' vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i_l' u grani l. Ako je $i_{gl}' = Gu_{gl}$ tada će biti $i_l' = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen $\boldsymbol{k}$-parametrima je

$$\boldsymbol{k_{12}} = -\boldsymbol{k_{21}}$$

***Dokaz*:** (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulisane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi

$$i_1' = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa drugo hibridno predstavljanje predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}i_2$$
$$u_2 = k_{21}u_1 + k_{22}i_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow k_{21}u_1 = -k_{22}\, i_2 \quad (\mathbf{3})$$

za kolo sa slike 2:

$$i_1' = k_{11}u_1' + k_{12}i_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow i_1' = k_{12}i_2' \qquad (\mathbf{4})$$
$$u_2' = k_{21}u_1' + k_{22}i_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow \mathrm{u}_2' = \mathrm{k}_{22}\mathrm{i}_2' \qquad (\mathbf{5})$$

uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ i $(\mathbf{2})$ u $(\mathbf{3})$ dobijamo:

$$k_{21}\frac{u_2'}{k} = -k_{22}\frac{i_1'}{k}$$

uvrštavanjem $(\mathbf{4})$ i $(\mathbf{5})$ u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$k_{21}\frac{k_{22}i_2'}{k} = -k_{22}\frac{k_{12}i_2'}{k}$$

Sledi:

$$\boldsymbol{k_{12} = -k_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 27.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena a-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const$.
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const$.
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen a-parametrima je

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{a}] = \mathbf{1}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulisane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u'_2 = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i'_1 = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa prvo prenosno predstavljanje karakteristika glasi *za kolo sa slike 1:*

$$u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}(-i_2), \qquad u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -a_{12}\, i_2 \qquad (\mathbf{3})$$
$$i_1 = a_{21}u_2 + a\_22(-i_2)$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1' = a_{11}u_2' + a_{12}(-i_2'), \qquad u_1' = 0 \Rightarrow a_{11}\, u_2' = a_{12}i_2' \Rightarrow i_2' = u_2'\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (\mathbf{4})$$
$$i_1' = a_{21}u_2' + a_{22}(-i_2') \qquad (\mathbf{5})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo:

$$u_2' = -k\, a_{12}i_2 \qquad (\mathbf{6})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{6})$ u $(\mathbf{4})$ dobijamo:

$$i_2' = -ka_{11}i_2 \qquad (\mathbf{7})$$

Konačno uvrštavanjem $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{6})$ i $(\mathbf{7})$ u $(\mathbf{5})$ dobijamo:

$$ki_2 = -a_{21}ka_{12}i_2 + a_{22}ka_{11}i_2$$

Deljenjem prethodne jednačine sa ki_2 sledi:

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{a}] = \mathbf{1}$$

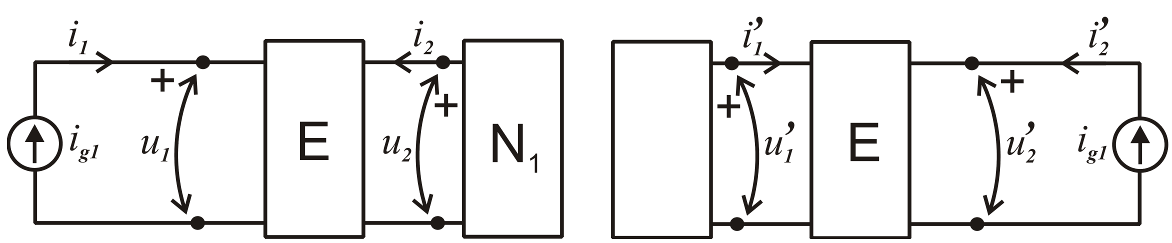
što je i trebalo dokazati.

Pitanje 28.

Simetrični rezistivni elementi sa dva pristupa.

Simetričan rezistivan element sa dva pristupa predstavlja užu klasu recipročnih elemenata. Oni se pri istim uslovima rada identično ponašaju bez obzira na redosled vezivanja njihovih pristupa.

Posmatrajmo jedan recipročan element sa dva para krajeva vezan u kolo na sledeće načine:



Kolo sa slike 1: na pristupu 1 deluje strujni generator i_{g1}, a pristup 2 je zatvoren mrežom sa jednim pristupom, N.

Kolo sa slike 2: na pristupu 2 deluje strujni generator $i_{g2}' = i_{g1}$ $(i_2' = i_1)$, a pristup 1 je zatvoren već pomenutom mrežom N.

Za simetričan element biće ispunjeno:

$$u_2' = u_1$$
$$u_1' = u_2$$
$$i_1' = i_2$$

Uslov simetričnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen njegovim parametrima glasi:

$$\boldsymbol{r_{11} = r_{22}}$$
$$\boldsymbol{g_{11} = g_{22}}$$
$$\boldsymbol{det\,[h] = 1}$$
$$\boldsymbol{det[k] = 1}$$
$$\boldsymbol{a_{11} = a_{22}}$$
$$\boldsymbol{b_{11} = b_{22}}$$

Zaključujemo, pošto je simetričan element istovremeno i recipročan, da simetrični rezistivni elementi sa dva pristupa imaju samo dva nezavisna parametra.

Pitanje 29.
Pasivnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa.

Opšti uslov pasivnosti glasi:

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako su rezistivni elementi elementi bez memorije (ne akumulišu energiju) imamo da je

$$W(t_0) = 0,$$

pa se pasivnost svodi na uslov

$$a(t_0, t) \geq 0$$

za bilo koje t_0 i $t > t_0$.

Uložena energija u rezistivni element od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određena je opštom relacijom:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u(\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Vidimo da mora da važi:

$$p(t) = u(t)i(t) \geq 0,$$

s tim da je ovde trenutna ulazna snaga elementa jednaka sumi ulaznih snaga na pristupima 1 i 2:

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t),$$

ako su smerovi napona i struja usaglašeni.

U slučaju linearnih elemenata uslov pasivnosti se može izraziti pomoću odgovarajućih parametara koji opisuju element. Za r-parametre važi:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (r_{11}i_1 + r_{12}i_2)i_1 + (r_{21}i_1 + r_{22}i_2)i_2$$

Uslov pasivnosti je:

$$r_{11}i_1^2 + (r_{12} + r_{21})i_1 i_2 + r_{22}i_2^2 \geq 0$$

odnosno,

$$r_{11}i_2^2\left[x^2 + \frac{x(r_{12} + r_{21})}{r_{11}} + \frac{r_{22}}{r_{11}}\right] \geq 0$$

gde je $x = \frac{i1}{i2}$.

Neka je

$$f(x) = x^2 + \frac{x(r_{12} + r_{21})}{r_{11}} + \frac{r_{22}}{r_{11}}$$

Uslov pasivnosti je onda zadovoljen u dva slučaja:

1) $r_{11} \geq 0$ i $f(x) \geq 0$
2) $r_{11} \leq 0$ i $f(x) \leq 0$ (a ovo ne može biti zadovoljeno jer je koeficijent uz x^2 pozitivan)

Prema tome:

$$f(x) \geq 0 \implies D \leq 0 \implies \left(\frac{r_{12} + r_{21}}{r_{11}}\right)^2 - 4\frac{r_{22}}{r_{11}} \leq 0$$

Pa zaključujemo da mora važiti:

$$r_{11} \geq 0 \text{ i } 4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2 \implies r_{22} \geq 0.$$

Relaciju

$$4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2$$

možemo napisati u obliku

$$4\det[r] \geq (r_{12} - r_{21})^2$$

Za uslov pasivnosti dobijamo:

$$\boldsymbol{r_{11} \geq 0}, \qquad \boldsymbol{r_{22} \geq 0}, \qquad \mathbf{det}[\boldsymbol{r}] \geq (\boldsymbol{r_{12} - r_{21}})^{\mathbf{2}}$$

Za recipročne elemente važi:

$$r_{12} = r_{21}$$

pa za uslov pasivnosti dobijamo:

$$\boldsymbol{r_{11} \geq 0}, \qquad \boldsymbol{r_{22} \geq 0}, \qquad \mathbf{det}\,[\boldsymbol{r}] \geq \mathbf{0}$$

Slično, preko ostalih parametara, uslov pasivnosti glasi:

1) $g_{11} \geq 0$, $g_{22} \geq 0$, $\det[g] \geq (g_{12} - g_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[g] \geq 0$
2) $h_{11} \geq 0$, $h_{22} \geq 0$, $\det[h] \geq (h_{12} - h_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[h] \geq 0$
3) $k_{11} \geq 0$, $k_{22} \geq 0$, $\det[k] \geq (k_{12} - k_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[k] \geq 0$
4) $\frac{a_{11}}{a_{21}} \geq 0$, $\frac{a_{22}}{a_{21}} \geq 0$, $4a_{11}a_{22} \geq (1 + \det[a])^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $a_{11}a_{22} \geq 1$
5) $\frac{b_{11}}{b_{21}} \geq 0$, $\frac{b_{22}}{b_{21}} \geq 0$, $4b_{11}b_{22} \geq (1 + \det[b])^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $b_{11}b_{22} \geq 1$

Pitanje 30.

Kontrolisani generator.

Kontrolisani generatori su rezistivni elementi sa dva pristupa koji se na izlaznim krajevima ponašaju kao generatori (naponski ili strujni), ali vrednost napona odnosno struje tih generatora nije nezavisna već je određena ulaznom veličinom (naponom ili strujom).

$$y = kx$$
$$x \in \{u_1, i_1\}$$
$$y \in \{u_2, i_2\}$$

Naponski generator kontrolisan strujom (transrezistansni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = r_0\, i_1$$

Karakteristike možemo predstaviti r-parametrima:

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna i izlazna otpornost elementa su jednake nuli - na ulazu se i fizički ponaša kao kratak spoj, a na izlazu kao naponski generator.

Karakteristike možemo predstaviti a-parametrima:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice r-parametara *uslov recipročnosti* je $r_{12} = r_{21}$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Na osnovu matrice *r*-parametara *uslov pasivnosti* je

$$r_{11} \geq 0, \qquad r_{22} \geq 0, \qquad \det[r] \geq (r_{12} - r_{21})^2$$

prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Strujni generator kontrolisan naponom (transkonduktansni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$i_1 = 0$$
$$i_2 = \gamma\, u_1$$

Karakteristike možemo predstaviti g-parametrima:

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna i izlazna provodnost elementa su jednake nuli, odnosna ulazna i izlazna otpornost su beskonačne.

Karakteristike možemo predstaviti a-parametrima:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -1/\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice g-parametara uslov recipročnosti je $g_{12} = g_{21}$, pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Na osnovu matrice g-parametara uslov pasivnosti je

$$g_{11} \geq 0, \qquad g_{22} \geq 0, \qquad \det[g] \geq (g_{12} - g_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Strujni generator kontrolisan strujom (strujni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$u_1 = 0$$
$$i_2 = \nu i_1$$

Karakteristike možemo predstaviti h-parametrima:

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nu & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna otpornost i izlazna provodnost elementa su jednake jednake nuli, odnosna izlazna otpornost je beskonačna.

Na osnovu matrice h-parametara uslov recipročnosti je $h_{12} = -h_2$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan.

Na osnovu matrice h-parametara uslov pasivnosti je

$$h_{11} \geq 0, \qquad h_{22} \geq 0, \qquad \det[h] \geq (h_{12} - h_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan.

Naponski generator kontrolisan naponom(naponski pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$i_1 = 0$$
$$u_2 = \mu\, u_1$$

Karakteristike možemo predstaviti k-parametrima:

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna otpornost elementa je beskonačna, a izlazna je jednaka nuli.

Na osnovu matrice k-parametara uslov recipročnosti je $k_{12} = -k_{21}$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan.

Na osnovu matrice k-parametara uslov pasivnosti je:

$$k_{11} \geq 0, \qquad k_{22} \geq 0, \qquad \det[k] \geq (k_{12} - k_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan.

Pitanje 31.
Operacioni pojačavač i osnovna kola sa operacionim pojačavačima.

Operacioni pojačavač (OP) je naponski generator kontrolisan naponom, pa su njegove karakteristike

$$i_1 = 0$$
$$u_2 = \mu\, u_1$$
$$R_{ul} = \infty$$
$$R_{iz} = 0$$

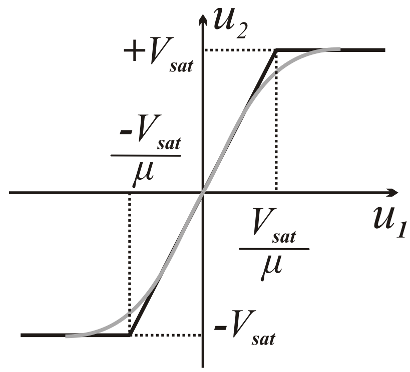
Karakteristika *idealnog* operacionog pojačavača je $\mu \to \infty$, odnosno pojačanje je veoma veliko (teoretski je beskonačno). Kod takvog pojačavača svakom konačnom izlaznom naponu $u_2 \neq 0$, odgovara ulazni napon vrednosti

$$u_1 = \frac{u_2}{\mu}\Big|_{\mu \to \infty} \to \ 0 \,.$$

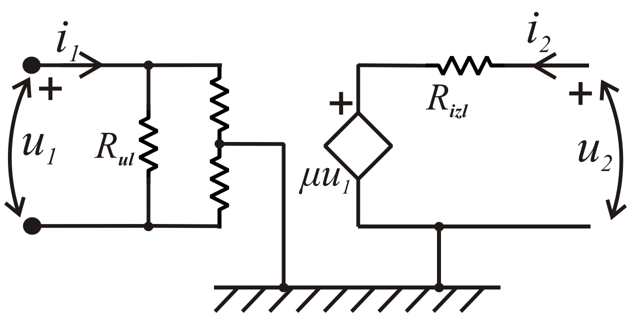
Kako je $u_1 = 0$ odlika kratkog spoja prikljucaka 1 i $1'$ to se za ulazne prikljucke OP-a kaze da su virtuelno kratkospojeni.

Realni operacioni pojačavač

Kod realnih OP-a, s obzirom na veliko pojacanje ($\mu > 10^4$) ulazni napon je *blizak* vrednosti nula u aktivnoj radnoj oblasti.



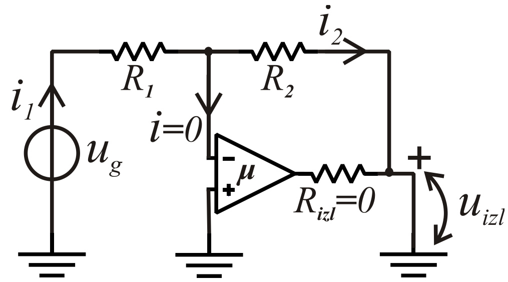
Pri veoma malim vrednostima ulaznog napona (oko nule) karakteristika je linearna sa nagibom μ. Pri većim vrednostima ulaznog napona karakteristika smanjuje nagib - pojačanje μ opada. Pri vrednostima ulaznog napona $u_1 > u_{1g}$ i $u_1 < u_{1d}$ nastaje zasićenje (saturacija) pojačavača, što znači da je izlazni napon jednak (približno) naponu saturacije V_{satg} odnosno $-V_{satd}$, a pojačanje opada na nulu. Zaključujemo da se realan OP ponaša kao linearan element u veoma uskoj oblsti ulaznih napona – $\frac{V_{satd}}{\mu} < u_1 < \frac{V_{satg}}{\mu}$, dok se za ulazne napone van ovog opsega na izlazu ponaša kao idealan naponski generator sa vrednostima napona V_{satg}, odnosno $-V_{satd}$.



Kola sa *idealnim* operacionim pojačavačima

Negativna povratna sprega

Proširenje linearne oblasti rada OP-a se ostvaruje primenom negativne povratne sprege.



Karakteristike idealnog OP-a

$$i_- = i_+ = 0 \Longrightarrow i_2 = i_1$$
$$u_1 = 0 \Longrightarrow v_A = 0$$

jednačine kola su:

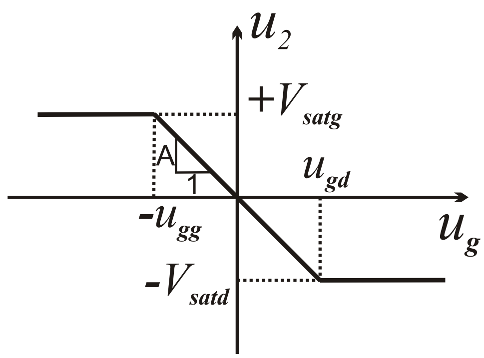
$$u_g = R_1 i_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{u_g}{R_1} \quad (\mathbf{1})$$
$$u_{izl} = -i_2 R_2 = -i_1 R_1 \quad (\mathbf{2})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{2})$ dobijamo

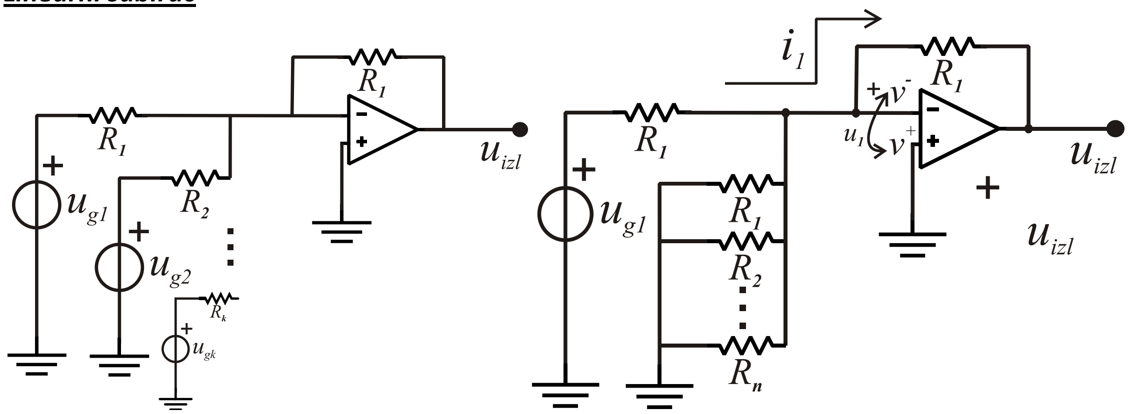
$$u_{izl} = -\frac{R_2}{R_1} u_g, \qquad A = -\frac{R_2}{R_1}$$

Ovim smo linearnu oblast ulazno-izlazne naponske karateristike proširili. Sada zasićenje nastupa pri vrednostima generatora:

$$u_{gg} = \frac{V_{satg}}{A}$$
$$u_{gd} = \frac{V_{satd}}{A}$$



Linearni sabirač



Kolo rešavamo superpozicijom.

$$v_+ = 0$$
$$u_1 = v_+ - v_- = 0$$

Pa sledi:

$$v_- = 0,$$

što znači da je mreža otpornika kratko spojena.

$$i_- = i_+ = 0 \Longrightarrow i_2 = i_1$$
$$u_{g1} = R_1 i_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{u_{g1}}{R_1}$$
$$u_{izl}^{(1)} = -i_1 R$$

uvrštavanjem i_1 u poslednju jednačinu dobijamo

$$u_{izl}^{(1)} = -\frac{R}{R_1} u_{g1}$$

Konačno, primenom superpozicije dobijamo

$$u_{izl} = \sum_{i=1}^{n} k_i u_{gi}\,, \qquad k_i = -R/R_i$$

Integrator

$$
\begin{aligned}
i_- = i_+ = 0 &\Longrightarrow i_2 = i_1 \\
u_1 = 0 &\Longrightarrow v_A = 0 \\
u_g = R_1 i_1 &\Longrightarrow i_1 = \frac{u_g}{R_1} \\
i_1 = i_2 = C_2 D^1 u_c &\Longrightarrow u_C = \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau \\
u_{izl} = -u_C &= -\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem i_1 u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$u_{izl} = -\frac{1}{C_2 R_1}\int_{-\infty}^{t} i_g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Kolo za diferenciranje

$$
\begin{aligned}
i_- = i_+ = 0 &=> i_2 = i_1 \\
u_1 = 0 &=> v_A = 0 \\
u_g &= u_c \\
i_1 &= C_1 D u_c = C_1 D u_g \\
u_{izl} &= -R_2 i_2 = -R_2 i_1
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem i_1 u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$u_{izl} = -R_2 C_1 D u_g \ .$$

[1] Operator D označava diferenciranje po vremenu, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

Pitanje 32.
Idealni transformator. Svojstvo konvertovanja impedanse.

Idealni transformator ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara.

Postoje dva tipa idealnog transformatora.

Karakteristika idealnog transformatora opisana je relacijama:

Tip I

$$u_1 = mu_2$$
$$i_1 = -\frac{i_2}{m}$$
$$[a] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

Tip II

$$u_1 = -mu_2$$
$$i_1 = i_2/m$$
$$[a] = \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -1/m \end{bmatrix}$$

Bezdimenzioni broj $m > 0$ naziva se prenosni broj idealnog transformatora (odnos transformacije).

Pored a-parametara, idealan transformator ima jos i b-, h- i k-parametre. Nema r- i g- parametre jer se ne može predstaviti u strujno kontrolisanom niti naponsko kontrolisanom obliku.

Ovo je u suštini rezitivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0\,.$$

Pošto je $p(t) = 0$ za svako u_1, i_1, u_2, i_2 sledi da je element pasivan, tačnije bez gubitaka. Otuda i naziv idealni jer on ukazuje da element ne troši nikakvu energiju već se energija uložena na jednom pristupu bez ikakvih gubitaka predaje mreži vezanoj za drugi pristup elementa.

Na osnovu matrice a-parametara uslov recipročnosti je det $[a] = 1$ pa zaključujemo da je ovaj element recipročan.

Uslov simetričnosti izražen a-parametrima glasi:

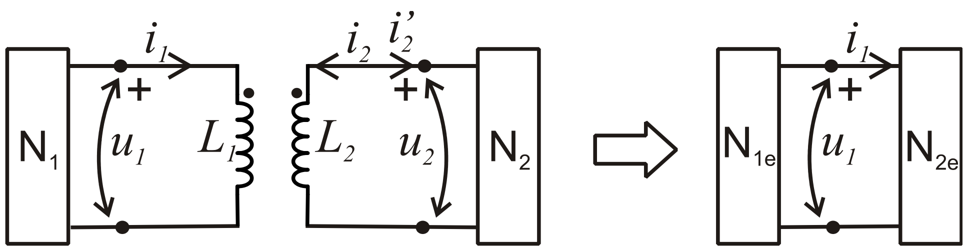
$$a_{11} = a_{22}$$

a u ovom slučaju se on svodi na

$$m = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1\,.$$

Naziv transformator se ovde koristi iz dva osnovna razloga. Prvi je taj što se ovim elementom vrši transformacija otpornosti (u opštem slučaju impedanse), a drugi je taj što se ovim elementom pri izvesnim aproksimacijama i uslovima može opisati induktivni transformator.

Osobina konvertovanja impedanse jeste jedna od osnovnih osobina koja se koristi u primeni idealnog transformatora. Neka je dato kolo sa dve mreže sa jednim pristupom N_1 i N_2 i idealnim transformatorom prenosnog broja m.



Neka je mreža N_2 linearna[2], dobro definisana[3] i strujno kontrolisana. Za pristup te mreže važi $u_2 = f(i_2')$, gde $f(i_2')$ predstavlja funkcionalnu zavisnost napona u_2 od struje i_2' te mreže.

Karakteristike idealnog transformatora su:

$$u_1 = m u_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2 = \frac{1}{m} i_2'$$

$$u_1 = m\, f(i_2') = -m\, f(i_2) = m\, f(m\, i_1) = m_2 f(i_1)$$

Veza napon-struja na ulazu $u_1 - i_1$ je isto oblika $u_1 = f(i_1)$, izuzev linearnog koeficijenta koji iznosi m^2.

Iz ovoga sledi da mreža N_1, vezana za pristup 1 idealnog transformatora "vidi" ekvivalentnu mrežu N_{2e}, koja je istog sastava (topologije) kao mreza N_2, uz napomenu da je izvršena tranformacija impedansi. Svaki otpornik otpornosti R_i mreže N_2 "preslikan" je na primarnu stranu u vidu otpornosti $R_{ie} = m^2 R_i$, svaki induktivni kalem L_j "preslikava se" u $L_{je} = m^2 L_j$, a svaki kondenzator elastanse $S_k = 1/C_k$ u

---

[2] *Mreža je linearna ako se sastoji od linearnih elemenata. Veza između napona i struje na pristupu toj mreži ne mora biti linearna.*

[3] *Nemamo pojma šta ovo znači*

$S_{ke} = m^2 S_k$, što znači da je izvršena transformacija impedansi i to sa istim značenjem (jer se kao skala faktor javlja poztivna vrednost m^2). Idealan transformator se zbog toga naziva i *pozitivni impedansni konvertor*.

Na isti način za naponsko kontrolisanu mrežu N_2, opisanu vezom $i_2' = g(u)$ na primarnoj strani bi se dobila veza u-i oblika: $i_1 = 1/m^2\, g(u_1)$. To znači da se svaki otpornik provodnosti G_i mreže N_2, preslikava na primarnu stranu u otpornik provodnosti: $G_{ie} = G_i/m^2$, svaki kalem recipročne induktivnosti $\Gamma_j = 1/L_j$ preslikava se u $\Gamma_{je} = \Gamma_j/m^2$, a svaki kondenzator kapacitivnosti C_k se preslikava u $C_{ke} = C_k/m^2$, pri čemu je topologija mreze N_{2e} ista kao i mreze N_2.

Pitanje 33.
Idealni žirator. Svojstvo invertovanja impedanse.

Idealni žirator ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara.

Postoje dva tipa idealnog žiratora.

Karakteristika idealnog žiratora opisana je relacijama:

<u>Tip I</u>

$$u_1 = -ri_2$$
$$u_2 = ri_1$$
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Tip II</u>

$$u_1 = ri_2$$
$$u_2 = -ri_1$$
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$$

Bezdimenzioni broj $r > 0$ naziva se žiratorska otpornost.

Pored r-parametara, idealan transformator ima jos i g-, a- i b-parametre. Nema h- i k- parametre.

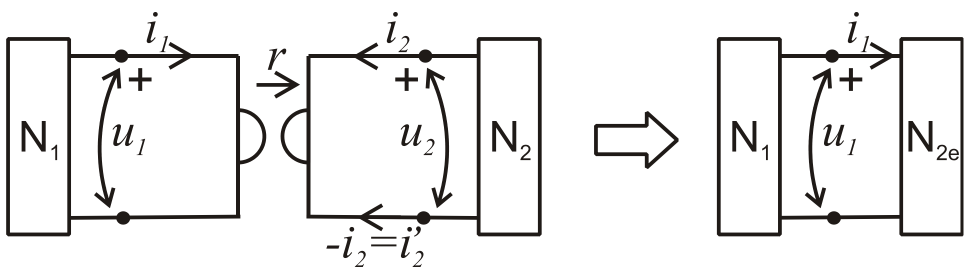
Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 0$ za svako u_1, i_1, u_2, i_2 sledi da je element pasivan, tačnije bez gubitaka. Otuda i naziv idealni jer on ukazuje da element ne troši nikakvu energiju već se energija uložena na jednom pristupu bez ikakvih gubitaka predaje mreži vezanoj za drugi pristup elementa.

Na osnovu matrice r-parametara uslov recipročnosti je $r_{12} = r_{21}$. Ovde važi da je $r_{12} = -r_{21}$, pa je idealni žirator antirecipročan.

Osobina invertovanja impedanse jeste jedna od osnovnih osobina koja se koristi u primeni idealnog žiratora. Neka je dato kolo sa dve mreže sa jednim pristupom N_1 i N_2 i idealnim žiratorom žiratorske otpornosti r.



Neka je mreža N_2 linearna, dobro definisana i strujno kontrolisana. Za pristup te mreže važi $u_2 = f(i_2')$, gde $f(i_2')$ predstavlja funkcionalnu zavisnost napona u_2 od struje i_2' te mreže.

Karakteristike idealnog žiratora su:

$$u_1 = -ri_2 = ri_2'$$
$$u_2 = ri_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u_2}{r}$$
$$i_1 = \frac{1}{r}f(i_2') = \frac{1}{r}f\left(\frac{u_1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}f(u_1)$$

Veza napon-struja na ulazu u_1-i_1 je: $i_1 = \frac{1}{r^2}f(u_1)$, što znači da se strujno kontrolisana mreža N_2 vezana za izlaz žiratora preslikava u ekvivalentnu naponsko kontrolisanu mrežu N_{2e}, sa skala faktorom $\frac{1}{r^2}$. Mreža N_{2e} je dualna mreži N_2 u smislu da svakom otporniku otpornosti R_i mreže N_2 odgovara provodnost $G_{ie} = \frac{R_i}{r^2}$ u mreži N_{2e}, svakom kalemu induktivnosti L_j odgovara kondenzator kapacitivnosti $C_{je} = \frac{L_j}{r^2}$, a svakom kondenzatoru elastanse $S_k = \frac{1}{C_k}$ odgovara kalem induktivnosti $L_{ke} = r^2/S_k$. Topologija mreze N_{2e} dualna je topologiji mreže N_2 u smislu da rednoj vezi elemenata odgovara paralelna veza i obrnuto.

Pitanje 34.
Negativni impedansni konvertor i invertor.

Negativni impedansni konvertor ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara

Postoje dva tipa negativnog impedansnog konvertora.

Karakteristika negativnog impedansnog konvertora opisana je relacijama:

Tip I

$$u_1 = ku_2$$
$$i_1 = i_2/k$$
$$[a] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1/k \end{bmatrix}$$

Tip II

$$u1 = -ku_2$$
$$i1 = -i_2/k.$$
$$[a] = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$$

Pored a-parametara, negativni impedansni konvertor ima još i b-, h- i k-parametre. Nema r- i g-parametre jer se ne može predstaviti u strujno kontrolisanom niti naponsko kontrolisanom obliku.

Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 2u_2i_2$, a u_2 i i_2 međusobno nezavisne veličine, $p(t)$ može biti negativna veličina, pa je negativni impedansni konvertor aktivan element.

Na osnovu matrice a-parametara uslov recipročnosti je det $[a] = 1$, a pošto je det $[a] = 1$ zaključujemo da je ovaj element antirecipročan.

Sličnim postupkom kao kod transformatora (pozitivni impedansni konvertor) zaključujemo da negativni impedansni konvertor vrši konverziju impedanse ali sa negativnim predzankom. Ako se za izlazne krajeve spoji pasivni otpornik otpornosti $R_i > 0$ element se, gledano sa ulaznih krajeva ponaša kao otpornik negativne otpornosti: $R_{ie} = -k^2R_i$. Na isti način se i induktivnost L_j, vezana za izlaz preslikava u $L_{je} = -k^2L_j$, a kapacitivnost C_k, u negativnu kapacitivnost $C_{ke} = -C_k/k^2$, odnosno proizvoljna mreža

N_2 spojena za pristup 2 preslikava se u mrezu N_{2e} iste topologije, ali sa elementima navedenih negativnih vrednosti.

Negativni impedansni invertor ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara

Postoje dva tipa negativnog impedansnog invertora

Karakteristika negativnog impedansnog invertora opisana je relacijama:

Tip I

$$u_1 = -ri_2$$

$$u_2 = -r\, i_1$$

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$$

Tip II

$$u_1 = ri_2$$

$$u_2 = ri_1$$

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

Pored r-parametara, negativni impedansni invertor ima još i g-, a- i b-parametre. Nema h- i k-parametre.

Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 2u_2i_2$, a u_2 i i_2 međusobno nezavisne veličine, $p(t)$ može biti negativna veličina, pa je negativni impedansni invertor aktivan element.

Na osnovu matrice r-parametara uslov recipročnosti je $r_{12} = r_{21}$, što jeste tačno, tako da zaključujemo da je ovaj element recipročan.

Uslov simetričnosti izražen r-parametrima je $r_{11} = r_{22}$, što jeste tačno, tako da zaključujemo da je ovaj element simetričan.

Element se ponaša slično žiratoru - vrši invertovanje impedanse vezane za izlazni pristup, ali sa negativnim predzankom. Svakom otporniku, kalemu i kondenzatoru iz mreže N_2, sa vrednostima R_i, L_j, C_k, odgovaraju elementi vrednosti: $R_{ie} = -\frac{r^2}{R_i}$, $C_{je} = -L_j/r^2$, $L_{ke} = -r^2 C_k$ ekvivalentne mreže N_{2e}, gledano sa ulaznog pristupa. Topologija preslikane mreže se menja na isti način kao i u slučaju žiratora. Topologija mreže N_{2e} dualna je topologiji mreže N_2: rednoj vezi elemenata odgovara paralelna veza i obrnuto.

Pitanje 35.

Realizacije rezistivnih elemenata sa dva pristupa u opštem slučaju.

Svaki rezistivni element sa dva pristupa može se realizovati pomoću kontrolisanih generatora i linearnih otpornika.

Element opisan r-parametrima

$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

može se realizovati mrežom sa dva otpornika i dva transrezistansna pojačavača.

Element opisan g-parametrima

$$i_1 = g_{11} u_1 + g_{12} u_2$$
$$i_2 = g_{21} u_1 + g_{22} u_2$$

može se realizovati mrežom sa dva otpornika i dva transkonduktansna pojačavača.

Element opisan h-parametrima

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

može se realizovati pomoću dva otpornika, jednog naponskog pojačavača i jednog strujnog pojačavača.

Element opisan k-parametrima

$$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}i_2$$
$$u_2 = k_{21}u_1 + k_{22}i_2$$

može se realizovati pomoću dva otpornika, jednog naponskog pojačavača i jednog strujnog pojačavača

Realizacija T-mreže

Sledećim postupkom nalazimo parametre T-mreže. Element opisan r-parametrima

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

Transformišimo jednačine na sledeći način:

$$\begin{aligned}
u_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{12}i_1 - r_{12}i_1 = \underbrace{(r_{11} - r_{12})}_{r_a}i_1 + \underbrace{r_{12}}_{r_b}(i_2 + i_1) \\
&= r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{12}i_2 - r_{12}i_2 \\
u_2 &= r_{21}i_1 + (r_{22} - r_{12})i_2 + r_{12}i_2 + r_{12}i_1 - r_{12}i_1 \\
&= \underbrace{(r_{22} - r_{12})}_{r_c}\mathrm{i}_2 + \underbrace{r_{12}}_{r_b}(i_2 + i_1) + i_1\underbrace{(r_{21} - r_{12})}_{r_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_a &= r_{11} - r_{12} \\
r_b &= r_{12} \\
r_c &= r_{22} - r_{12} \\
r_m &= r_{21} - r_{12}
\end{aligned}$$

36. Realizacije idealnog transformatora pomoću kontrolisanih generatora

Jednačine idealnog transformatora za *Tip I:*

$$u_1 = mu_2$$

$$i_1 = -\frac{i_2}{m}$$

Možemo ih predstaviti h-parametrima:

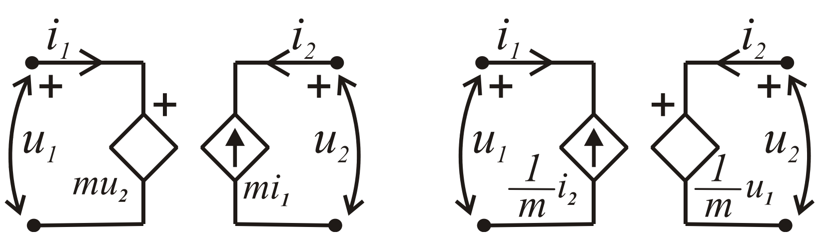
$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću jednog naponskog i jednog strujnog generatora

Ako ih predstavimo k-parametrima:

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{1}\!/_{m} \\ {}^{1}\!/_{m} & 0 \end{bmatrix}$$

transformator realizujemo na sledeći način:



Slično se realizuje i idealni transformator *Tipa II.*

U praksi bi se strujni pojačavač realizovao bipolarnim tranzistorom, a naponski pojačavač pomoću OP-a sa negativnom povratnom spregom, s tim što ovakvi pojačavači nisu idealni: imali bi parazitne efekte (pre svega konačnu ulaznu i izlaznu otpornost), pa bi se i realizovani element razlikovao od idealnog transformatora.

Pitanje 37.
Realizacija idealnog žiratora pomoću kontrolisanih generatora.

Jednačine idealnog žiratora za *Tip I:*

$$u_1 = -ri_2$$
$$u_2 = ri_1$$

Možemo ih predstaviti h-parametrima:

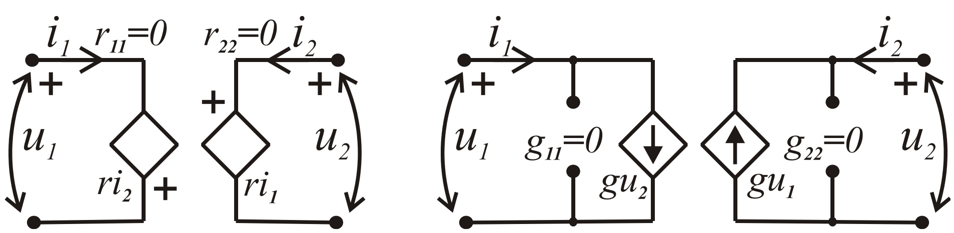
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću dva idealna naponska generatora kontrolisana strujom (transrezistansnim pojačavačima).

Ako ih predstavimo g-parametrima:

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću dva idealna strujna generatora kontrolisana naponom (transkonduktansnim pojačavačima).



Slično se realizuje i idealni žirator tipa II.

Realizacija pomoću dva kontrolisana naponska generatora je naročito pogodna, jer se operacionim pojačavačima mogu ostvariti kvalitetni kontrolisani generatori tog tipa.

Pitanje 38.

Induktivni elementi sa dva pristupa - osnovne jednačine

Ovi elementi su poznatiji pod nazivm induktivni transformatori i opisanu su relacijama:

$$F_1(\Phi_1, \Phi_2, i_1, i_2, t) \;=\; 0$$
$$F_2(\Phi_1, \Phi_2, i_1, i_2, t) \;=\; 0$$

gde su Φ_1, Φ_2, i_1, i_2 – fluksevi i struje na pristupima elementa.

Ako se karakterstika elementa može iskazati relacijama

$$\Phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$
$$\Phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

tada je element strujno kontrolisan.

Ako se karakterstika elementa može iskazati relacijama

$$i_1 \;=\; f1(\Phi_1, \Phi_2)$$
$$i_2 \;=\; f2(\Phi_1, \Phi_2)$$

tada je element kontrolisan fluksom.

Pristup 1 nazivamo primar, a pristup 2 sekundar.

Struja i_1 u primarnom namotaju sa N_1 zavojaka stvara magnetsko polje $\overrightarrow{H_1}$, koje će delom postojati u sekundarnom namotaju, a struja i_2 u sekundarnom namotaju sa N_2 zavojaka stvara magnetsko polje $\overrightarrow{H_2}$, koje će delom postojati u primarnom namotaju, što znači da je fluks jednog namotaja određen sopstvenom strujom, ali i strujom drugog namotaja (pristupa):

Φ_1 - Ukupan fluks primara.

Φ_2 - Ukupan fluks sekundara.

Φ_{11} - Sopstveni fluks primara izazvan sopstvenom strujom

Ako sopstveni fluks razdvojimo na deo fluksa koji ne sudeluje u sprezi kalemova ($\Phi_{\sigma 1}$) i na deo fluksa koji sudeluje ($\Phi_{\mathrm{M}1}$) možemo pisati $\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1}$

Odnosno, za jedan navojak:

$\Phi_{11}^{(1)} = \frac{\Phi_{11}}{N_1}$ – Sopstveni fluks *jednog navojka* primara izazvan sopstvenom strujom

$\Phi_{11}^{(1)} = \Phi_{\sigma 1}^{(1)} + \Phi_{M1}^{(1)}$

Φ_{22} – Sopstveni fluks sekundara izazvan sopstvenom strujom.

Ako sopstveni fluks razdvojimo na deo fluksa koji ne sudeluje u sprezi kalemova ($\Phi_{\sigma 2}$) i na deo fluksa koji sudeluje (Φ_{M2}) možemo pisati $\Phi_{22} = \Phi_{\sigma 2} + \Phi_{M2}$

Odnosno, za jedan navojak:

$\Phi_{22}^{(1)} = \frac{\Phi_{22}}{N_2}$ – Sopstveni fluks *jednog navojka* sekundara izazvan sopstvenom strujom

$\Phi_{22}^{(1)} = \Phi_{\sigma 2}^{(1)} + \Phi_{M2}^{(1)}$

Φ_{12} – Fluks primara izazvan strujom sekundara.

$$\Phi_{12} = N_1 \Phi^{(1)}{}_{M2} = N_1 \frac{\Phi_{M2}}{N_2}$$

Φ_{21} – Fluks sekundara izazvan strujom primara.

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi^{(1)}{}_{M1} = N_2 \frac{\Phi_{M1}}{N_1}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}$$

Znaci $\pm$ uz međusobne flukseve označavaju da se oni sabiraju ili oduzimaju od sopstvenog fluksa, zavisno od načina motanja kalemova i orjentacije struje u njima.

Kod transformatora postoji zajedničko magnetsko polje primara i sekundara, tj. kalemovi su induktivno spregnuti.

Konvencija o tačkama: Ako struje primara i sekundara imaju orijentacije ka (ili od) označenih krajeva, tada se međusobni fluks sabira sa sopstvenim. Ako je jedna struja orijentisana ka, a druga od označenog kraja, tada se sopstveni i međusobni fluksevi oduzimaju.

Pitanje 39.

Linearan transformator

Linearan transformator je element koji ima samo induktivna svojstva i koji je linearan, odnosno fluksevi su direktno srazmerni strujama koje ih izazivaju. Koeficijent srazmernosti je induktivnost i za model fizičkog transformatora uvek ćemo smatarti da je on pozitivan. Posmatraćemo samo vremenski nepromenljiv transformator.

$$\Phi_{11} = L_{11} i_1$$
$$\Phi_{12} = L_{12} i_2$$
$$\Phi_{21} = L_{21} i_1$$
$$\Phi_{22} = L_{22} i_2$$

L_{11}, L_{22} - sopstvene induktivnosti, L_{12}, L_{21} - međusobne induktivnosti.

Uslov recipročnosti za induktivne transformatore je

$$L_{12} = L_{21}$$

Bezdimenzioni broj $m = \frac{N_1}{N_2}$ nazivamo odnos tranformacije (prenosni broj transformatora). Tada je:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} = L_{11} i_1 \pm L_{12} i_2$$
$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21} = L_{22} i_2 \pm L_{21} i_1$$
$$\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{11} i_1$$
$$\Phi_{21} = N_2 \Phi^{(1)}{}_{\mathrm{M}1} = \mathrm{N}_2 \frac{\Phi_{\mathrm{M}1}}{N_1} = L_{21} i_1 \Longrightarrow$$
$$\Phi_{\mathrm{M}1} = \frac{N_1}{N_2} L_{21} i_1 = m L_{21} i_1$$

$$\left.\begin{matrix} \Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{11} i_1 \\ \Phi_{\mathrm{M}1} = m L_{21} i_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow L_{11} = L_{\sigma 1} + m L_{21}$$

Slično,

$$L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}$$

$L_{\sigma 1}$ i $L_{\sigma 2}$ nazivaju se rasipna induktivnost.

Sledeće oznake se ravnopravno koriste

$$L_1 \equiv L_{11}, \qquad L_2 \equiv L_{22}\,.$$

Napon na krajevima transformatora:

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Koeficienti lineranog transformatora.

Koeficijent rasipanja iskazuje koji deo sopstvenih flukseva ne sudeluje u sprezi kalemova. Za primar

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{\sigma 1}}{\Phi_{11}},$$

gde je $\Phi_{\sigma 1}$ rasipni fluks primarnog namotaja. Za sekundar

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{\sigma 2}}{\Phi_{22}},$$

gde je $\Phi_{\sigma 2}$ rasipni fluks sekundarnog namotaja.

Koeficijent zajedničkih flukseva iskazuje koji deo sopstvenih flukseva sudeluje u sprezi kalemova. Za primar

$$k_1 = \frac{\Phi_{M1}}{\Phi_{11}} = \frac{mL_{21}}{L_1},$$

gde je Φ_{M1} zajednički fluks primarnog namotaja. Za primar

$$k_2 = \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_{22}} = \frac{1}{m}\frac{L_{12}}{L_2},$$

gde je Φ_{M2} zajednički fluks primarnog namotaja.

Koeficient rasipanja i zajednickih flukseva su komplementarni:

$$k_1 + \sigma_1 = 1$$
$$k_2 + \sigma_2 = 1\,.$$

Koeficijent sprege transformatora je

$$k = \sqrt{k_1 k_2}\,,$$

za njega uvek važi:

$$0 \leq k \leq 1\,,$$

a za recipročne elemente važi i

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

tj.

$$L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Za $k = 0$ – nema sprege, kalemovi su usamljeni.

Za $k = 1$ – nema gubitaka, kalemovi su savršeno spregnuti.

Pitanje 40.
Energija i pasivnost linearnog transformatora.

Neka su parametri recipročnog, vremenski nepromenljivog linearnog transformatora L_1 - sopstvena induktivnost primara, L_2 - sopstvena induktivnost sekundara, k - koeficijent sprege. Važi $L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}$.

Opšti uslov pasivnosti

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

$W(t_0)$ – akumulirana energija u trenutku t_0,

$a(t_0, t)$ – rad koji se ulaže u transformator u periodu od t_0 do $t > t_0$.

$$a(t_0, t) = W(t) - W(t_0) + a_m(t_0, t)$$

Za vremenski nepromenljiv linearni transformator važi $a_m(t_0, t) = 0$, pa je

$$a(t_0, t) = W(t) - W(t_0)$$

Pa se uslov pasivnosti svodi na

$$W(t) \geq 0$$

$W(t)$ – akumulirana energija u trenutku t.

Uloženi rad možemo predstaviti i na sledeći način:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau$$

gde

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t)$$

predstavlja ulaznu snagu elementa.

Napon na krajevima transformatora:

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= (L_1 D i_1 \pm L_{12} D i_2) i_1 + (L_2 D i_2 \pm L_{12} D i_1) i_2 \\ &= Da(t_0, t) \\ &= DW(t) \quad - \quad \underbrace{DW(t_0)}_{=0, jer\ je\ W(t_0)=const} \\ &= \frac{dW(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = L_1 i_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\left(i_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right) + L_2 i_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2\right]}_{W(t)}$$

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Dakle, linearan transformator je pasivan ako:

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \geq 0$$

Odnosno:

$$\frac{1}{2} L_1 i_2^2 \left[x^2 \pm 2 \frac{L_{12}}{L_1} x + \frac{L_2}{L_1}\right] \geq 0,$$

gde je $x = \frac{i_1}{i_2}$.

Neka je

$$f(x) = x^2 \pm 2 \frac{L_{12}}{L_1} x + \frac{L_2}{L_1}.$$

Uslov pasivnosti je zadovoljen u dva slučaja:

Slučaj 1.

$$L_1 \geq 0 \text{ i } f(x) \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \implies D \leq 0 \implies 4\frac{L_{12}^2}{L_1^2} - 4\frac{L_2}{L_1} \leq 0$$

Zaključujemo da mora važiti:

$$L_{12}^2 \leq L_1 L_2$$

Odnosno,

$$0 < L_{12} \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

pa sledi

$$0 < k \leq 1 \,.$$

Slučaj 2.

$$L_1 \leq 0 \text{ i } f(x) \leq 0$$

Ovo ne može biti zadovoljeno jer je koeficijent uz x^2 pozitivan, a i L_1 je uvek pozitivno.

Ako posmatramo matricu

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & \pm L_{12} \\ \pm L_{12} & L_2 \end{bmatrix}$$

uslov pasivnosti je

$$\det[L] \geq 0.$$

Podrazumeva se da su induktivnosti pozitivne vrednosti.

Pitanje 41.
Transformator sa savršenom spregom.

Za savršen transformator ($k = 1$) važi da nema rasipanja fluksa, pa sledi

$$\Phi_{\sigma 1} = 0 \Longrightarrow L_{\sigma 1} = 0$$
$$\Phi_{\sigma 2} = 0 \Longrightarrow L_{\sigma 2} = 0$$

$$L_1 = L_{11} = L_{\sigma 1} + mL_{21} = mL_{21}$$
$$L_2 = L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m}L_{12} = \frac{1}{m}L_{12}$$

Za recipriočan element $L_{12} = L_{21}$, pa je $L_1 L_2 = L_{12}^2$. Sledi $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$.

Napon na krajevima savršenog transformatora je

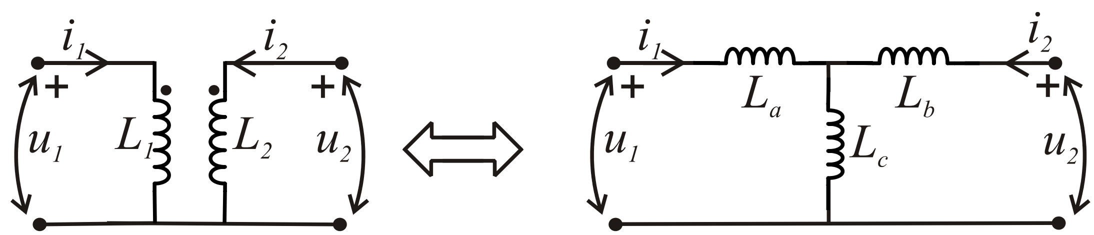
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1\left(Di_1 \pm \frac{1}{m}Di_2\right) \\ u_2 &= \frac{L_1}{m}\left(\frac{1}{m}Di_2 \pm Di_1\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = \pm m u_2$$

Savršeni transformator je induktivni element. Da bi postojao napon (različit od nule) na njegovim pristupima, potrebno je da se fluks menja sa vremenom t. Zato linearni transformator, a time i savršeni transformator kao specijalni slučaj linearnog transformatora ne prenose konstantne signale. Nasuprot tome, idealan transformator je rezistivan element i kod njega nema tih ograničenja.

Pitanje 42.

Ekvivalentna T-šema linearnog transformatora.

Posmatajmo recipročan, vremenski nepromenljiv linearni transformator



Obratiti pažnju da su donji krajevi transformatora kratko spojeni

Linearni transformator se može predstaviti ekvivalentnom T mrežom čiji parametri L_a, L_b, L_c nisu u međusobnoj sprezi.

Do ekvivalentne šeme dolazi se na sledeći način.

Polazimo od jedačina transformatora:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Znak „+“ odgovara oznakama na slici.

Ako prvu jednačinu proširimo dodavanjem i oduzimanem člana $L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, a drugu sa $L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$, dobijaju se jednačine:

$$\begin{aligned} u_1 &= (L_1 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= (L_2 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Odgovarajuce relacije mreže T su:

$$u_1 = L_a \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_c \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = L_b \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_c \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t}$$

pa da bi mreže bile ekvivalntne potrebno je da je:

$$L_a = L_1 - L_{12}, \qquad L_b = L_2 - L_{12}, \qquad L_c = L_{12}$$

kada se fluksevi sabiraju, odnosno:

$$L_a = L_1 + L_{12}, \qquad L_b = L_2 + L_{12}, \qquad L_c = -L_{12}$$

kada se fluksevi oduzimaju.

Pitanje 43.

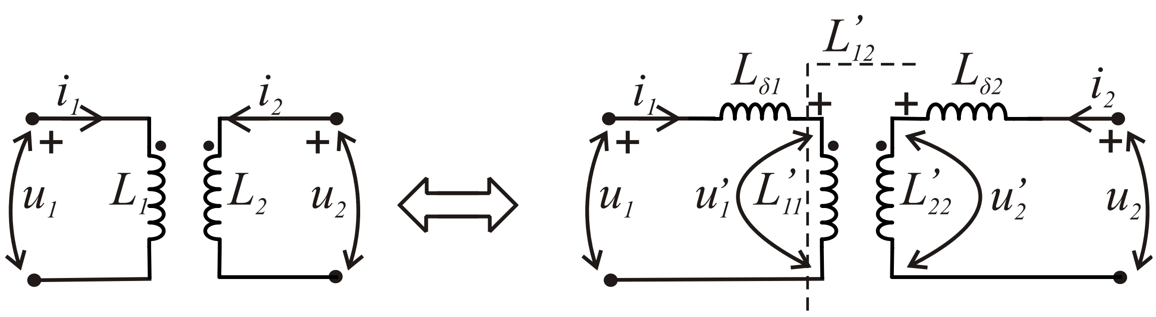
Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi savršeni transformator.

Za dobijanje ove ekvivalentne mreže potrebno je posmatrati sopstvene flukseve rastavljene na rasipne flukseve i flukseve koji su zajednički za oba namotaja:

$$\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + m L_{21} i_1$$
$$\Phi_{22} = \Phi_{\sigma 2} + \Phi_{\mathrm{M}2} = L_{\sigma 2} i_2 + \frac{1}{m} L_{21} i_2$$

$$L_1 = L_{11} = L_{\sigma 1} + m L_{21}$$
$$L_2 = L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}$$

Za recipročan element važi $L_{12} = L_{21}$.



Jednačine linearnog transformatora se mogu predstaviti u obliku:

$$u_1 = (L_{\sigma 1} + m L_{12}) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \left(L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}\right) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Znak „+“ odgovara oznakama na slici.

Jednačine linearnog transformatora se mogu predstaviti kao:

$$u_1 = (L_{\delta 1} + mL_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \left(L_{\delta 2} + \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}$$

Sledi da se fluksevi sabiraju.

Ove relacije možemo pisati:

$$u_1 = L_{\delta 1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_1'$$
$$u_2 = L_{\delta 2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u_2'$$

gde je

$$u_1' = mL_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2' = \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm \frac{1}{m}L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Transformator sa induktivnostima

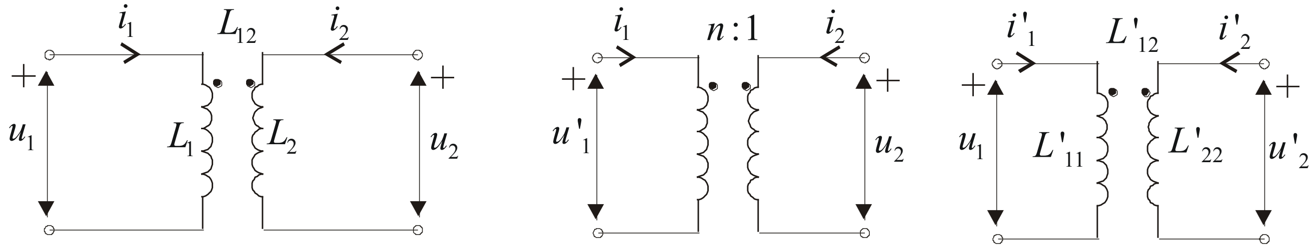
$$L_{11}' = mL_{12}$$
$$L_{22}' = \frac{1}{m}L_{12}$$
$$L_{12}' = L_{12}$$

je sa savršenom spregom – njegov koeficijent sprege je:

$$k' = \frac{L_{12}'}{\sqrt{L_{11}'L_{22}'}} = 1$$

Rasipanje smo izvodili u vidu induktivnosti $L_{\delta 1}$ i $L_{\delta 2}$.

Pitanje 44.
Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi idealan transformator.



Jednačine recipročnog linearnog transformatora sa prve slike su:

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = L_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

uvodimo smene $u_2' = nu_2$ i $i_2' = -\frac{1}{n} i_2$ koje odgovaraju transformatoru na drugoj slici.

Jednačine koje odgovaraju relacijama idealnog transformatora prenosnog broja n koji je prikazan na slici 2.

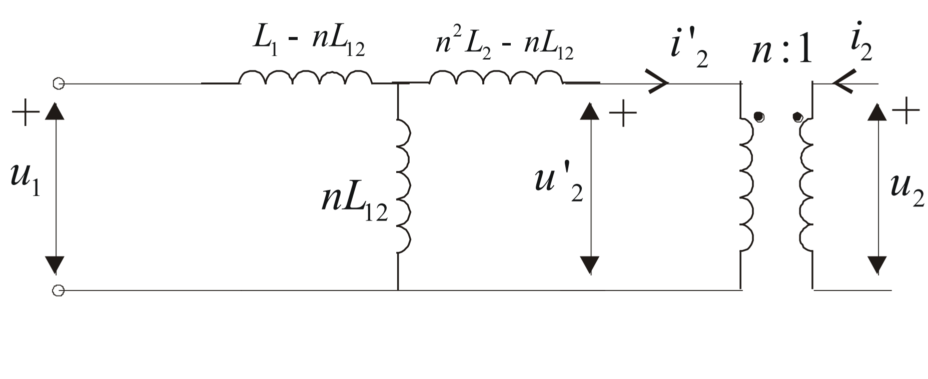
Ovim smenama jednačine postaju:

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (nL_{12}) \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = (nL_{12}) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (n^2 L_2) \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$

Ove jednačine odgovaraju transformatoru na trećoj slici, a parametri imaju vrednost:

$$L_{11}' = L_1, \qquad L_{22}' = n^2 L_2, \qquad L_{12}' = nL_{12}$$

Treći transformator možemo prikazati i ekvivalentnom T-mrežom. Idealni transformator sprečava galvansku vezu ulaznog i izlaznog priključka.



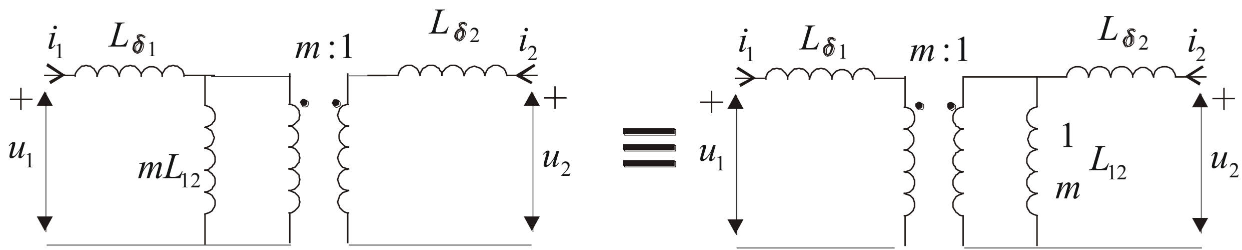
broj n može biti proizvoljan, mada je najbolje da je jednak prenosnom broju transformatora:

$$n = m = \frac{N_1}{N_2}$$

u tom slučaju je:

$$\begin{aligned} L_1 - nL_{12} &= L_1 - mL_{12} = L_{\delta 1} \\ n^2 L_2 - nL_{12} &= m^2 L_2 - mL_{12} = m^2 L_{\delta 2} \\ nL_{12} &= mL_{12} \end{aligned}$$

s obzirom na svojstvo konvertovanja idealnog transformatora šema može biti:



ako je transformator savršen tada je $L_{\delta 1} = 0$, $L_{\delta 2} = 0$, $L_1 = mL_{12} = m^2 L_2$.

Pitanje 45.

Transformator sa više namotaja.

Transformator sa više namotaja je induktivni element sa više pristupa. Induktivni element sa tri pristupa je opisan relecijama

$$F_1(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$
$$F_2(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$
$$F_3(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$

Ako je element i-kontrolisan i linearan, tada se on može opisati sledećim relacijama

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3$$
$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

ili u matričnom obliku

$$[F] = [L] \cdot [i],$$

gde je $[F]$ matrica flukseva, $[L]$ matrica induktansnih parametara, a $[i]$ matrica struja. Za recipročne elemente važi $L_{ij} = L_{ji}$, za $j \neq i$.

Međusobne induktivnosti imaju algebarsko značenje (bitno je da li su pozitivne ili negativne). Induktivni element sa tri pristupa fizički se stvaruje stavljanjem tri kalema sopstvenih induktivnosti $L_i = L_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ na zajedničko jezgro. Sopstvene induktivnosti uvek smatramo pozitivnim.

Zgodno je i međusobne induktivnosti smatrati pozitivnim, a da znaci „$+$“ i „$-$“ ukazuju na međusobnu orijentaciju flukseva, koji potiču od različitih struja.

U konkretnom slučaju prilazanom na slici, smatrajući da je reč o strujno kontrolisanom, linearnom i recipročnom elementu, karakteristika elementa je

$$\Phi_1 = \ L_{11}i_1 - L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\Phi_2 = \ -L_{12}i_1 + L_{22}i_2 - L_{23}i_3$$
$$\Phi_3 = \ L_{13}i_1 - L_{23}i_2 + L_{33}i_3$$

Pitanje 46.

Formiranje osnovnih jednačina linearnih električnih kola.

Analiza električnih kola podrazumeva određivanje odziva (struja i napona). Pod ekscitacijom podrazumevamo struje i napone generatora, a akumulisane energije predstavljaju početne uslove. Oni su definisani kao struje kalemova i naponi kondenzatora. $i_{Lj}(t_0)$, $u_{Cj}(t_0)$.

Za kolo kome odgovara povezan graf sa b grana i c čvorova osnovne jednačine kola su oblika

$$(KZS) \qquad \sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l = 0\,; \qquad k = 1, 2, \dots, n; \qquad n = c - 1$$

$$(KZN) \qquad \sum_{l=1}^{b} b_{kl} u_l = 0; \qquad k = 1, 2, \dots, m; \qquad m = b - n \qquad\qquad (*)$$

$$(KE) \qquad F_e(x_e, y_e, t) = 0; \qquad l = 1, 2, \dots, b$$

gde su a_{kl}, b_{kl} u kirhofovim jednačinama (KZS) i (KZN) su koeficijenti sa vrednostima +1, -1, 0. (KE) su karakteristike elemenata, gde $x_e, y_e \in \{i, u, q, \Phi\}$.

Jednačine $(*)$ u opštem slučaju predstavljaju sistem nelinearnih, i vremenski promenljivih (sa koeficijentima koji zavise od vremena) diferencijalnih jednačina po promenljivima u_l, i_l – što je određeno karakterom elementa u kolu. Kada su elementi u koli linearni i vremenski nepromenljivi

$$(KE) \qquad \begin{aligned} u_{Ri} &= R_i i_{Ri}, && i = 1, \dots, b_R, && b_R \text{ – broj otpornika u kolu} \\ u_{Li} &= L_i \frac{di_{Li}}{dt}, && i = 1, \dots, b_L, && b_L \text{ – broj kalemova u kolu} \\ i_{Ci} &= C_i \frac{du_{Ci}}{dt}, && i = 1, \dots, b_C, && b_C \text{ – broj kondenzatora u kolu} \end{aligned}$$

Zamenom ovih relacija u (KZS) i (KZN) dobijamo sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima pa naponima i strujama grana.

Pitanje 47.

Svođenje jednačina kola na jednu diferencijalnu jednačinu odziva.

Polazeći od sistema jednačina kola odredimo red kola. Neka je to r. Sistem linearnih diferencijalnih jednačina r-tog reda (dmatramo da elementi kola linearni i vremenski nepromenljivi) može se preurediti u pogodniji oblik za rešavanje. Sistem možemo svesti na jednu diferencijalnu jednačinu r-tog reda, po željenoj promenljivoj $y \in \{u_l, i_l\}$, $l = 1, \dots, b$, b-broj grana u kolu. Dakle, eliminišemo sve promenljive osim y i sistem jednačina kola se svodi na

$$a_r \frac{d^r y(t)}{dt^r} + a_{r-1} \frac{d^{r-1} y(t)}{dt^{r-1}} + \cdots + a_1 \frac{d^1 y(t)}{dt^1} + a_0 y(t) = F(t),$$

gde je a_i, $i = 0, 1, \dots, r$ konstante koje zavise od parametara mreže vezane za krajeve nezavisnih generatora, $F(t)$ funkcija vremena koja je određena nezavisnim generatorima.

Zgodno je svesti da $a_r = 1$. Ovde uvodimo operator izvoda $D \equiv \frac{d}{dt}$. Gornja jednačina sada postaje

$$A(D)y(t) = F(t)$$

gde je $A(D)$ operatorski polinom nad promenljivom $y(t)$ oblika

$$A(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0, \qquad (a_r = 1)$$

Pitanje 48.

Svođenje jednačina kola na sistem jednačina stanja.

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina električnog kola r-tog reda može se svesti na sistem od r nezavisnih diferencijalnih jednačina prvog reda po promenljivima koje definišu stanje električnog kola. Promenjive veličine kojima se opisuje stanje kola su *promenljive stanja*, a dobijeni sistem diferencijalnih jednačina prvog reda jeste *sistem jednačina stanja*.

Za promenljive sistema biramo $u_{ck(t)}$[4] i $i_{lj(t)}$[5] jer se u tom slučaju direktrno koriste stvarni početni uslovi i rešavanje kola je jednostavnije.

Jednačine stanja pišemo u obliku:

$$\begin{gathered} Dx_1 = F_1\left(x_1, \dots, x_r; e_1, \dots, e_g; t\right) \\ \vdots \\ Dx_r = F_r(x_1, \dots, x_r; e_1, \dots, e_g; t) \end{gathered}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo promenljive kola.

[4] naponi kondenzatora
[5] struje kalemova

Pitanje 49.
Kako se određuje red sistema jednačina kola.

Red sistema linearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju linearno i vremenski nepromenljivo kolo jednak je ukupnom broju nezavisnih kalemova i kondenzatora.

$$r = b_L + b_C - n_L - m_C$$

gde je b_L - broj kalemova, b_C - broj kondenzatora n_L - broj kalemskih preseka i m_C - broj kondenzatorskih petlji. Drugim rečima red sistema je jednak ukupnom broju nezavisnih početnih uslova, a početni uslovi su upravo određeni L, C elementima.

Pitanje 50.
Šta su kalemski preseci, a šta kondenzatorske petlje?

Posmatramo *kalemski presek* (presek koji sadrži samo kalemove i eventualno strujne generatore) na slici.

Jednačina I *Kirchhof*-ovog zakona za ovaj presek je:

$$-i_1 + i_2 - i_3 - i_{g4} = 0$$

odakle sledi da su struje kalemova linearno zavisne, odnosno umesto tri postoje samo dva linearno nezavisna početna uslova.

Posmatramo *kondenzatorsku petlju* (petlju koja sadrži samo kondenzatore i eventualno naponske generatore) na slici.

Jednačina II *Kirchhof*-ovog zakona za ovaj presek je

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_{g5} = 0\,.$$

odakle sledi da su naponi kondenzatora linearno zavisni, odnosno umesto četiri postoje samo tri linearno nezavisna početna uslova.

Pitanje 51.
Osnovna svojstva diferencijalne jednačine odziva. Ilustracija kroz primere.

Primeri za kola sa jednom ekscitacijom

Primer 1. Posmatamo prosto RC kolo, koje sadrži akumuliranu energiju. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned} &i_R + i_C = 0 && (\mathbf{1}) \\ &u_R = u_C && (\mathbf{2}) \\ &i_C = CDu_c && (\mathbf{3}) \\ &i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R} && (\mathbf{4}) \\ &u_C(0-) = U_0 && (\mathbf{5}) \end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora:

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = 0$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj i_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po struji otpornika

$$Di_R + \frac{1}{RC}i_R = 0$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = 0$$

Primer 2. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned} &i_R = i_C && (\mathbf{1}) \\ &u_g = u_C + u_R && (\mathbf{2}) \\ &u_R = Ri_C && (\mathbf{3}) \\ &i_C = CDu_C && (\mathbf{4}) \\ &u_C(0-) = U_0 && (\mathbf{5}) \end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom (3) i (4) u (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = \frac{1}{RC}u_g$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj u_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po naponu otpornika

$$Du_R + \frac{1}{RC}u_R = Du_g$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = \frac{1}{R}Du_g$$

Primer 3. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned} u_R = u_C = Ri_R \quad & (\mathbf{1}) \\ i_g = i_R + i_C \quad & (\mathbf{2}) \\ i_C = CDu_C \quad & (\mathbf{3}) \\ u_C(0-) = U_0 \quad & (\mathbf{4}) \end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom (1) i (3) u (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = \frac{1}{C}i_g$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj i_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po struji otpornika

$$Di_R + \frac{1}{RC}i_R = \frac{1}{RC}i_g$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = Di_g$$

Na osnovu pokazanih primera zaključujemo da su u slučaju linearnih i vremenski nepromenljivih kola jednačine odziva oblika linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. To nam omogućava da primenjujemo bilo koju linearnu operaciju nad celom diferencijalnom jednačinom, a da se karakter jednačine ne promeni. Konkretno, to znači da na osnovu diferencijalne jednačine po jednoj (ma kojoj) promenljivoj, možemo odrediti diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj drugoj promenljivoj primenom odgovarajućih linearnih operacija.

Takođe, zaključujemo da su diferencijalne jednačine za ma koju promenljivu oblika

$$A(D)y(t) = F_{y,e}(t),$$

pri čemu važi sledeće:

- homogeni deo jednačine $A(D)$ je **isti** za sve promenljive.
- nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ se javlja **samo** ako postoji ekscitacija $e(t)$. Oblik ove funkcije određen je i ekscitacijom i promenljivom y po kojoj je formirana diferencijalna jednačina.

Primeri za kola sa više ekscitacija

Primer 4. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned}
&u_g = u_C + u_R && \mathbf{(1)}\\
&i_g = i_R + i_C && \mathbf{(2)}\\
&i_C = CDu_C && \mathbf{(3)}\\
&u_R = -Ri_R && \mathbf{(4)}\\
&u_C(0-) = U_0 && \mathbf{(5)}
\end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Rešavanjem sistema dobijaju se sledeće diferencijalne jednačine za promenljive u_C, i_C, i_R

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)u_C = \frac{1}{C}i_g + \frac{1}{RC}u_g$$
$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i_C = Di_g + \frac{1}{R}Du_g$$
$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i_R = -\frac{1}{R}Du_g + \frac{1}{RC}i_g$$

Primer 4 je potvrda jednog značajnog svojstva linearnih i vremenski nepromenljivih kola – ***principa superpozicije*** koji tvrdi da pri delovanju dva ili više generatora u kolu, odziv u ma kojoj grani kola može se odrediti kao suma pojedinačnih odziva na svaku od ekscitacija pri isključenim ostalim ekscitacijama. U našem slučaju se primer 4 pri isključenom strujnom generatoru svodi na primer 2, pri isključenom naponskom generatoru na primer 3, a pri isljučena oba generatora na primer 1.

Na osnovu svega o formi diferencijalne jednačine koja određuje odziv u kolu možemo zaključiti sledeće:

1) Ako u kolu deluje *jedan generator*, diferencijalna jednačina je oblika

$$(D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y(t) = \left(b_q D^q + b_{q-1}D^{q-1} + \cdots + b_1 D + b_0\right)e(t)$$

   što kraće pišemo

$$A(D)y(t) = B_{y,e}(D)e(t) = F_{y,e}(t)$$

   Operatorski polinom $A(D)$ je isti[6] za ma koju promenljivu $y(t)$, dok polinom $B_{y,e}(D)$ zavisi i od promenljive po kojoj formiramo diferencijalne jednačine i od ekscitacije $e(t)$.

2) Ako u kolu deluje *više generatora* e_1, e_2, … , e_g tada su pojedinačni odzivi određeni diferencijalnim jednačinama

$$\begin{gathered} A(D)y_{e_1}(t) = B_{y,e_1}(D)e_1(t) \\ A(D)y_{e_2}(t) = B_{y,e_2}(D)e_2(t) \\ \vdots \\ A(D)y_{e_g}(t) = B_{y,e_g}(D)e_g(t) \end{gathered}$$

   gde je g broj generatora. Sa $y_{e_1}, \ldots, y_{e_g}$ je označen isti odziv, ali pri delovanju različitih ekscitacija. Sumiranjem pojedinačnih odziva dobijamo ukupan odziv

$$A(D)y(t) = B_{y,e}(D)e(t)$$

   pri čemu je

$$B_{y,e}(D) = \sum_{i=1}^{g} B_{y,e_i}(D)\, e_i(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{g} y_{e_i}(t)$$

   Sistem možemo rešiti rešavanjem pojedinačnih odziva i njihovim sumiranjem, ali rešenje možemo dobiti i rešavanjem jedne diferencijalne jednačine koja je oblika

$$A(D)y(t) = \sum_{i=1}^{g}\left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t).$$

Detaljnije o rešavanju diferencijalnih jednačina u knjizi "TEK1" 246-253 str. ili poništiti Matematiku 2 pa gradivo učiti ponovo sa razumevanjem :P

[6] **postoje slučajevi kada nije isti, tako bar piše u knjizi, nemamo pojma**

Pitanje 52.

Određivanje sopstvenog odziva.

Sopstveni odziv nastaje u kolima sa akumuliranom energijom, kada nema ekscitacija. Označavamo ga sa $y_0(t)$. Opisan je homogenom diferencijalnom jednačinom

$$A(D)y_0(t) = 0$$

čije je rešenje oblika:

1) koreni karakteristične jednačine su prosti

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{r} \underline{K}^{(i)} e^{\underline{S_i} t}$$

gde je r red kola odnosno diferencijalne jednačine, a donja crta oznaka za kompleksan broj.

2) postoje višestruki koreni karakteristične jednačine (neka je S_1 koren reda p, a ostali koreni su prosti)

$$y_0(t) = \left(\underline{K}^{(1)} + t\underline{K}^{(2)} + \cdots + t^{p-1}\underline{K}^{(p)}\right)e^{\underline{S_1} t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{K}^{(i)} e^{\underline{S_i} t}$$

Karakter (realan ili kompleksan) integracionih konstanti $\underline{K}^{(i)}$ određen je karakterom korena $\underline{S_i}$. Integracione konstante $\underline{K}^{(i)}$ određuju se iz poznatih ***stvarnih početnih uslova:***

$$u_{C_k}(0^-) = U_{0k}$$
$$i_{L_j}(0^-) = I_{0j}$$

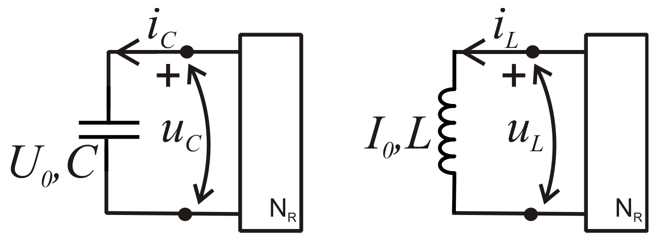
Za određivanje svih r konstanti potrebno je r nezavisnih relacija, koje uspostavljaju vezu ovih konstanti sa stvarnim početnim slovima. Te relacije, poznate i kao ***izvedeni početni uslovi***, opisane su vrednostima promenljive koju posmatramo i njenih $(r-1)$ izvoda u trenutku $t = 0^+$

$$y(0^+),\ \ Dy(0^+),\ \ D^2y(0^+),\ \ \ldots\ ,\ \ D^{r-1}y(0^+)$$

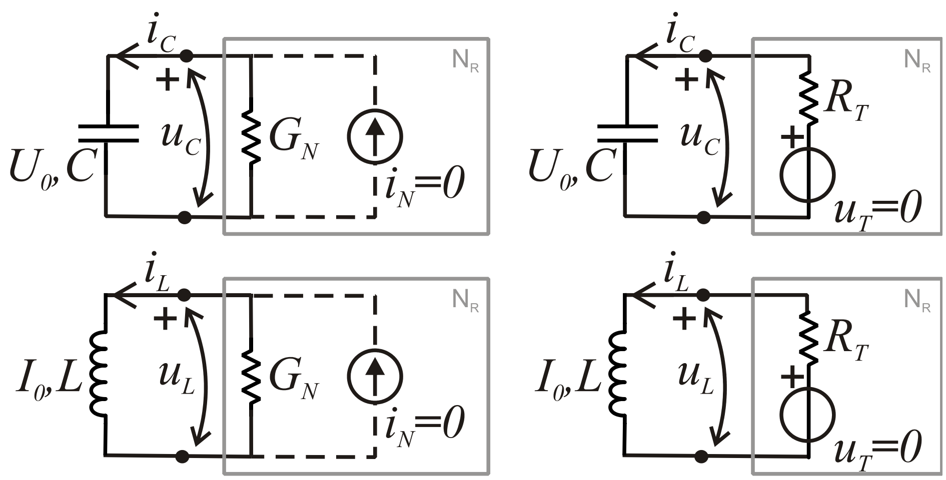
Pitanje 53.

Sopstveni odziv u kolima prvog reda.

Kola prvog reda sadrže samo jedan dinamički element C ili L i rezistivnu mrežu N_R vezanu za njegove krajeve.



Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira *Thevenin*-ovim odnosno *Norton*-ovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N. Opšti slučaj kola prvog reda ovim postupkom ekvivalentiramo prostim RC ili RL kolom.



Analiza RC-kola

$$
\begin{aligned}
i_R + i_C &= 0 \qquad &(1)\\
u_R &= u_C \qquad &(2)\\
i_C &= CDu_c \qquad &(3)\\
i_R &= \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R} \qquad &(4)\\
u_C(0-) &= U_0 \qquad &(5)
\end{aligned}
$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$.

Zamenom $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora:

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = 0$$

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)u_c = 0$$

$$A(D) = D + \frac{1}{RC}$$

Karakterističan polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S} + \frac{1}{RC} \ .$$

Koren polinom je realan

$$\underline{S}_1 = -\frac{1}{RC} = \sigma_1 = -a_0 \ ,$$

napon kondenzatora za $t \geq 0$ je

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} \ .$$

Konstantu K određujemo iz početnog uslova:

$$u_C(0^-) = K$$

Zadovoljen je uslov neprekidnosti napona kondenzatora

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = K = U_0$$

konačno odziv je

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{\sigma t} = U_0 e^{-a_0 t}$$

Pošto je operatorski polinom $A(D)$ isti za sve promenljive u kolu one se menjaju po istom eksponencijalnom zakonu.

-SLIKA-

Za pasivna kola veličina $a_0 = \frac{1}{RC}$ je pozitivna i naziva se učestanošću prigušenja jer pokazuje kojom brzinom opadaju amplidude odziva u kolu, dok se $\tau = RC$ naziva vremenska konstanta kola, koja u vremenskom domenu ukazuje na brzinu kojom opadaju amplitude odziva u kolu. Grafička interpretacija vremenske konstante: to je trenutak kada amplituda napona kondenzatora opadne na $1/e$ od svoje maksimalne vrednosti u $t = 0$.

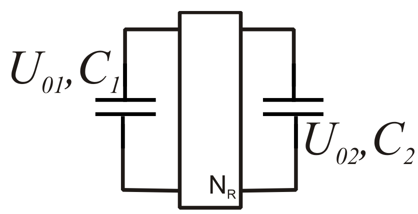
-SLIKA-

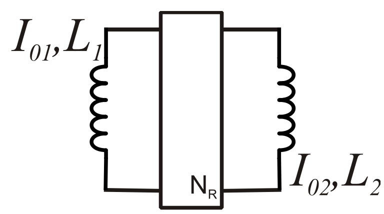
Posle tri vremenske konstante, uaostali napon kondenzatora iznosi 5% početne vrednosti, a posle pet vremenskih konstatnti zaostali napon je manji od 1% u odnosu na početnu vrednost.

Za kola prvog reda kažemo da su bez gubitaka kada je rezistivna mreža u vidu otvorene veze $(G_N = 0)$ ili kratkog spoja $(R_T = 0)$ i tada odzivi zadržavaju početnu konstantnu vrednost. Ukoliko kolo nije ni pasivno ni bez gubitaka onda je aktivno.

Pitanje 54.
Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Aperiodični režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.





Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

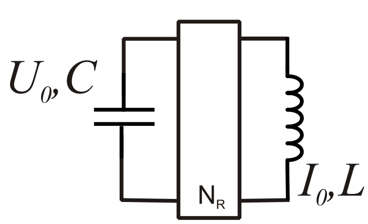
$$(D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

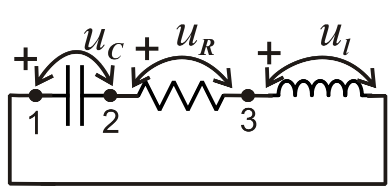
sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: $u_C(0^+)$ i $i_L(0^+)$.

Posmatrajmo kolo sa slike





Jednačine kola su

$$
\begin{aligned}
i_C &= i_L = i_R = i \\
u_C + u_R + u_L &= 0 \\
i_c &= i = CDu_C \\
u_R &= Ri_R = Ri \\
u_L &= LDi_L = LDi \\
u_C(0^-) &= U_0 \\
i_L(0^-) &= I_0
\end{aligned}
$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodični sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja:

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$
2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$
3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Aperiodični režim $(\alpha > \omega_0)$

U ovom slučaju koreni su realni i različiti

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \beta = \sigma_{1,2}$$
$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

pri čemu je $\omega_0 = \sqrt{a_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ \alpha = a_1/2 = R/2L.$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = K^{(1)} e^{\sigma_1 t} + K^{(2)} e^{\sigma_2 t}$$

konkretno, za napon kondenzatora:

$$u_C(t) = K^{(1)} e^{\sigma_1 t} + K^{(2)} e^{\sigma_2 t}$$

Računanje integracionih konstanti:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \sigma_1 K^{(1)} + \sigma_2 K^{(2)}$$

sledi da je

$$K^{(1)} = \frac{U_0 \sigma_2 - \frac{I_0}{C}}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right)$$

$$K^{(2)} = \frac{-U_0 \sigma_1 + \frac{I_0}{C}}{\sigma_2 - \sigma_1} = -\frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right)$$

Konačno,

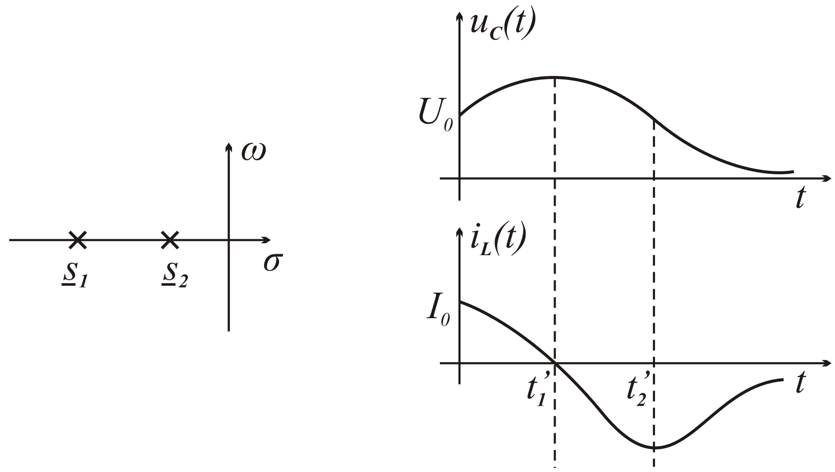
$$u_C(t) = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right) e^{\sigma_1 t} - \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right) e^{\sigma_2 t}$$

Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = \frac{\sigma_1}{2\beta}(I_0 - C\sigma_2 U_0) e^{\sigma_1 t} - \frac{\sigma_2}{2\beta}(I_0 - C\sigma_1 U_0) e^{\sigma_2 t}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:



Aperiodični režim RLC kola drugog reda: položaj sopstvenih učestanosti i vremenski oblici odziva.

U ovakvom kolu nema oscilatornog (periodičnog) karaktera sopstvenog odziva, odnosno nema razmene energije između kalema i kondenzatora jer su gubici veliki.

Pitanje 55.

Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Kritičan režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.

Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = 0$$

sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: u_C 0^+ i i_L 0^+ .

Posmatrajmo kolo sa slike

-SLIKE-

Jednačine kola su:

$$
\begin{aligned}
i_C = i_L = i_R &= i \\
u_C + u_R + u_L &= 0 \\
i_c = i &= CDu_C \\
u_R &= Ri_R = Ri \\
u_L &= LDi_L = LDi \\
u_C(0^-) &= U_0 \\
i_L(0^-) &= I_0
\end{aligned}
$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodiučni sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$

3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Kritičan režim $(\alpha = \omega_0)$

Koreni karakteristične jednačine su realni i dvostruki:

$$\underline{S}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = (K^{(1)} + tK^{(2)})e^{\sigma_1 t}$$

Konkretno, za napon kondenzatora

$$u_C(t) = (K^{(1)} + tK^{(2)})e^{\sigma_1 t}$$

Računanje integracionih konstanti

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = K^{(1)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C}i_L(0^+) = \frac{1}{C}i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \sigma_1 K^{(1)} + K^{(2)}$$

sledi da je

$$K^{(2)} = \frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0$$

Konačno:

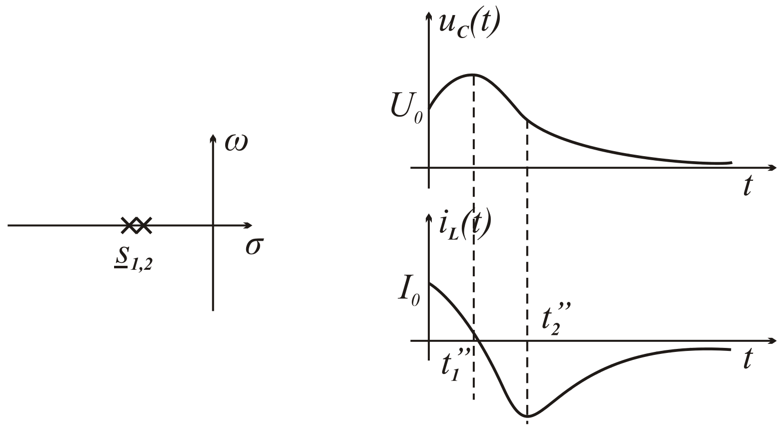
$$\begin{aligned} u_C(t) &= \left(U_0 + t\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right)\right)e^{\sigma_1 t} \\ &= U_0(1 - \sigma_1 t)e^{\sigma_1 t} + \frac{I_0}{C}te^{\sigma_1 t} \end{aligned}$$

Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = I_0(1 + \sigma_1 t)e^{\sigma_1 t} - \frac{U_0}{L}te^{\sigma_1 t}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:



Slično kao i za aperiodičan režim u ovakvom kolu nema oscilatornog (periodičnog) karaktera sopstvenog odziva, odnosno nema razmene energije između kalema i kondenzatora jer su gubici veliki, samo je proces prigušenja brži. Ovaj režim se naziva kritični jer razdvaja apreiodičan režim od pseudoperiodičnog režima.

Pitanje 56.

Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Pseudoperiodičan režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.

-SLIKE-

Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

$$(D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: $u_C(0^+)$ i $i_L(0^+)$.

Posmatrajmo kolo sa slike

-SLIKE-

Jednačine kola su

$$i_C = i_L = i_R = i$$
$$u_C + u_R + u_L = 0$$
$$i_c = i = CDu_C$$
$$u_R = Ri_R = Ri$$
$$u_L = LDi_L = LDi$$
$$u_C(0^-) = U_0$$
$$i_L(0^-) = I_0$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodiučni sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$

3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Pseudoperiodičan režim $(\boldsymbol{\alpha < \omega_0})$

Koreni karakteristične jednačine su realni i dvostruki:

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_1 = \sigma_{1,2} \pm j\omega_1$$
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = \underline{K}^{(1)} e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}^{(2)} e^{\underline{S}_2 t}$$

Konkretno, za napon kondenzatora:

$$u_C(t) = \underline{K}^{(1)} e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}^{(2)} e^{\underline{S}_2 t}$$

što možemo izraziti ekvivalentnim oblikom

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} u_{Cm} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Računanje integracionih konstanti

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = \underline{K}^{(1)} + \underline{K}^{(2)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \underline{S}_1 \underline{K}^{(1)} + \underline{S}_2 \underline{K}^{(2)}$$

sledi da je

$$\underline{K}^{(1)} = \frac{U_0 \underline{S}_2 - \frac{I_0}{C}}{\underline{S}_2 - \underline{S}_1} = \frac{U_0}{2} - j\frac{\left(U_0 \alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}$$

$$\underline{K}^{(2)} = \frac{-U_0 \underline{S}_1 + \frac{I_0}{C}}{\underline{S}_2 - \underline{S}_1} = \frac{U_0}{2} + j\frac{\left(U_0 \alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}$$

Konačno,

$$u_C(t) = \left(\frac{U_0}{2} - j\frac{\left(U_0\alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}\right)e^{(-\alpha+j\omega_1)t} + \left(\frac{U_0}{2} + j\frac{\left(U_0\alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}\right)e^{(-\alpha-j\omega_1)t}$$

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}\left[U_0\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1}\left(\alpha U_0 + \frac{I_0}{C}\right)\sin(\omega_1 t)\right]$$

Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = e^{-\alpha t}\left[I_0\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{\omega_1}\left(\alpha I_0 + \frac{U_0}{L}\right)\sin(\omega_1 t)\right]$$

Odnosno,

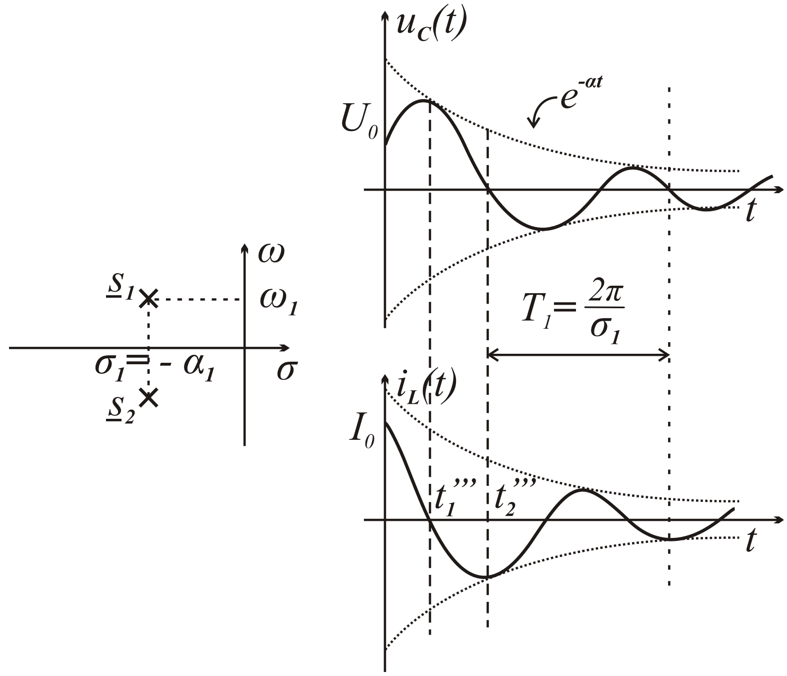
$$u_C(t) = U_{Cm}e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \theta_C)\,,$$
$$i_L(t) = I_{Lm}e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \psi_L)$$

sa

$$U_{Cm} = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1}U_0\right)^2}\,, \qquad \theta_C = \mathrm{arctg}\frac{-\left(\frac{\mathrm{I}_0}{\mathrm{C}\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1}\mathrm{U}_0\right)}{\mathrm{U}_0}$$

$$I_{Lm} = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{U_0}{L\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1}I_0\right)^2}\,, \qquad \psi_L = \mathrm{arctg}\frac{-\left(\frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{L}\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1}\mathrm{I}_0\right)}{\mathrm{I}_0}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:



U ovakvom kolu režim je pseudoperiodičan sa pseudoperiodom $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ i obvojnicom $\pm Y_m e^{-\alpha t} = \pm Y_m e^{-t/\tau}$, gde τ ima značenje vremenske konstante.

Pitanje 57.

Sopstveni odziv u kolima višeg reda.

Ako kolo sadrži više od dva dinamička elementa kažemo da je reč o kolu višeg reda. Određujemo sopstveni odziv, pa posmatramo kolo bez generatora, sa akumuliranom energijom. Neka je red kola r. Možemo odrediti diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj promenljivoj.

$$A(D)y_0(t) = 0$$

Operatorski polinom je

$$A(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \,,$$

karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^r + a_{r-1}\underline{S}^{r-1} + \cdots + a_1\underline{S} + a_0 \,,$$

i može se izraziti preko svojih korena:

$$\underline{A}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2)\ldots(\underline{s} - \underline{s}_r).$$

Razlikovaćemo slučajeve:

- Koreni karakteristične jednačine su ***prosti*** ($\underline{s}_1 \neq \underline{s}_2 \neq \cdots \neq \underline{s}_r$).
- Koreni su ***realni***: $\underline{s}_i = \sigma_i$. Tada je $y_{0i}(t) = k_i e^{\sigma_i t}$, gde je $k_i \in \mathbb{R}$.
  Dakle, sopstveni odziv se može predstaviti u obliku sume odziva koji odgovaraju članovima prvog reda:
$$y_0(t) = \sum_{k=1}^{r} k_i e^{\sigma_i t}$$
- Koreni su ***kompeksni***: $\underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i$. U slučaju da postoji jedan kompleksan koren, tada postoji i njemu konjugovano kompleksni koren $\underline{s}_{i+1} = \underline{s}_i^* = \sigma_i - j\omega_i$, jer su koeficijenti karakterističnog polinoma a_i realni.
  Tada je $y_{0,i}(t) = \underline{k}_i e^{\underline{s}_i t}$, gde je
$$\underline{k}_i = k_{\mathbb{R}} + jk_{\mathbb{C}} \,,$$
  dok je
$$y_{0,i+1}(t) = \underline{k}_{i+1} e^{\underline{s}_i^* t} \,,$$
  gde je
$$\underline{k}_{i+1} = k_{\mathbb{R}} - jk_{\mathbb{C}} \,.$$
  I ovde se sopstveni odziv može predstaviti u obliku sume odziva koji odgovaraju članovima prvog reda, ali je zgodno grupisati parove kompleksno konjugovanih korena:
$$y_{0,k}(t) = y_{0,i}(t) + y_{0,i+1}(t) = 2\mathrm{Re}\big[y_{0,i}(t)\big] = Y_{k,m} e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_k)$$
  $k = 1,2, \dots, s$, gde je s broj konjugovano kompleksnih parova.
- Koreni karakteristične jednačine su ***višestruki****.* Neka postoji jedan višestruki koren, neka je to koren $\underline{s}_1$ reda p:
$$\underline{s}_1 = \underline{s}_2 = \cdots = \underline{s}_p, \qquad \underline{s}_{p+1} \neq \underline{s}_{p+2} \neq \cdots \neq \underline{s}_r$$
  Tada je
$$y_0(t) = \big(\underline{k}_1 + t\underline{k}_2 + \cdots + t^{p-1}\underline{k}_p\big)e^{\underline{s}_1 t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{k}_i e^{\underline{s}_i t}$$

Dakle, sopstveni odziv u kolu višeg reda se može predstaviti u obliku sume odziva koje odgovaraju članovima prvog i drugog reda. Odnosno, kolo višeg reda svodimo na kola prvog odn. drugog reda.

Pitanje 58.

Osnovni vremenski oblici ekscitacija.

Ekscitacije u električnim kolima date su naponima i strujama nezavisnih generatora.

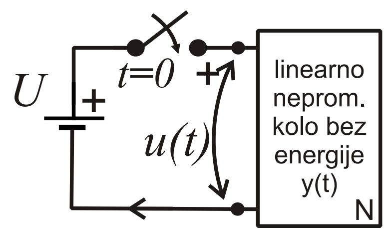
Konstantna funkcija

Ekscitacija koja je u vremenu opisana konstantnom funkcijom oblika: $e(t) = E = const, \forall t$, pri čemu je u elektrotehnici reč o naponu ili struji konstantnog generatora: $u_g(t) = U$ ili $i_g(t) = I$.
U praksi, generator koji nema ni početak ni kraj kao što je ovaj ne postoji, moguće je ostvariti ekscitaciju koja bi se u određenom vremenskom intervalu menjala po određenom zakonu.

U realnom slučaju, konstanta funkcija je različita od nule dok traje delovanje generatora.

Heaviside-ova (odskočna) funkcija

Generator oblika $e(t) = E = const.$ uključujemo u kolu u trenutku $t = t_0$.



Konkretno, neka je $t_0 = 0$, i neka je to naponski generator $u_g(t) = U$ koji se prekidačem P spaja sa mrežom N koja nema nezavisne generatore niti akumuliranu energiju (napon na njenim krajevima je bio 0). Pri zatvaranju prekidača P potreno je neko vreme da napon $u(t)$ dostigne U. Dakle, postoji prelazni režim. Ovo prelazn vreme može biti kraće ili duže zavisno od oblika mreže M ali realno gledano, nikad ne možemo imati trenutnu promenu (vreme trajanja prelaznog režima ne može postati jednako nuli).

Ako funkciju $u(t)$ podelimo njenom amplitudom U, dobija se funkcija istog oblika ali bez dimenzije i sa jediničnom amplitudom koja se naziva *realna odskočna funkcija* i koja je definisana sa:

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \in (0,1), & 0 \le t < \varepsilon \\ 1, & t \ge \varepsilon \end{cases}$$

U graničnom procesu kada interval ε teži nuli, dobija se idealna odskočna funkcija, poznatija kao *Heaviside*-ova funkcija:

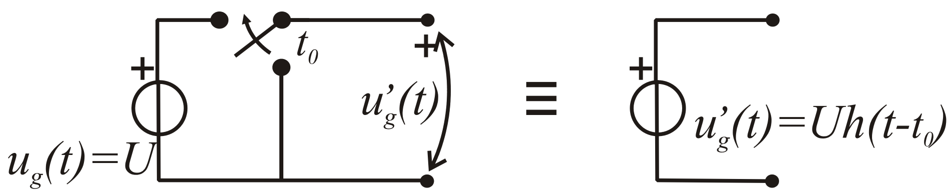
$$h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0^+ \end{cases}$$

Ako je $t_0 \neq 0$, odgovarajuća funkcija bi bila pomerena po vremenskoj osi – pomerena *Heaviside*-ova funkcija:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0^+ \end{cases}$$

Heaviside-ova ekscitacija se može opisati izrazom: $e(t) = Eh(t)$, gde amplituda E odražava prirodu funkcije, što je u konkretnom slučaju za napon i struju nezavisnih generatora: $u_g(t) = U\,h(t)$, $i_g(t) = Ih(t)$.

Preciznija simulacija *Heaviside*-ovog generatora:



Odnosno, generator ima otpornost 0 kada je isključen, a ne beskonačnu.

Funkcija $\mathbf{sgn}(\boldsymbol{t})$

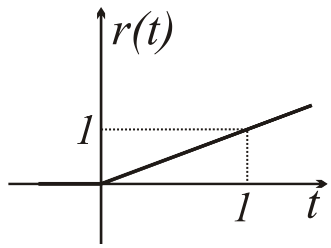
Funckija $\mathrm{sgn}(t)$ definisana je kao:

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

što se može interpretirati kao: $\mathrm{sgn}(t) = -1 + 2h(t)$ ili $\mathrm{sgn}(t) = h(t) - h(-t)$, gde je $h(t)$ *Heaviside*-ova funkcija. Funkcija $\mathrm{sgn}(t)$ je bez dimenzije, tako da bi ekscitacije ovog oblika bile opisane izrazima: $u_g(t) = U\,\mathrm{sgn}(t)$, $i_g(t) = I\,\mathrm{sgn}(t)$.

Usponska funkcija

Usponska funkcija definisana je sa: $r(t) = 0$ za $t < 0$ i $r(t) = at$ za $t \geq 0$. Jedinična usponska funkcija dobija se za $a = 1$, a funkcija proizvoljnog nagiba $a \neq 1$ dobija se množenjem konstante a i funkcije $r(t)$. Između *Heaviside*-ove i jedinične usponske funkcije postoji veza: $r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = th(t)$, tj. $h(t) = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$.



Jedinična usponska funkcija ima dimenziju vremena, pa je ekscitacija oblika: $e(t) = \frac{E}{T}r(t) = \frac{E}{T}th(t)$, što je za naponski i strujni generator:

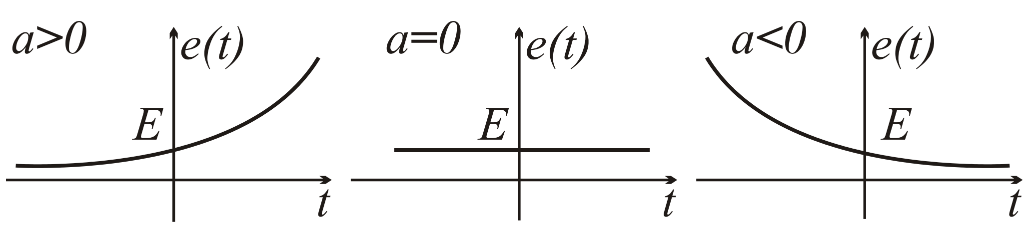
$$u_g(t) = \frac{U}{T}r(t) = \frac{U}{T}th(t), \qquad i_g(t) = \frac{I}{T}r(t) = \frac{I}{T}th(t)$$

Ako je $t_0 \neq 0$, odgovarajuća funkcija bi bila pomerena po vremenskoj osi - pomerena usponska funkcija:

$$r(t - t_0) = (t - t_0)h(t - t_0)$$

Eksponencijalna funkcija

Ekscitacija oblika eksponencijalne funkcije opisana je sa: $e(t) = Ee^{at}$. U realnim slučajevima funkcija se uključuje u nekom trenutku t_0. Ako je $t_0 = 0$, tada je ekscitacija oblika: $e_1(t) = Ee^{at}h(t)$, a ako je $t_0 > 0$, onda je: $e_2(t) = Ee^{a(t-t_0)}h(t - t_0) = e_1(t - t_0)$. Naponski i strujni generator sa ekscitacijama u vidu eksponencijalnih funkcija opisani su sa: $u_g(t) = Ue^{at}$, $i_g(t) = Ie^{at}$.



Prostoperiodična funkcija

Ekscitacija oblika prostoperiodične funkcije opisana je sa: $e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma)$. Reč je o funkciji sa amplitudom E_m, kružnom frekvencijom ω, odnosno periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$, trenutnom fazom $(\omega t \ + \ \gamma)$ i početnom fazom γ, odnosno trenutkom prvog maksimuma $t_1 = -\frac{\gamma}{w}$. Naponski i strujni generator sa ekscitacijama u vidu prostoperiodičnih funkcija opisani su sa:

$$u_g(t) = \ U_m \ \cos(wt \ + \ \theta)$$
$$i_g(t) = I_m \cos(wt \ + \psi).$$

Ako se ekscitacija uključuje u trenutku $t_0 = 0$, ona je opisana izrazom:

$$e_1(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma)\, h(t)\ ,$$

a ako se uključuje u trenutku $t_0 \neq 0$, onda je:

$$e_2(t) = E_m \cos[\omega(t - t_0) + \gamma]\, h(t - \ t_0) = e_1(t - t_0).$$

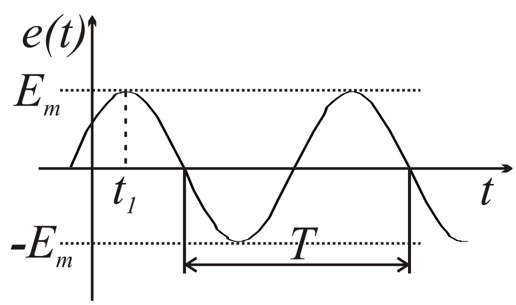
Efektivna vrednost ekscitacije je data sa:

$$E = \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Srednja (apsolutna) vrednost je

$$E_{sr} = \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} |e(t)|\mathrm{d}t = \frac{2E_m}{\pi}$$

koja je poznata i pod nazivom srednja poluperiodna vrednost.



Složenoperiodična funkcija

Funkcija koja se periodično ponavlja sa periodom T: $e(t+nT)=e(t), n=1,2,\ldots$ ali nije prostoperiodična naziva se složenoperiodičnom funkcijom. S obzirom da se prema *Fourier*-ovoj analizi može predstaviti sumom prostoperiodičnih funkcija u obliku *Fourier*-ovog reda:

$$e(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}E_m^{(n)}\cos\left(n\omega_0 t+\gamma^{(n)}\right)$$

gde je: $E_0=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}e(t)\mathrm{d}t$ srednja vrednost funkcije za vreme jedne periode, dok se prostoperiodične funkcije: $e^{(n)}(t)=E_m^{(n)}\cos\left(n\omega_0 t+\gamma^{(n)}\right)$ nazivaju harmonicnim komponentama (harmonicima) slozenoperiodicne funkcije. Naziv potice od toga sto su frevencije ovih clanova jednake celobrojnom umnosku frekvencije ponavljanja funkcije: $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ koja se naziva i kružnom učestanošću osnovnog harmonika. Broj harmonika može biti konačan ukoliko je funkcija $e(t)$ trigonometriski polinom.

Pravougaoni impuls.

Konstantni signal koji se ukljucuje u trenutku t_1, a iskljucuje u trenutku $t_2>t_1$, može se analitički predstaviti pomoću dve *Heaviside*-ove funkcije:

$$u_g(t)=Uh(t-t_1)-Uh(t-t_2)=u_{g1}(t)+u_{g2}(t)\ .$$

Pseudoperiodična funkcija sa negativnim eksponentom.

Analitički izraz ove funkcije je:

$$e(t)=E_m e^{at}\cos(\omega_1 t+\theta)h(t)$$

sa $U_0+u_g(0^+)=U_m\cos\theta, \omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$.

Unutar obvojnice koju čine funkcije $U_m e^{at}$ i – $U_m e^{at}$ nalazi se ukupna funkcija sa pseudoperiodom T_1 koja odgovara periodi kosinusne funkcije.

Pitanje 59.

Svojstvo odabiranja impulsne ekscitacije.

Pod pojmom impulsa podrazumeva se pojava (signal) koji naglo nastaje u trenutku t_0, traje određeno vreme ε i potom iščezava. Za vreme svog trajanja impuls je opisan nekom funkcijom vremena, označenoj na primer sa $s(t)$, tako da se može predstaviti analitičkim izrazom:

$$e_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ s(t) & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

-SLIKA-

Funkcije ovakvog oblika nazivaju se i udarnim funkcijama. Smatraćemo da su to ograničene funkcije, odnosno da je ispunjeno: $\int_{-\infty}^{+\infty} e_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon s(t)\mathrm{d}t = F$

Za vreme svog trajanja impuls deluje u kolu i izaziva efekt koji je srazmeran površini ispod krive $s(t)$, označenoj sa F koja predstavlja jačinu udara posmatrane funkcije. Kada se funkcija $e_\varepsilon(t)$ normalizuje (deljenjem sa jačinom udara F) dobija se funkcija: $\delta_\varepsilon(t) = \frac{e_\varepsilon(t)}{F}$, koja je definisana:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{s(t)}{F}, & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

koja ima isti oblik kao $e_\varepsilon(t)$ sa skaliranim ordinatama za faktor F i sa jediničnom površinom. U graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0$, dobija se *Dirac*-ova funkcija (impuls), $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$, koja je definisana sa:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t \geq 0^+ \end{cases},$$

i važi još i:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \int_0^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

Impulsna funkcija se grafički prikazuje u vidu zadebljane strelice, pored koje se ispisuje vrednost jačine udara koja odgovara površini ispod krive dobijene graničnim procesom.

-SLIKA-

Veza između *Dirac*-ove i *Heaviside*-ove funkcije je: $\delta(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$. *Dirac*-ova funkcija koja nastaje u trenutku $t_0 \neq 0$ naziva se pomerena *Dirac*-ova funkcija.

Dirac-ova funkcija ima dimenziju frekvencije, pa jačina udara imulsne funkcije ima prirodu fluksa za $u_g(t)$, odnosno količine naelektrisanja za $i_g(t)$: $u_g(t) = \Phi\delta(t)$, $i_g(t) = Q\delta(t)$.

Svojstvo odabiranja

Ovo svojstvo je veoma značajno za impulsnu funkciju i koristi se dosta u raznim digitalnim kolima posebno za digitalni prenos informacija. Bilo koji kontinualni signal možemo diskretizovati u vremenu primenom svojstva o odabiranju.

Posmatrajmo proizvod proizvoljne neprekidne i ograničene funkcije f(t) i *Dirac*-ove funkcije $\delta(t - t_0)$. Taj proizvod je jednak:

$$f(t)\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ f(t)\delta(t-t_0) = \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

i važi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0^+)$. Formiranjem proizvoda date funkcije $f(t)$ i *Dirac*-ove funkcije postavljene u željeni trenutak t_0 i integraljenjem tog proizvoda dobija se samo uzorak funkcije u željenom trenutku t_0, $f(t_0)$. Na taj način može se izvršiti diskretizacija proizvoljne funkcije u vremenu.

Blok šema uređaja za odabiranje:

-SLIKA-

Pitanje 60.

Određivanje odziva na delovanje ekscitacije.

Smatraćemo da u kolu nema akumulirane energije odnosno

$$u_{C_k}(0^-) = 0,\ \ i_{L_j}(0^-) = 0, \text{ nema početnih uslova.}$$

Neka u kolu deluj jedan nezavisan generator, $e(t) \in \{u_g, i_g\}$. Neka je red kola r. U slučaju delovanja više generatora ili generatora sa složenijim funkcijama ekscitacije primenjujemo princip superpozicije. Nalazimo diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj promenljivoj $y(t)$, $y(t) \in \{u_l, i_l\}$

$$A(D)y(t) = F_{y,e}(t) = B(D)e(t)$$

sa rešenjem

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Rešenje homogenog dela $y_h(t)$ nalazimo iz homogene diferencijalne jednačine $A(D)y(t) = 0$

$$y_h(t) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \neq \underline{s}_2 \neq \cdots \neq \underline{s}_r) \\ \left(\sum_{l=1}^{p} t^{l-1}\underline{K}_l\right) e^{\underline{s}_l t} + \sum_{l=p+1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \text{ je reda } p) \end{cases}$$

Partikularno rešenje je dato funkcijom istog oblika kao nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ koje je određeno ekscitacijom. Pa je partikularno rešenje opisano funkcijom vremena iste klase kao što je funkcija ekscitacije $y_p(t) \sim F_{y,e}(t) \sim e(t)$. Odziv može sadržati još i članove koji ne postoje u obliku funkcije ekscitacije u nekim specijalnim slučajevima.

Pitanje 61.

Odziv na *Heaviside*-ovu pobudu. Indiciona funkcija.

Neka u proizvoljnom linearnom i vremenski nepromenljivom kolu bez početne energije deluje jedan nezavisan generator sa *Heaviside*-ovom ekscitacijom:

$$e(t) = Eh(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E, & t \geq 0 \end{cases}$$

i neka je $y(t)$ odziv kola. Neka je red kola r. Pošto u kolu nema akumulirane energije, početni uslovi su

$$u_{C_k}(0^-) = 0,\ i_{L_j}(0^-) = 0.$$

Tada je odgovarajuća diferencijalna jednačina:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t)$$

Neka je red polinoma $B(D)$ manji od reda polina $A(D)$. Neka je na primer diferencijalna jednačina odziva oblika

$$A(D)y(t) = \ b_0 e(t) = b_0 Eh(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ b_0 E = const. & t \geq 0 \end{cases}.$$

Kolo je bez energije, pa su svi odzivi kola za $t < 0$ jednaki nula. Dok će za $t \geq 0$ odziv biti opisan nekom funkcijom vremena $z(t)$ koju određujemo iz diferencijalne jednačine odziva. Opšte rešenje se može napisati u vidu

$$y(t) = z(t)h(t), \qquad \forall t\ .$$

Rešenje homogenog dela je oblika:

$$y_h(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{r} \underline{K_l} e^{\underline{s_l} t} & (\underline{s_1} \neq \underline{s_2} \neq \cdots \neq \underline{s_r}) \\ \left(\displaystyle\sum_{l=1}^{p} t^{l-1} \underline{K_l}\right) e^{\underline{s_l} t} + \displaystyle\sum_{l=p+1}^{r} \underline{K_l} e^{\underline{s_l} t} & (\underline{s_1} \text{ je reda } p) \end{cases}$$

Partikularno rešenje je u vidu konstante jer je pobuda konstantna:

$$y_p(t) = Y_p = const.$$

Zamenom $y_p(t)$ u diferencijalnu jednačinu odziva dobija se

$$y_p(t) = Y_p = \frac{b_0}{a_0}E, \qquad a_0 \neq 0.$$

Za određivanje integracionih konstanti potrebno je poznavati početne uslove. Ako je komutacija regularna važiće: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$ ali iako to nije ispunjeno do promene početnih uslova može doći jedino usled delovanja ekscitacije tj. važi:

$$u_{C_k}(0^+) = \alpha_k E, \qquad i_{L_j}(0^+) = \beta_k E, \qquad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R})$$

Stoga, ako nema višestrukih korena,

$$\begin{aligned}
y(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{K_i} + \frac{b_0}{a_0}E = f_1\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_1 E \\
Dy(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{S_i}\underline{K_i} + 0 = f_2\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_2 E \\
&\vdots \\
D^{(n-1)}y(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{S_i}^{n-1}\underline{K_i} + 0 = f_n\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_n E
\end{aligned}$$

Odakle sledi da su svi koeficijenti srazmerni sa E:

$$\underline{K_i} = \underline{k_i}E, \qquad (i = 1,2, \dots, r)$$

Ukupno rešenje za $t \geq 0$:

$$y(t) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \underline{k_i} e^{\underline{S_i}t} + \frac{b_0}{a_0}\right)}_{\varphi(t)} E$$

Sličan je postupak i za slučaj kada postoje višestruki koreni gde se dobija:

$$y(t) = \underbrace{\left(\left(\sum_{i=1}^{p} t^{i-1}\underline{k_i}\right) e^{\underline{S_i}t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{k_i} e^{\underline{S_i}t} + \frac{b_0}{a_0}\right)}_{\varphi(t)} E, \qquad t \geq 0$$

Konačno rešenje za $\forall t$:

$$y(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$

gde je $f(t)$ funkcija koja je okarakterisana mrežom vezanom za krajeve nezavisnog generatora a ne zavisi od vrednosti skoka ekscitacije E naziva se *funkcija mreže* a definisana za odziv na delovanje *Heaviside*-ovog generatora naziva se *indiciona funkcija kola*.

$$f(t) = \frac{y(t)}{E} = \varphi(t)h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t) & t \geq 0 \end{cases}.$$

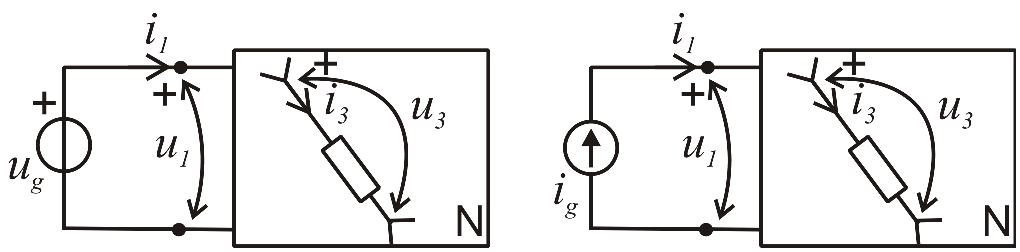
Može se dobiti direktno iz polazne diferencijalne jednačine $A(D)y(t) = B(D)e(t) = b_0 Eh(t)$ deljenjem obe strane jednačine sa skokom ekscitacije E:

$$A(D)\frac{y(t)}{E} = b_0 h(t) \Longrightarrow A(D)f(t) = b_0 h(t), \text{ gde je } f(t) = \frac{y(t)}{E}$$

funkcija mreže definisana za odziv na delovanje *Heaviside*-ovog generatora.

Što se za $t \geq 0$ svodi na nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim nehomogenim delom $A(D)\varphi(t) = b_0$, čijim rešavanjem određujemo funkciju $\varphi(t)$.

Priroda indicione funkcije zavisi od prirode odziva i ekscitacije. Ako je ekscitacija naponski generator $u_g(t) = Uh(t)$ odziv može biti ulazna struja $i_1(t)$ ili struja odn. napon neke druge grane: $i_j(t), u_j(t), (j \neq 1)$.



Odgovarajuće indicione funkcije mreže su:

- *indiciona ulazna admitansa:* $f_{Y_{11}}(t) = \frac{i_1(t)}{U}$
- *indiciona prenosna admitansa:* $f_{Y_{j1}}(t) = \frac{i_j(t)}{U}$
- *indiciona transmitansa napona:* $f_{M_{j1}}(t) = \frac{u_j(t)}{U}$

Ako je ekscitacija u vidu strujnog generatora, kao na slici pod b), $i_g(t) = Ih(t)$, odzivi mogu biti: ulazni napon, $u_1(t)$, napon ili struja neke druge grane: $u_j(t), i_j(t)$.

Odgovarajuće indicione funkcije mreže su:

- *indiciona ulazna impedansa:* $f_{Z_{11}}(t) = \frac{u_1(t)}{I}$
- *indiciona prenosna impedansa:* $f_{Z_{j1}}(t) = \frac{u_j(t)}{I}$
- *indiciona transmitansa struja:* $f_{N_{j1}}(t) = \frac{i_j(t)}{I}$

Pitanje 62.

Regularna i neregularna komutacija.

Posmatramo kola bez akumulirane energije.

Regularna komutacija

Pod pojmom komutacije se u užem smislu podrazumeva uključivanje ili isključivanje neke grane (ili više grana) u električnom kolu, dok se, šire posmatrano, pod ovim pojmom podrazumeva nagla (skokovita) promena nekog od parametara kola. Do promene početnih uslova u kolu bez akumulirane energije može doći jedino usled delovanja ekscitacije. Komutacija je regularna ako se pri njoj zadržavaju uslovi neprekidnosti napona kondenzatora i struje kalemova:

$$u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-), \qquad i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$$

Neregularna komutacija

U modelima linearnih i vremenski nepromenljivih kola može doći i do takve komutacije pri kojoj nisu zadovoljeni početni uslovi neprekidnosti napona kondenzatora i/ili struje kalemova. U tom slučaju radi se o neregularnoj komutaciji. U fizičkim kolima to se ne može desiti jer nagla promena početnog uslova označava i naglu promenu energije, odnosno naglu promenu električnog/magnetskog (EM) polja, što nije moguće jer je maksimalna brzina promene EM polja jednaka brzini svetlosti. Međutim, u nedovoljno tačnim modelima električnog kola, kada se ne uzimaju u obzir svi relevantni efekti, može doći do neregularne komutacije.

Delovanje *Heaviside*-ovog generatora se može shvatiti kao uključenje (isključenje) konstantnog generatora napona (struje) u nekom trenutku. Neka je diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)Eh(t)$$

Na osnovu poređenja reda polinoma $A(D)$ i $B(D)$ možemo odrediti da li je reč o regularnoj ili neregularnoj komutaciji, što ćemo pokazati na primeru kola drugog reda.

Konačno rešenje za $\forall t$ pomenute diferencijalne jednačine:

$$y(t) = z(t)h(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$
$$f(t) = \varphi(t)h(t), \qquad indiciona\ funkcija\ kola$$

Možemo pisati

$$A(D)f(t) = B(D)h(t)$$

Neka je r red polinoma $A(D)$, u našem slučaju $r = 2$, a q red polinoma $B(D)$.

$$A(D) = D^2 + a_1D + a_0$$

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 + b_1D + b_2D^2 + \cdots \\ B(D)h(t) &= b_0h(t) + b_1Dh(t) + b_2D^2h(t) + \cdots \\ &= b_0h(t) + b_1\delta(t) + b_2\delta'(t) + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(D)f(t) &= D^2f(t) + a_1Df(t) + a_0f(t) \\ &= a_0\big(\varphi(t)h(t)\big) + a_1\big[D\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] + \big[D^2\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] \\ &= a_0\varphi(t)h(t) + a_1[D\varphi(t)h(t) + \varphi(0^+)\delta(t)] \\ &\quad + \big[D^2\varphi(t)h(t) + D\varphi(0^+)\delta(t) + D\big(\varphi(0^+)\big)h(t)\big] + \varphi(0^+)\delta'(t) \text{ [7]} \\ &= h(t)[a_0\varphi(t) + a_1D\varphi(t) + D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+)] + \delta'(t)\varphi(0^+) \end{aligned}$$

Razlikovaćemo tri slučaja:

1) $\boldsymbol{q < r:} \quad \boldsymbol{q = 1,\ r = 2}$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\begin{aligned} &h(t)[a_0\varphi(t) + a_1D\varphi(t) + a_2D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+) \\ &= b_0h(t) + b_1\delta(t) \end{aligned}$$

Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi(0^+) = 0 \Rightarrow f(0^+) = 0 \Rightarrow y(0^+) = 0.$$

Ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ višeg reda od polinoma $B(D)$, da je reč o regularnoj komutaciji (nije došlo do promene početnih uslova)

[7] $D\varphi(0^+) = D\big(\varphi(t)\big)$ za $t = 0^+$, dok je $D\big(\varphi(0^+)\big) = \frac{\mathrm{d}\varphi(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0$ (izvod konstante)

2) $\boldsymbol{q = r:} \quad \boldsymbol{q = r = 2}$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + a_2 D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2 D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+)$$
$$= b_0 h(t) + b_1\delta(t) + b_2\delta'(t)$$

Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1 D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = b_2 \end{aligned}$$

$$\varphi(0^+) \neq 0 \implies f(0^+) \neq 0 \implies y(0^+) \neq 0.$$

Nije ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ istog reda kao i polinom $B(D)$, da je reč o neregularnoj komutaciji (jeste došlo do promene početnih uslova)

3) $\boldsymbol{q > r:} \quad \boldsymbol{q = 3,\ r = 2}$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\underbrace{h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + a_2 D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2 D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+)}_{M}$$
$$= b_0 h(t) + b_1\delta(t) + b_2\delta'(t) + b_3\delta''(t)$$

Pošto na levoj strani jednakosti nemamo član $\delta''(t)$ pretpostavka da je $f(t) = \varphi(t)h(t)$ je pogrešna, pa ćemo uvesti sledeću pretpostavku: $f(t) = \varphi(t)h(t) + H_1\delta(t)$. Sada je leva strana jednakosti, odn.

$$A(D)f(t) = M + a_0 H_1\delta(t) + a_1 H_1\delta'(t) + H_1\delta''(t)$$

Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1 D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) + a_0 H_1 = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) + a_1 H_1 = b_2 \\ \delta''(t)&: \quad H_1 = b_3 \end{aligned}$$

Iz poslednje tri relacije nalazimo nove početne uslove $\varphi(0^+) \neq 0, D\varphi(0^+) \neq 0$ i dalje rešavamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu po $\varphi(t)$.

U opštem slučaju, u rešenju diferencijalne jednačine odziva se javlja zavisnost od $\delta(t)$ i njegovih izvoda pa je reč o neregularnoj komutaciji. Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ manjeg reda od reda polinoma $B(D)$, da je reč o neregularnoj komutaciji (jeste došlo do promene početnih uslova).

Pitanje 63.

Određivanje odziva na *Heaviside*-ovu pobudu „balansiranjem“ diferencijalne jednačine odziva

Neka u lineranom i vremenski nepromenljivom kolu r-tog reda bez akumulirane energije deluje *Heaviside*-ov generator $e(t) = Eh(t)$. Objasnićemo primenu balansiranja diferencijalne jednačine odziva na primeru.

Neka je diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)Eh(t)$$

Konačno rešenje za $\forall t$:

$$y(t) = z(t)h(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$
$$f(t) = \varphi(t)h(t), \qquad indiciona\ funkcija\ kola$$

Možemo pisati

$$A(D)f(t) = B(D)h(t)$$

Neka je $r = 2$ red polinoma $A(D)$, a $q = 1$ red polinoma $B(D)$.

$$A(D) = D^2 + a_1 D + a_0$$

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 + b_1 D \\ B(D)h(t) &= b_0 h(t) + b_1 Dh(t) \\ &= b_0 h(t) + b_1 \delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(D)f(t) &= D^2 f(t) + a_1 Df(t) + a_0 f(t) \\ &= a_0\big(\varphi(t)h(t)\big) + a_1\big[D\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] + \big[D^2\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] \\ &= a_0\varphi(t)h(t) + a_1[D\varphi(t)h(t) + \varphi(0^+)\delta(t)] \\ &\qquad + \big[D^2\varphi(t)h(t) + D\varphi(0^+)\delta(t) + D\big(\varphi(0^+)\big)h(t)\big] + \varphi(0^+)\delta'(t) \text{ [8]} \\ &= h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+)] + \delta'(t)\varphi(0^+) \end{aligned}$$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\begin{aligned} &h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + a_2 D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2 D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+) \\ &= b_0 h(t) + b_1\delta(t) \end{aligned}$$

[8] $D\varphi(0^+) = D\big(\varphi(t)\big)$ za $t = 0^+$, dok je $D\big(\varphi(0^+)\big) = \frac{\mathrm{d}\varphi(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0$ (izvod konstante)

Vršimo balansiranje prethodne jednačine, odn. izjednačavamo odgovarajuće članove uz $h(t), \delta(t), \delta'(t)$ (u opštem slučaju $\delta''(t), \dots$) sa leve i desne strane:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1 D + a_0)\varphi(t) = b_0 \quad (\mathbf{1}) \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \quad (\mathbf{2}) \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = 0 \quad (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

Ubacivanjem $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{2})$ dobijamo:

$$D\varphi(0^+) = b_1$$

pa zatim rešavamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu $(\mathbf{1})$ čiji je karakteristični polinom

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0 = 0$$

a rešenje oblika $\varphi(t) = \underline{K}_1 e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}_2 e^{\underline{S}_2 t}$.

Pomoću početnih uslova

$$\begin{aligned} &\varphi(0^+) = 0 \\ &D\varphi(0^+) = b_1 \end{aligned}$$

nalazimo konstante $\underline{K}_1$ i $\underline{K}_2$.

Konačno,

$$y(t) = \varphi(t)h(t)E.$$

Ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

Pitanje 64.

Odziv na impulsnu pobudu. *Green*-ova funkcija.

Ako je ekscitacija impulsnog oblika u kolu se po pravilu javlja neregularna komutacija – vrši se izmena početnih uslova:

$$u_C(0^+) \neq u_C(0^-), \qquad i_L(0^+) \neq i_L(0^-).$$

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije, u kome deluje impulsna ekscitacija: $e(t) = F\delta(t)$. Diferencijalna jednačina odziva je: $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$ sa početnim uslovima $D^{i-1}y(0^-) = 0$, $(i = 1,2, \dots r)$. Odziv se može rešavati posredno, na osnovu veze *Heaviside*-ove i *Dirac*-ove funkcije (odn. indicione i *Green*-ove funkcije kola), i direktno, iz polazne diferencijalne jednačine.

Posredno rešavanje

1) *Na osnovu veze Heaviside-ove i Dirac-ove funkcije kola.*

Kako je:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

pri čemu je:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[h(t) - h(t-\varepsilon)]\,,$$

tade je ekscitacija $e(t)$ zadata sa:

$$e(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} e_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F}{\varepsilon}[h(t) - h(t-\varepsilon)]$$

Posmatrajmo sada odziv na ekscitaciju oblika $e_\varepsilon(t) = e_1(t) + e_2(t)$, gde je:

$$e_1(t) = \tfrac{F}{\varepsilon}h(t) \text{ i } e_2(t) = -\tfrac{F}{\varepsilon}h(t-\varepsilon).$$

Metodom superpozicije, odziv usled ekscitacije $e_\varepsilon(t)$ će biti: $y_\varepsilon(t) = y_1(t) + y_2(t)$, gde su $y_1(t)$ i $y_2(t)$ odzivi na ekscitacije $e_1(t)$ i $e_2(t)$, koje određujemo iz diferencijalnih jednačina:

$$A(D)y_1(t) = B(D)e_1(t) \longrightarrow y1(t) = \frac{F}{\varepsilon}f(t)$$

i

$$A(D)y_2(t) = B(D)e_2(t) \longrightarrow y_2(t) = -\frac{F}{\varepsilon}f(t-\varepsilon),$$

gde je () indiciona funkcija kola.

Tačno rešenje na pobudu: () = (), dobija se u graničnom procesu

$$(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F}{\varepsilon}[f(t) - f(t-\varepsilon)] \Rightarrow y(t) = F\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

što znači da je odziv na impulsnu ekscitaciju srazmeran jačini udara ekscitacije F i izvodu indicione funkcije po vremenu. Funkcija koja se dobija kao količnik odziva na impulsnu ekscitaciju i jačine udara ekscitacije je funckija mreže koja se naziva *Green-ova funkcija*: $g(t) = \frac{y(t)}{F} = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$. Kao i u slučaju indicione funkcije i *Green*-ova funkcija može imati različitu prirodu u zavisnosti od prirode odziva i prirode ekscitacije.

2) *Na osnovu veze indicione i Green-ove funkcije kola*

Umesto da tražimo *Green*-ovu funkciju kola iz jednačine $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$ nalazimo indicionu funkciju kola iz $A(D)f(t) = B(D)h(t)$. A *Green*-ova funkcija je jednaka izvodu indicione funkcije po vremenu.

Direktno rešavanje

Polaznu diferencijalnu jednačinu $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$ podelimo sa jačinom udara ekscitacije F i dobijamo $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$, sa početnim uslovima $D^{i-1}g(0^-) = 0$, $(i = 1,2, \ldots r)$, iz koje direktno možemo odrediti $g(t) = \frac{y(t)}{F}$. Rešenje posmatramo u obliku

$g(t) = \varphi(t)h(t) + H_1\delta(t) + H_2\delta'(t) + \cdots.$

Ako je red polinoma $A(D)$ veći ili jednak od reda polinoma $B(D)$ u rešenju indicione funkcije postojaće članovi uz *Dirac*-ovu funkciju i njen izvod, pa je komutacija neregularna. Pretpostavljeno rešenje ubacimo u $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$, i izbalansiramo levu i desnu stranu, odakle nalazimo koeficijente $H_1, H_2, \ldots$ i izmenjene početne uslove $D^{i-1}\varphi(0^+)$, $(i = 1,2, \ldots r)$. Rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu $A(D)\varphi(t) = 0$ sa izračunatim početnim uslovima.

Ako je red polinoma $A(D)$ manji od reda polinoma $B(D)$, $g(t) = \varphi(t)h(t)$ i rešenje se sadrži samo iz homogene diferencijalne jednačine $A(D)\varphi(t) = 0$, a pocetne uslove nalazimo uzastopnom integracijom r puta polazne diferencijalne jednačine $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$ u granicama od 0^- do 0^+.

Pitanje 65.
Odziv na usponsku i stepene funkcije vremena.

Ako u kolu deluje ekscitacija oblika usponske funkcije

$$e(t) = \frac{E}{T}r(t) = \frac{E}{T}th(t),$$

prinudni odziv se može odrediti na osnovu veze usponske i *Heaviside*-ove funkcije:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau = th(t).$$

Diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\frac{E}{T}th(t)$$

se može rešiti posredno tako što se diferencira i leva i desna strana jednačine čime se dobija jednačina

$$A(D)y_1(t) = B(D)e(t) = B(D)\frac{E}{T}h(t)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju.

Odziv $y_1(t) = \frac{E}{T}f(t)$ gde je $f(t)$ odgovarajuća indiciona funkcija, jeste pomoćni odziv – odziv na *Heaviside*-ovu (pomoćnu) ekscitaciju $e_1(t) = \frac{E}{T}h(t)$. Stvaran odziv na usponsku ekscitaciju $e(t) = \frac{E}{T}r(t)$ je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{E}{T}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

što u slučaju da je indiciona funkcija data izrazom $f(t) = \varphi(t)h(t)$ iznosi:

$$y(t) = \frac{E}{T}h(t)\int_{0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Odzivi na stepene funkcije vremena oblika $e(t) = E\left(\frac{t}{T}\right)^n$ se takođe višestrukim diferenciranjem i integraljenjem mogu rešiti primenom odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju.

Pitanje 66.

Veza indicione i *Green*-ove funkcije.

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije, u kome deluje impulsna ekscitacija: $e(t) = F\delta(t)$. Impulsni odziv na ovu ekscitaciju je $y(t) = Fg(t)$. Na mesto impulsne ekscitacije ubacujemo pomoćni *Heaviside*-ov generator $e_1(t) = Eh(t)$. Impulsni odziv na ovu ekscitaciju je $y_1(t) = Ef(t)$.

Diferencijalna jednačina odziva na impulsnu ekscitaciju je $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$, deljenjem ove jednačine sa F dobija se $A(D)g(t) = B(D)\delta(t) \quad (\mathbf{1})$.

Diferencijalna jednačina odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju je $A(D)y_1(t) = Eh(t)$, deljenjem ove jednačine sa E dobija se $A(D)f(t) = B(D)h(t)$. Diferenciranjem ove jednačine po vremenu dobijamo

$$D[A(D)f(t)] = D[B(D)h(t)]$$
$$A(D)Df(t) = B(D)\delta(t) \qquad (\mathbf{2})$$

Iz $(\mathbf{1})$ i $(\mathbf{2})$ sledi veza indicione i *Green*-ove funkcije

$$Df(t) = g(t).$$

Pitanje 67.
Odziv na eksponencijalnu i periodičnu pobudu.

Eksponencijalna ekscitacija

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije. Ako je ekscitacija oblika: e(t) = e^{at}, pri čemu konstanta a ima prirodu frekvencije, tada je diferencijalna jednačina odziva: $A(D)y(t) = B(D)e^{at} = F(t)$.

Partikularno rešenje $y(t)$ je istog oblika kao $F(t)$ dok se koeficijenti koji figurišu u $y(t)$ nalaze ubacivanjem pretpostavljenog partikularnog rešenja u polaznu diferencijalnu jednačinu čime se dobija $A(D)y(t) = F(t)$ a zatim se jednačina izbalansira.

Razlikuju se dva slučaja:

a) Slučaj kada učestanost a nije jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti kola (rešenje karakterističnog polinoma $A(\underline{S})$. Tada je odziv kola oblika: $y(t) = Ke^{at}$. Zamenom u polaznu jednačinu: $A(D)y(t) = B(D)e^{at}$, dobija se vrednost konstante K:
$$K = \frac{B(a)}{A(a)},$$
pri $A(a) \neq 0$, gde su $A(a)$ i $B(a)$ polinomi po frekvenciji a, dobijeni iz odgovarajućih operatorskih polinoma $A(D)$ i $B(D)$. Ako je učestanost kompleksna: $a = \underline{s} = (\sigma + j\omega)$, tada će i koeficijent K biti kompleksan.

b) Ako je učestanost a jednaka nekoj od sopstvenih ucestanosti kola: $a = s_i$ (bilo da je realna ili kompleksna) tj. ako je $A(a) = 0$, tada je odziv oblika: $y(t) = t^p K e^{at}$ sa:
$$K = \frac{B(a)}{A^{(p)} a},$$
gde je p red višestrukog korena polinoma $A(s)$, dok $A^{(p)}(a)$ predstavlja izvod p-tog reda polinoma $A(s)$ po s u tački $s = a$. S obzirom na *Euler*-ovu smenu: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$, prostoperiodične funkcije $\cos(\omega t + \alpha)$ i $\sin(\omega t + \beta)$ pripadaju klasi eksponencijalnih funkcija.

Prostoperiodična ekscitacija.

Odziv na periodičnu ekscitaciju koja se uključuje u trenutku $t = 0$

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \delta)\, h(t)$$

može se odrediti direktno ili posredno.

Pri *direktnom rešavanju* se pretpostavljen prostoperiodični impulsni odziv

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \gamma)\,, \qquad t \geq 0$$

zameni u polaznu diferencijalnu jednačinu, a zatim izvrši balansiranje leve i desne strane čime se nalaze vrednosti Y_m i γ.

Posredno rešavanje se svodi na odziv na eksponencijalnu ekscitaciju primenom *Euler*-ove smene: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$. Uvodimo smene:

$$\underline{e}(t) = \underline{E}_m e^{j\omega t} \qquad \underline{E}_m = E_m e^{j\gamma}$$
$$\underline{e}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{e}(t) \quad \underline{e}_2(t) = \frac{1}{2}\underline{e}^*(t)$$

Sada je:

$$e(t) = \left(\underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)\right) h(t).$$

Rešavamo diferencijalnu jednačinu odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)\right) h(t)$$

Za $t < 0$: $y(t) = 0$, jer je kolo bez akumulirane energije.

Za $t \geq 0$: $y(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)\right) = F(t)$$

$y(t)$ je istog oblika kao i $F(t)$:

$$y(t) = \underline{y}_1(t) + \underline{y}_2(t)$$

i ovde uvodimo smene:

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t} \qquad \underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$$
$$\underline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{y}(t) \quad \underline{y}_2(t) = \frac{1}{2}\underline{y}^*(t)$$

Sada rešavamo diferencijalnu jednačinu koju dobijamo deljenjem sa 2 sledeće jednačine:

$$A(D)\underline{y}_1(t) = B(D)\underline{e}_1(t) \quad /\cdot\frac{1}{2}$$
$$A(D)\underline{y}(t) = B(D)\underline{e}(t)$$
$$A(D)\underline{Y}_m e^{j\omega t} = B(D)\underline{E}_m e^{j\omega t}$$

Uočavajući da je $De^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$, odn. $D^2 e^{j\omega t} = (j\omega)^2 e^{j\omega}$ dobija se da je

$$A(j\omega)\underline{Y}_m = B(j\omega)\underline{E}_m$$

Konačno,

$$\underline{Y}_m = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \underline{E}_m = Y_m e^{j\delta}$$

$$\underline{y}(t) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} E_m e^{j\gamma} e^{j\omega t}$$

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \delta).$$

Pitanje 68.

Određivanje potpunog odziva.

U najopštijem slučaju kolo sadrži generatore i poseduje akumuliranu energiju. Odziv koji pritom nastaje predstavlja potpun odziv i posledica je oba navedena uzroka. Posmatra se opet jedno linearno i vremenski nepromenljivo kolo reda r koje se sastoji iz linearne i vremenski nepromenljive mreže N, koja poseduje akumuliranu energiju i ukupno $g = f + h$ nezavisnih generatora: $u_{g1}, \dots, u_{gf}, i_{g1}, \dots, i_{gh}$, predstavljenih van mreže. Diferencijalna jednačina odziva za bilo koju promenljivu $y(t) \in \{u_k, i_k\}$, $(k = 1,2,\dots)$ je oblika:

$$A(D)y(t) = \sum_{s=1}^{g} \left[B_{y,s}(D)e_s(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

za čije je rešenje potrebno znati prvih r početnih (izvedenih) uslova:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= h_{10}, \\ Dy(0^+) &= h_{20}, \\ &\vdots \\ D^{r-1}y(0^+) &= h_{r0} \end{aligned}$$

gde su vrednosti h_{i0}, $i = 1,2,\dots,r$ određene stvarnim početnim uslovima: $u_{C_k}(0^+), i_{L_j}(0^+), k = 1,2,\dots b_C$, $j = 1,2,\dots b_L$, kao i vrednostima ekscitacija: $u_{gm}(0^+)$, $i_{gn}(0^+)$, $m = 1,2,\dots,f$, $n = 1,2,\dots,h$. Pri tome, ako je komutacija regularna, tada je: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$, dok u protivnom treba odrediti izmenjene početne uslove.

Diferencijalna jednačina odziva se može rešavati na dva načina: direktno i superpozicijom.

Direktno rešavanje

Rešava se polazna nehomogena diferencijalna jednačina

$$A(D)y(t) = \sum_{i=1}^{g} \left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

čije je rešenje u obliku:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Član $y_h(t)$ predstavlja rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_h(t) = 0$$

Konstante u članu $y_h(t)$ se nalaze iz početnih uslova

$$\begin{aligned} y(0^+) &= h_{10}, \\ Dy(0^+) &= h_{20}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$D^{r-1}y(0^+) = h_{r0}$$

Član $y_p(t)$ predstavlja partikularno rešenje koje je istog oblika kao nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ polazne diferencijalne jednačine:

$$y_p(t) = \sum_{(i=1)}^{g} y_{pi}(t)\,, \qquad y_{pi}(t) \sim e_i(t)$$

Zatim se u polaznu diferencijalnu jednačinu ubaci $y_p(t)$:

$$A(D)y_p(t) = \sum_{i=1}^{g}\left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

i jednačina se izbalansira.

Rešavanje superpozicijom

Ovaj postupak smemo da primenimo u linearnim kolima. Odvojeno tražimo odziv na akumuliranu energiju, $y_0(t)$, u kolu bez generatora i odziv usled delovanja generatora $y_e(t)$ u kolu bez akumulirane energije. Drugim rečima, ukupan odziv je jednak sumi sopstvenog i prinudnog odziva $y(t) = y_0(t) + y_e(t)$.

Sopstveni odziv se određuje iz homogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_0(t) = 0$$

sa izvedenim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= f_{10}, \\ Dy(0^+) &= f_{20}, \\ &\vdots \\ D^{r-1}y(0^+) &= f_{r0} \end{aligned}$$

koji su određeni sa $u_{C_k}(0^+) = 0, i_{L_j}(0^+) = 0, k = 1, 2, \dots b_C,\ j = 1, 2, \dots b_{L.}$ Pri tome, ako je komutacija regularna, tada je: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$, dok u protivnom treba odrediti izmenjene početne uslove.

Prinudni odziv se određuje iz nehomogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_e(t) = \sum_{i=1}^{g}\left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

sa izvedenim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= k_{10}, \\ Dy(0^+) &= k_{20}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$D^{r-1}y(0^+) = k_{r0}$$

koji su određeni sa $u_{C_k}(0^+) = 0, i_{L_j}(0^+) = 0, k = 1, 2, \ldots b_C,\ j = 1, 2, \ldots b_L$, odnosno samo ekscitacijama.

Prinudni odziv će biti oblika:

$$y_e(t) = y_{eh}(t) + y_{ep}(t).$$

Pitanje 69.

Ustaljen prostoperiodičan režim. Kompleksan domen.

Posmatrajmo delovanje jedne prostoperiodične ekscitacije:

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

u linearnom, vremenski nepromenljivom i pasivnom kolu bez akumulisane energije, pri čemu je:

E – maksimalna vrednost (amplituda) funkcije. $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ – efektivna vrednost funkcije. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – kružna frekvencija. T – perioda funkcije. $(\omega t - \gamma)$ – trenutna faza. γ – početna faza (u trenutku $t = 0$). Odziv kola $y(t)$ je određen diferencijalnom jednačinom:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t)$$

i oblika je sume dva člana: $y(t) = y_h(t)$ i $y_p(t)$. Rešenje homogenog dela je oblika:

Ako je kolo striktno pasivno, komponenta $y_h(t)$ će težiti nuli posle dovoljno dugo vremena (praktično, posle trajanja u vrednosti od pet vremenskih konstanti), pa se ova komponenta naziva prelazni odziv.

Dakle, posle dovoljno dugo vremena postojaće samo prinudni odziv $y_p(t)$ koji je opisan funkcijom istog oblika kao ekscitacija:

$$y(t) \equiv y_p(t) = Y_m \cos(\omega t + \delta) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \delta)$$

sa analognim značenjem veličina kao i za ekscitaciju. Komponente ustaljenog odziva mogu se odrediti na dva načina – direktno i posredno.

Direktno određivanje

Pretpostavljen prostoperiodični impulsni odziv

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \gamma)\,, \qquad t \geq 0$$

zameni se u polaznu diferencijalnu jednačinu, a zatim izvrši balansiranje leve i desne strane čime se nalaze vrednosti Y_m i γ, što predstavlja rešavanje kola u vremenskom domenu.

Posredno određivanje

Svodi se na odziv na eksponencijalnu ekscitaciju primenom *Euler*-ove smene: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$, što predstavlja rešavanje kola u kompleksnom domenu.

Pomoću *Euler*-ove smene, prostoperiodična ekscitacije se može izraziti pomoću dve eksponencijalne funkcije vremena:

$$e(t) = \frac{E_m}{2}\left[e^{j(\omega t+\gamma)} + e^{-j(\omega t+\gamma)}\right] = \underline{e_1}(t) + \underline{e_2}(t) \,,$$

gde su funckije $\underline{e_1}(t)$ i $\underline{e_2}(t)$ konjugovano kompleksne:

$$\underline{e}(t) = \underline{E_m} e^{j\omega t} \qquad \underline{E_m} = E_m e^{j\gamma}$$
$$\underline{e_1}(t) = \frac{1}{2}\underline{e}(t) \qquad \underline{e_2}(t) = \frac{1}{2}\underline{e}^*(t)$$

Veličine $\underline{e}(t)$, $\underline{e_1}(t)$ i $\underline{e_2}(t)$ su kompleksne funkcije vremena i zovu se kompleksne trenutne vrednosti. Njihovi moduli su: E_m za $\underline{e}(t)$ i $\frac{E_m}{2}$ za $e_1(t)$ i $e_2(t)$, a argumenti zavise od vremena i iznose $(\omega t + \gamma)$ za $\underline{e}(t)$ i $\underline{e_1}(t)$ i $-(\omega t + \gamma)$ za $\underline{e_2}(t)$.

Sada je diferencijalna jednačina odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e_1}(t) + \underline{e_2}(t)\right) = F(t)$$

$y(t)$ je istog oblika kao i $F(t)$:

$$y(t) = \underline{y_1}(t) + \underline{y_2}(t)$$

i ovde uvodimo smene:

$$\underline{y}(t) = \underline{Y_m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{Y_m} e^{j\omega t} \qquad \underline{Y_m} = Y_m e^{j\delta}$$
$$\underline{y_1}(t) = \frac{1}{2}\underline{y}(t) \qquad \underline{y_2}(t) = \frac{1}{2}\underline{y}^*(t)$$

Sada rešavamo diferencijalnu jednačinu koju dobijamo deljenjem sa 2 sledeće jednačine:

$$A(D)\underline{y_1}(t) = B(D)\underline{e_1}(t) \quad /:2$$
$$A(D)\underline{y}(t) = B(D)\underline{e}(t)$$
$$A(D)\underline{Y_m} e^{j\omega t} = B(D)\underline{E_m} e^{j\omega t}$$

Uočavajući da je $De^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$, odn. $D^2 e^{j\omega t} = (j\omega)^2 e^{j\omega}$ dobija se da je

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y_m} = \underline{B}(j\omega)\underline{E_m}$$

Konačno,

$$\underline{Y}_m = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{B}(j\omega)}\underline{E}_m = Y_m e^{j\delta}$$

$$\underline{y}(t) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{B}(j\omega)}E_m e^{j\gamma}e^{j\omega t}$$

Kompleksna veličina $\underline{E}_m = E_m e^{j\gamma}$ (analogno i za $\underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$) čiji je moduo jednak amplitudi, a argument odgovara početnoj fazi prostoperiodične funkcije $e(t)$ $(y(t))$ jeste kompleksna amplituda posmatrane vremenske funkcije, pa su kompleksne efektivne vrednosti definisane sa:

$$\underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}} \quad \left(\underline{Y} = \frac{\underline{Y}_m}{\sqrt{2}}\right)$$

Ove kompleksne veličine (bilo amplitude, bilo efektivne vrednosti) su kompleksni predstavnici prostoperiodičnih velicina. Veza između prostoperiodične funkcije i njenog kompleksnog predstavnika je:

$$e(t) = E_m\cos(\omega t+\gamma) = \mathrm{Re}\{\underline{E}_m e^{j\omega t}\} \leftrightarrow \underline{E}_m = E_m\, e^{j\gamma}$$
$$y(t) = Y_m\cos(\omega t+\delta) = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_m e^{j\omega t}\} \leftrightarrow \underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$$
$$\left(\underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}}, \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{Y}_m}{\sqrt{2}}\right)$$

što se naziva preslikavanje iz vremenskog u frekvencijski domen, pa je diferencijalna jednačina odziva:

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y}_m = \underline{B}(j\omega)\underline{E}_m.$$

Ova jednačina je poznata kao jednačina odziva u kompleksnom domenu, s obzirom na polinome $\underline{A}(j\omega)$ i $\underline{B}(j\omega)$.

Pitanje 70.
Funkcije mreže u ustaljenom prostoperiodičnom režimu.

Posmatrajmo jednačinu kola u frekvencijskom domenu:

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y}_m = \underline{B}(j\omega)\underline{E}_m\,.$$

Kako je reč o klasičnom množenju polinoma $\underline{A}(j\omega)$ i $\underline{B}(j\omega)$ sa kompleksnim predstavnicima odziva $\underline{Y}_m$ i pobude $\underline{E}_m$, to se kompleksan odziv može odrediti iz algebarskog izraza:

$$\underline{Y}_m = \underline{E}_m\frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}.$$

Odavde se može odrediti trenutna vrednost prinudnog odziva primenom veze funkcija iz vremenskog i kompleksnog domena:

$$y(t) = \text{Re}\left\{\underline{y}(t)\right\} = \text{Re}\{\underline{Y}_m e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{\frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}\underline{E}_m e^{j\omega t}\right\}$$

Količnik $\frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}$ je određen samo parametrima mreže vezane za krajeve ekscitacije $e(t)$. Ovaj količnik jeste funkcija mreže u kompleksnom domenu, tj. kompleksna funkcija mreže $\underline{T}(j\omega)$:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)} \, .$$

Kompleksna funkcija mreže predstavlja količnik kompleksnog odziva i kompleksne pobude:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{y}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} \, .$$

Kompleksan odziv kola se može predstaviti u vidu proizvoda kompleksne funkcije mreže i kompleksne ekscitacije:

$$\underline{Y}_m = \underline{T}(j\omega)\underline{E}_m \, .$$

Funkcija mreže se može izraziti pomoću realnog dela (parne funkcije) i imaginarnog dela (neparne funkcije):

$$\begin{aligned}\underline{B}(j\omega) &= b_0 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + \cdots \\ &= \underbrace{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \cdots)}_{B_1(\omega)} + j\,\underbrace{\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \cdots)}_{B_2(\omega)} \\ &= B_1(\omega) + jB_2(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{A}(j\omega) &= A_1(\omega) + jA_2(\omega) \\ \underline{T}(j\omega) &= \frac{B_1(\omega) + jB_2(\omega)}{A_1(\omega) + jA_2(\omega)} \cdot \frac{A_1(\omega) - jA_2(\omega)}{A_1(\omega) - jA_2(\omega)} \\ &= \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{A_1^2 + A_2^2} + j\,\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1^2 + A_2^2} \\ &= T_1(\omega) + jT_2(\omega)\end{aligned}$$

A možemo je prikazati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}B(\omega) &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \\ \beta(\omega) &= \text{arctg}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \\ \underline{B}(j\omega) &= B(\omega)e^{j\beta(\omega)} \\ \underline{A}(j\omega) &= A(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \\ \underline{T}(j\omega) &= \frac{B(\omega)e^{j\beta(\omega)}}{A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}} = T(\omega)e^{j\tau(\omega)} \\ T(\omega) &= \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}\end{aligned}$$

$$\tau(\omega) = \beta(\omega) - \alpha(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Napomenimo da u vremenskom domenu postoje dva oblika funkcije mreže – *Green*-ova i indiciona, dok u kompleksnom domenu postoji samo jedna funkcija mreže.

Pitanje 71.

Linearni transformator u ustaljenom prostoperiodičnom režimu.

Linearni transformator obezbeđuje razmenu energija između ovih mreža, bez direktne (galvanske) veze – mreže su izolovane. Razmena energije se vrši posredstvom zajedničkog magnetnog polja - kalemovi L_1 i L_2 su induktivno spregnuti.

Posmatramo slučaj spregnutih kalemova u ustaljenom prostperiodičnom režimu; neka je linearni transformator recipročan, odn. neka važi $L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$, gde je k koeficijent sprege.

Jednačine linearnog transformatora u vremenskom domenu su:

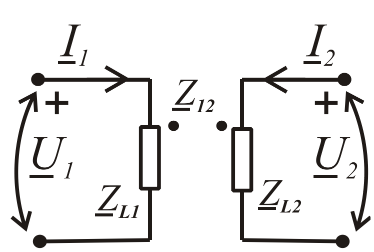
$$u_1 = L_1 D i_1 \pm L_{12} D i_2$$
$$u_2 = L_2 D i_2 \pm L_{12} D i_1$$

Položaju tačkica na slici odgovara znak “+”.

Jednačine linearnog transformatora u kompleksnom domenu su:

$$\underline{U}_1 = \underbrace{j\omega L_1}_{\underline{Z}_{L_1}} \underline{I}_1 + \underbrace{j\omega L_{12}}_{\underline{Z}_{12}} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underbrace{j\omega L_{12}}_{\underline{Z}_{12}} \underline{I}_1 + \underbrace{j\omega L_2}_{\underline{Z}_{L_2}} \underline{I}_2$$

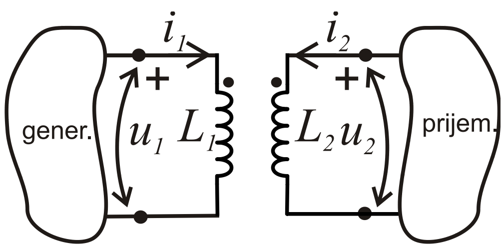
Ekvivalentno kolo u kompleksnom domenu:



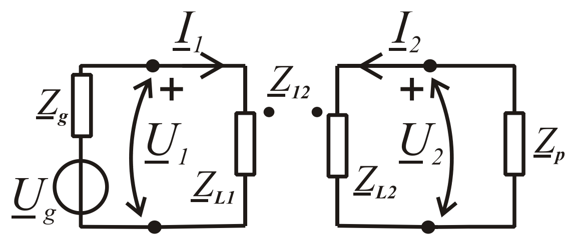
dok su jednačine linearnog transformatora:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{L_1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{L_2}\underline{I}_2\,.$$

Posmatramo kolo:



Ekvivalentno kolo u kompleksnom domenu:



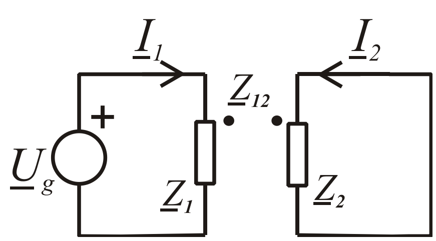
dok su jednačine kola u kompleksnom domenu:

$$\underline{U}_g = \underline{Z}_g\underline{I}_1 + \underline{U}_1 \Longrightarrow \underbrace{\left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_{L_1}\right)}_{\underline{Z}_1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 = \underline{U}_g$$
$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_p\underline{I}_2 \Longrightarrow \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underbrace{\left(\underline{Z}_p + \underline{Z}_{L_2}\right)}_{\underline{Z}_2}\underline{I}_2 = 0$$

Sada su jednačine

$$\left.\begin{aligned}\underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 &= \underline{U}_g\\ \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 &= 0\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

gde je $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12} = jX_{12}$.

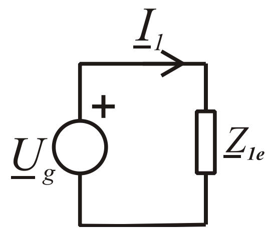


Iz $(*)$ sledi:

$$\underbrace{\left(\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}\right)}_{\underline{Z}_{1e}}\underline{I}_1 = \underline{U}_g$$

gde je ekvivalentna impedansa primarnog kola (impedansa koju vidi naponski generator) $\underline{Z}_{1e} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_1 + \frac{X_{12}^2}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2'$, a $\underline{Z}_2'$ predstavlja preslikanu impedansu sekundara na primarno kolo.

Šema primarnog kola:



Slično možemo izvesti i za sekundarno kolo:

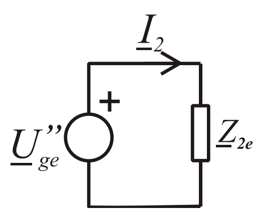
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_g}{\left(\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}\right)}$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_2}\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}_g\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2} = \frac{-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1}\underline{U}_g}{\underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1}} = \frac{-\underline{U}_{ge}''}{\underbrace{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1''}_{\underline{Z}_{e2}}}$$

gde je $\underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1'' = \underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1}$ ekvivalentna impedansa sekundarnog kola, a $\underline{Z}_1'$ predstavlja preslikanu impedansu primara na sekundarno kolo.

Gledano sa strane sekundara, mrežu možemo predstaviti ekvivalentnim *Thevenin*-ovim generatorom sa $\underline{U}_{ge}'' = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1}\underline{U}_g$.

Šema sekundarnog kola:

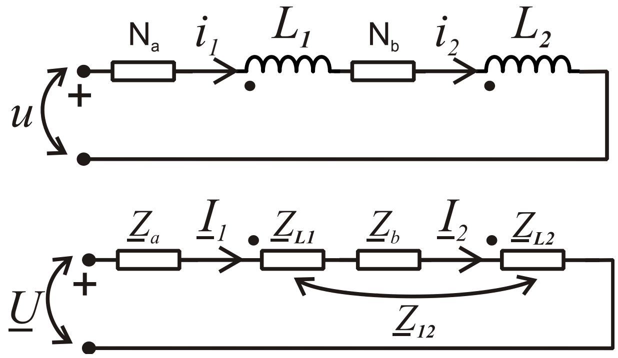


Ekvivalentne impedanse primarnog i sekundarnog kola $\underline{Z}_{1e}$ i $\underline{Z}_{2e}$, možemo predstaviti preko *rezistanse* i *reaktanse*. Gde rezistansa predstavlja gubitke u kolu.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{1e} &= \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2} \\
&= (R_1 + jX_1) + \frac{X_{12}^2}{R_2 + jX_2} \\
&= \left(R_1 + \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2}R_2\right) + j\left(X_1 - \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2}X_2\right) \\
&= R_{1e} + jX_{1e}
\end{aligned}$$

Sprega primara i sekundara povećava gubitke što uočavamo i kod R_{1e}, odn. gubici se preslikavaju.

Redna veza spregnutih kalemova



Za položaj tačaka na slici pišemo jednačine kola:

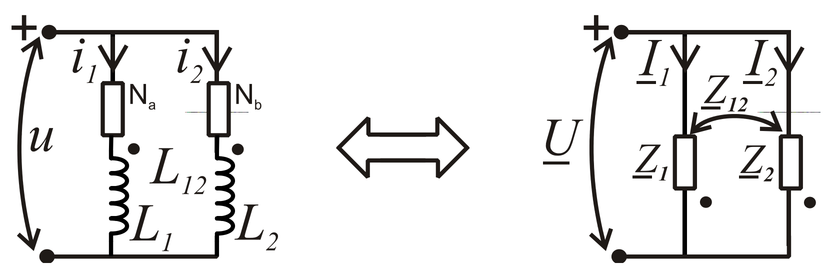
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}$$
$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$
$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

gde su $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_a + \underline{Z}_{L_1}$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_b + \underline{Z}_{L_2}$, $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12}$. Dalje je $\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12})\underline{I}$.

Redna veza induktivno spregnutih mreža u kompleksnom domenu može se zameniti ekvivalentom impedansom:

$$\underline{Z}_{ule} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12}$$

Paralelna veza spregnutih kalemova



Za položaj tačaka na slici pišemo jednačine kola:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 = \underline{U}_2$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

Slično kao i kod redne veze, zaključujemo da se paralelna veza spregnutih mreža u kompleksnom domenu može zameniti ekvivalentnom impedansom

$$\underline{Z}_{ule} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{12}}.$$

Pitanje 72.

Snage u ustaljenom prostoperiodicnom rezimu.

Posmatrajmo mrežu N sa jednim pristupom koja je deo nekog električnog kola. Trenutna ulazna snaga predstavlja brzinu kojom se, spolja, ulaže energija u mrežu N. Za usaglašene smerove napon-struja, ova snaga iznosi: $p(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)i(t)$ - trenutna snaga.

Za mreže sa više pristupa trenutna ulazna snaga je jednaka sumi trenutnih ulaznih snaga svakog od pristupa:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t), \qquad p_k(t) = u_k(t)i_k(t)$$

Neka je mreža N linearna i vremenski nepromenljiva i u njoj je ostvaren ustaljen prostoperiodični režim. Tada su napon i struja na ulazu mreze:

$$u(t) = \sqrt{2}Ucos(\omega t + \theta)$$
$$i(t) = \sqrt{2}Icos(\omega t + \psi).$$

Trenutna ulazna snaga mreze je:

$$\begin{aligned} p(t) &= 2UI\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \psi) = UI[\cos(\theta - \psi) + \cos(2\omega t + \theta + \psi)] \\ &= \underbrace{UI\cos(\theta - \psi)}_{P} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)}_{p_f(t)}. \end{aligned}$$

Trenutna snaga se može prikazati u vidu sume dva člana od kojih je jedan konstantan (nepromenljiv sa vremenom), a drugi je prostoperiodična funkcija vremena, dvostruke frekvencije u odnosu na frekvenciju napona/struje. Konstantan član jeste srednja snaga za vreme jedne periode napona/struje: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, predstavlja srednju (ili još: aktivnu) snagu, a označava se sa slovom P:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(\theta - \psi)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)\mathrm{d}t \\ &= UI\cos(\theta - \psi) + 0 = \frac{a(0,T)}{T}, \end{aligned}$$

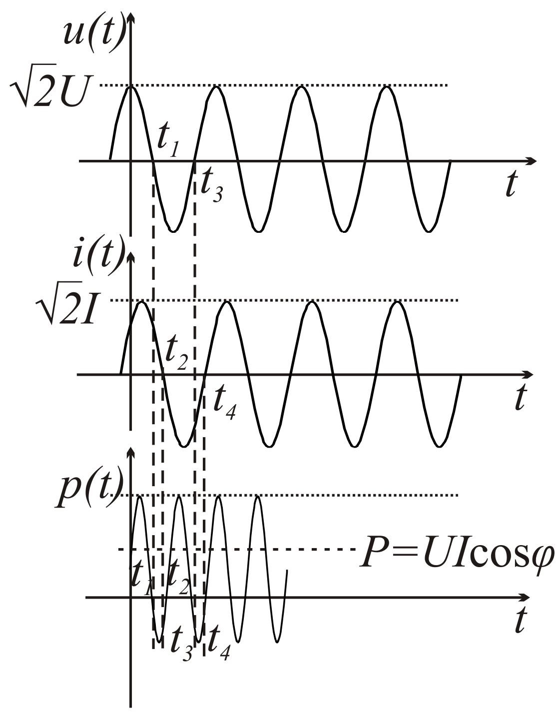
gde je $\varphi = \theta - \psi$, argument impedanse mreže N, a $a(0,T)$ ukupan rad. Drugi član u izrazu je naizmenično pozitivan i negativan i on predstavlja razmenu energije između mreže N i ostatka kola, naziva se fluktuirajućom snagom i označava se sa $p_f(t)$:

$$p_f(t) = UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)$$

Sada se trenutna snaga može definisati sa: $p(t) = P + p_f(t)$. Za realne, striktno pasivne mreže, je: $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, tako da je srednja (aktivna) snaga pasivne mreže uvek pozitivna: $P > 0$.

To znači da mreža N stalno nepovratno troši električnu energiju koja joj se dovodi. Ako mreža sadrži samo induktivne i/ili kapacitivne elemente, tada je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ili $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, pa je aktivna snaga uvek jednaka nuli: $P = 0, \forall t$. Mreže sa takvom osobinom jesu mreže bez gubitaka. Ako je srednja snaga negativna: $P < 0$, tada je mreža aktivna - ona ulaže električnu energiju u ostatak kola.

Vremenski dijagrami, napona, struje i trenutne snage na pristupu pasivne mreže



U intervalu vremena $t_1 - t_2$ mreža predaje energiju ostatku kola, dok u intervalu $t_2 - t_3$ mreža prima energiju od ostatka kola, u intervalu $t_3 - t_4$ mreža opet predaje energiju itd…

Uočavamo da pasivna mreža ulaže energiju u ostatak kola u nekim vremenskim intervalima. Objašnjenje je u postojanju dinamičkih elemenata koji imaju sposobnost akumuliranja energije. U jednom delu periode prostoperiodičnog napona pored ulaganja spoljašnje energije na nepovratne procese vrši se akumuliranje energije u dinamičkim elementima a potom se akumulirana energija delom troši u rezistivnim elementima a delom vraća ostatku kola. Zatim se situacija periodično ponavlja.

Prividna snaga se obeležava sa $S = UI$ i predstavlja snagu koju generator treba da obezbedi. Proizvod efektivnih vrednosti napona i struje na pristupu mreže je prividna snaga i označava se sa S: $S = UI$ – prividna snaga. Ova veličina predstavlja maksimalno odstupanje trenutne snage od srednje (aktivne) snage.

U mrežama koje sadrže dinamičke elemente javlja se i reaktivna snaga, koja karakteriše mrežu u pogledu njenog ponašanja kao reaktivnog prijemnika i označava se sa Q: $Q = UI \sin\varphi$ – reaktivna snaga.

Čisto rezistivna mreža sa jednim pristupom (otpornik)

Spider-pig, spider-pig
Does whatever a spider-pig does
Can he swing from a web
No he can't, he's a pig
Looook ooouuttt here's a spider pig ☺

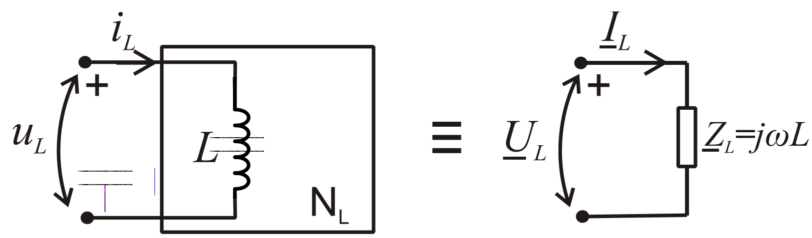
$$u_R = Ri_R$$
$$u_R(t) = \sqrt{2}U_R\cos(\omega t + \theta_R)$$
$$i_R(t) = \sqrt{2}I_R\cos(\omega t + \psi_R)$$

Neka je $\psi_R = \theta_R \Longrightarrow \varphi_R = 0$:

$$\begin{aligned} p_R(t) &= U_R I_R \cos\varphi_R + U_R I_R \cos 2(\omega t + \theta_R) \\ &= U_R I_R\big(1 + \cos 2(\omega t + \theta_R)\big) \geq 0 \end{aligned}$$

U izolovanim tačkama, $p_R(t) = 0$, tu su i trenutni napon i trenutna struja jednaki nuli. Uočavama da trenutna snaga osciluje oko srednje (aktivne) vrednosti.

Čisto induktivna mreža sa jednim pristupom (kalem)



$$
\begin{aligned}
u_L &= LDi_L \\
i_L(t) &= \sqrt{2}I_L\cos(\omega t+\psi_L) \\
u_L(t) &= -L\omega\sqrt{2}I_L\sin(\omega t+\psi_L) \\
&= \sqrt{2}L\omega I_L\cos\left(\omega t+\psi_L+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

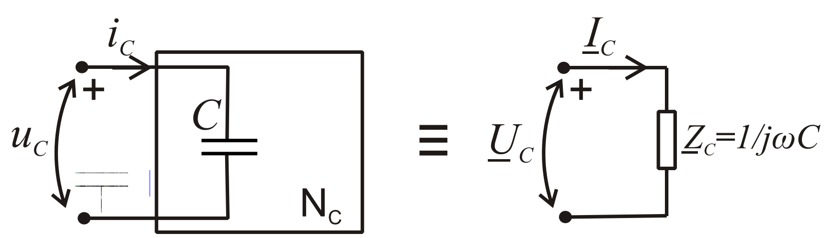
gde je $U_L = L\omega I_L$, $\theta_L = \psi_L + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
p_L(t) &= U_L I_L\cos\frac{\pi}{2} + U_L I_L\cos\left(2\omega t+\theta_L+\theta_L-\frac{\pi}{2}\right) \\
P_L &= 0 \\
p_L(t) &= p_f(t) = U_L I_L\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos 2(\omega t+\theta_L)+\sin\frac{\pi}{2}\sin 2(\omega t+\theta_L)\right) \\
&= U_L I_L\sin 2(\omega t+\theta_L)
\end{aligned}
$$

Kod induktivne mreže je srednja snaga nula, postoji samo razmena energije sa generatorom.

-SLIKA 4, knjiga 2, str. 74-

Čisto kapacitivna mreža sa jednim pristupom (kondenzator)



$$
\begin{aligned}
i_C(t) &= CDu_c(t) \\
u_C(t) &= \sqrt{2}U_C\cos(\omega t+\theta_C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_C(t) &= -C\omega\sqrt{2}U_C\sin(\omega t+\theta_C) \\
&= \sqrt{2}C\omega U_C\cos\left(\omega t+\theta_C+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

gde je $I_C = C\omega U_C, \psi_C = \theta_C + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
p_C(t) &= U_C I_C \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + U_C I_C \cos\left(2\omega t + \theta_C + \theta_C + \frac{\pi}{2}\right) \\
P_C &= 0 \\
p_C(t) &= p_f(t) = U_C I_C \left(\cos\frac{\pi}{2}\cos 2(\omega t + \theta_C) - \sin\frac{\pi}{2}\sin 2(\omega t + \theta_C)\right) \\
&= -U_C I_C \sin 2(\omega t + \theta_C)
\end{aligned}$$

Kod kapacitivne mreže je srednja snaga nula, postoji samo razmena energije sa generatorom.

-SLIKA 6, knjiga 2, str. 72.-

Opšti slučaj

$$\varphi = \theta - \psi$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \theta + \psi) \\
&= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + 2\theta - \varphi) \\
&= UI\cos\varphi + UI\cos\varphi\cos 2(\omega t + \theta) + UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta) \\
&= \underbrace{UI\cos\varphi\,[1 + \cos 2(\omega t + \theta)]}_{p_P(t)} + \underbrace{UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta)}_{p_Q(t)} \\
&= p_P(t) + p_Q(t)
\end{aligned}$$

Trenutna snaga na rezisitivnim elementima odn. trenutna aktivna snaga je

$$p_P(t) = UI\cos\varphi\,[1 + \cos 2(\omega t + \theta)] = P[1 + \cos 2(\omega t + \theta)],$$

a trenutna snaga na reaktivnim (dinamičkim) elementima odn. trenutna reaktivna snaga je

$$p_Q(t) = UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta) = Q\sin 2(\omega t + \theta).$$

Kompleksan domen

Primenom *Euler*-ove smene trenutnu snagu izražavamo uvođenjem smena

$$p(t) = \left(\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t)\right)\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
\underline{u}_1 &= \frac{1}{2}\underline{u} \quad \underline{u} = \sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t} \quad \underline{i}_1 = \frac{1}{2}\underline{i} \quad \underline{i} = \sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t} \\
\underline{u}_2 &= \underline{u}_1^* \quad \underline{U}_m = \sqrt{2}\underline{U} \quad \underline{i}_2 = \underline{i}_1^* \quad \underline{I}_m = \sqrt{2}\underline{I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{2}\left(\underline{u} + \underline{u}^*\right)\frac{1}{2}\left(\underline{i} + \underline{i}^*\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\underline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}^*e^{-j\omega t}\right)\left(\underline{I}e^{j\omega t} + \underline{I}^*e^{-j\omega t}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\underline{U}\underline{I}^* + \underbrace{\underline{U}^*\underline{I}}_{\left(\underline{U}\underline{I}^*\right)^*}\right) + \left(\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + \underbrace{\underline{U}^*\underline{I}^*e^{-j2\omega t}}_{\left(\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\right)^*}\right)\right]$$
$$= \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}^*\} + \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\}$$

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}^*\}$$
$$p_f(t) = \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\}$$

Kompleksna snaga je

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j(\theta-\psi)} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

Reaktivna snaga Q predstavlja snagu koja se „nepotrebno“ ulaže u akumuliranje.

Pitanje 73.

Faktor snage i njegova popravka.

Proizvod efektivnih vrednosti napona i struje na pristupu mreže je prividna snaga i označava se sa S: $S = UI$ – prividna snaga. Ova veličina predstavlja maksimalno odstupanje trenutne snage od srednje (aktivne) snage. Aktivna i reaktivna snaga se mogu izraziti sa: $P = S\cos\varphi$, $Q = S\sin\varphi$. Sve tri veličine imaju prirodu snage, ali se, zbog toga što se njima opisuju različiti efekti u mrežama, uobičajeno da se koriste različite oznake njihovih jedinica:

$$P[W], \qquad Q[VAr], \qquad S = \ [VA]$$

Kvalitet neke mreže kao aktivnog prijemnika energije opisuje se faktorom snage, koji se može označiti sa k_p:

$$k_p = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

Ovaj faktor označava koji se deo raspoložive energije, pri datim efektivnim vrednostima napona i struje, stvarno koristi u mreži u nepovratnom procesu. Maksimalan faktor snage postoji kod čisto rezistivnih mreža: $\cos\varphi = 1$, a za reaktivne mreže je minimalne vrednosti jednake nuli: $\cos\varphi_L = \cos\varphi_C = 0$. Po analogiji sa faktorom snage član $\sin\varphi = \frac{Q}{S}$ koji karakteriše reaktivnu snagu naziva se faktor reaktivnosti.

Radi popravljanja faktora snage, za krajeve prijemnika treba vezati reaktansu suprotnog karaktera od reaktanse prijemnika X_p, što znači da se za prijemnika induktivne prirode, vezuju kapacitivni elementi, a za prijemnike kapacitivne prirode, induktivni elementi.

Ilustracija na primeru kola sa slike:

Kompleksna impedansa $\underline{Z} = R + j\omega L$

Faktor snage je $k_p = \frac{P}{S} = \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. „Idealni“ faktor snage je 1, a to je postignuto kada je kompleksan deo impedanse (reaktivan) jednak nuli.

Jednačina kola:

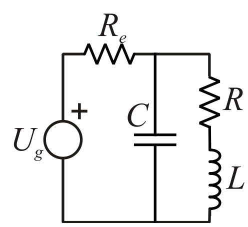
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}$$

Usvojićemo da je početna faza napona jednaka nuli odn. $\underline{U} = U$:

$$\underline{I} = \frac{U(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\underline{I_L} = j\mathrm{Im}\{\underline{\mathrm{I}}\} = \mathrm{j}\frac{-U\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Prijemnik je pretežno induktivan pa ćemo paraleleno vezati kondenzator kapacitivnosti C:



Da bi postigli željeni efekat treba da bude ispunjeno: $\underline{I_L} = -\underline{I_C}$.

$$\underline{I_C} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = Uj\omega C$$

Odnosno, treba da važi

$$\mathrm{j}\frac{-U\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = -Uj\omega C$$

Zaključujemo,

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Pitanje 74.
Ustaljen složenoperiodičan režim.

Realna periodična funkcija vremena oblika: $f(t+kT)=f(x),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ sa periodom T može se predstaviti *Fourier*-ovim redom:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(t)\,,\qquad f^{(0)}(t)=F_0,\qquad f^{(n)}(t)=F_m^{(n)}\cos(n\omega_1 t+\varphi^{(n)})$$

gde su: F_0 – konstantan član, $f^{(n)}(t)$ – n-ta harmonijska komponenta (n-ti harmonik), $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika, $n\omega_1$ – frekvencija n-tog harmonika.

Tada je: $v=f=\frac{1}{T}$ – frekvencija (broj promena u jedinici vremena). Umesto linearne frekvencije koristi se i ugaona frekvencija: $\omega=2\pi f\ [\frac{rad}{s}]$. Da bi realna i periodična funkcija $f(t)$ imala konvergentan *Fourier*-ov red, potrebno je da ispunjava *Dirichlet*-ove uslove koji se svode na to da unutar periode T funkcija mora da zadovoljava:

1) Da je funkcija $f(t)$ ograničena.
2) Da je funkcija $f(t)$ jednoznačna.
3) Da funkcija $f(t)$ ima konačan broj ekstremuma i konačan broj prekida prve vrste u jednom periodu.

Ako u kolu postoje odzivi koji su periodične funkcije vremena, ali nisu prostoperiodične, tada je reč o složenoperiodičnom režimu. U električnim kolima složenoperiodični režim može nastati u sledećim slučajevima:

1) Za linearno vremenski nepromenljivo kolo:
   a. ako deluje jedna ili više složenoperiodičnih pobuda.
   b. ako deluju više prostoperiodičnih pobuda različitih frekvencija.
2) Za kolo koje nije linearno i/ili vremenski invarijantno složenoperiodični režim može nastati i pri delovanju prostih ekscitacija.

Posmatramo linearno i vremenski nepromenljivo kolo u kome deluje jedna složena ekscitacija $e(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}e^{(n)}$ koja je ograničena po amplitudi i u jednom periodu ima konačan broj prekida prve vrste i konačan broj ekstremuma unutar periode T.

Srednja vrednost signala

$$E_0=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}e(t)\mathrm{d}t$$

Pojedinačne ekscitacije su:

$$e^{(n)}=\sqrt{2}E^{(n)}\cos\left(n\omega_1 t+\gamma^{(n)}\right)$$

gde je $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika.

Diferencijalna jednačina odziva po promenljivoj $i_l(t)$ je:

$$A(D)i_l(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(n)}\right)$$

Odziv određujemo principom superpozicije:

$$A(D)i_l^{(n)}(t) = B(D)e^{(n)}(t)\ ,$$

u kompleksnom režimu:

$$\underline{A}(\underline{S})\underline{I}_l^{(n)} = \underline{B}(\underline{S})\underline{E}^{(n)}$$

gde je $\underline{S} = jn\omega_1,\ n = 0,1,2, \dots$

$$\underline{I}_l^{(n)} = \underline{T}(\underline{S})\underline{E}^{(n)} = I_l^{(n)} e_l^{j\psi^{(n)}}$$

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{\underline{B}(\underline{S})}{\underline{A}(\underline{S})}$$

Sada nađene kompleksne predstavnike prebacujemo u kompleksni domen.

$$i_l^{(0)} = I_l^{(0)}$$

$$n \geq 1:\ i_l^{(n)} = \sqrt{2} I_l^{(n)} \cos\left(n\omega_1 t + \psi^{(n)}\right)$$

$$i_l^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_l^{(n)}$$

Delovanje više ekscitacija (deluje više prostoperiodičnih pobuda različitih frekvencija)

Opšta jednačina odziva je

$$A(D)y(t) = \sum_{s=1}^{g} B_s(D)e_s(t)$$

$$y(t) = \sum_{s=1}^{g} y_s(t)$$

gde je $y_s(t)$ pojedinačni odziv na svaku od ekscitacija.

Primer: U kolu deluju dva generatora $u_g(t)$ i $i_g(t)$.

$$u_g(t) = U_0 + u^{(1)} + u^{(4)}$$
$$i_g(t) = i_g^{(2)} + i_g^{(3)}$$

Ukupan odziv će biti:

$$i_l(t) = i_l^{(0)} + i_l^{(1)} + i_l^{(2)} + i_l^{(3)} + i_l^{(4)}$$

Diferencijalna jednačina odziva je

$$A(D)i_l(t) = B_1(D)u_g(t) + B_2(D)i_g(t)$$

Sada nalazimo pojedinačne odzive:

$$n = 0: \qquad A(D)i_l^{(0)}(t) = B(D){u_g}^{(0)}(t)$$
$$a_0 I_l^{(0)} = b_{10} U_0$$
$$i_l^{(0)} = I_l^{(0)} = \frac{b_{10}}{a_0}$$
$$n = 1: \qquad \underline{A}(j\omega_1)\underline{I}_l^{(1)} = \underline{B}_1(j\omega_1){\underline{U}_g}^{(1)}$$
$$\underline{I}_l^{(1)} = I_l e^{j\psi_l^{(1)}}$$
$$i_l^{(1)} = \sqrt{2} I_l^{(1)} \cos\left(\omega_1 t + \psi_l^{(1)}\right)$$
$$n = 2: \quad \underline{A}(j2\omega_2)\underline{I}_l^{(2)} = \underline{B}_2(j2\omega_2){\underline{I}_g}^{(2)}$$

Pitanje 75.

Razvoj periodične funkcije u *Fourier*-ov red.

Da bi realna i periodična funkcija $f(t)$ imala konvergentan *Fourier*-ov red, potrebno je da ispunjava *Dirichlet*-ove uslove koji se svode na to da unutar periode T funkcija mora da zadovoljava:

1) Da je funkcija $f(t)$ ograničena.
2) Da je funkcija $f(t)$ jednoznačna.
3) Da funkcija $f(t)$ ima konačan broj ekstremuma i konačan broj prekida prve vrste u jednom periodu.

Fourier-ov red funkcije $f(t)$ dat je izrazom:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t), \qquad f^{(0)}(t) = F_0, \qquad f^{(n)}(t) = F_m^{(n)} \cos(n\omega_1 t + \varphi^{(n)})$$

gde su: F_0 – konstantan član, $f^{(n)}(t)$ – n-ta harmonijska komponenta (n-ti harmonik), $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika, $n\omega_1$ – frekvencija n-tog harmonika.

Koeficient F_0 je srednja vrednost signala za vreme jedne periode:

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Ovakav oblik *Fourier*-ovog reda poznat je kao trigonometrijski oblik *Fourier*-ovog reda. Prostoperiodične funkcije $\cos(n\omega_1 t + \varphi^{(n)})$ mogu se, prema pravilu o kosinusu zbira, razložiti:

$$\cos\left(n\omega_1 t + \varphi^{(n)}\right) = \cos(n\omega_1 t)\cos\left(\varphi^{(n)}\right) - \sin(n\omega_1 t)\sin(\varphi^{(n)})$$

čime se *Fourier*-ov red može predstaviti u obliku:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n-1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)]$$

pri čemu je

$$A_n = C_m^{(n)}\cos\left(\varphi^{(n)}\right), \qquad B_n = C_m^{(n)}\sin\left(\varphi^{(n)}\right)$$

odnosno:

$$C_m^{(n)}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(-\frac{B_n}{A_n}\right), & A_n > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{B_n}{A_n}\right) + \pi, & A_n < 0 \end{cases}$$

Koeficijent A_n predstavlja dvostruku srednju vrednost, za jednu periodu, proizvoda funkcije $f(t)$ i $\cos(n\omega_1 t)$:

$$\begin{aligned} f(t)\cos(n\omega_1 t) &= \\ &= A_0\cos(n\omega_1 t) + A_n\cos^2(n\omega_1 t) + \left(\sum_{m=1, m\neq n}^{\infty} A_m \cos(m\omega_1 t)\right)\cos(n\omega_1 t) \\ &+ \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\omega_1 t)\right)\cos(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{T}\int_0^T A_n \cos^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t + 0 + 0 \\
&= \frac{1}{2T}A_n\int_0^T \mathrm{d}t + \frac{1}{2T}A_n\int_0^T \cos(2n\omega_1 t) \\
&= \frac{A_n}{2} + 0 = \frac{A_n}{2}.
\end{aligned}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

Koeficijent B_n predstavlja dvostruku srednju vrednost, za jednu periodu, proizvoda funkcije $f(t)$ i $\sin(n\omega_1 t)$:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

Pitanje 76.

Kompleksan oblik *Fourier*-ovog reda.

Trigonometrijske funkcije mogu se izraziti u eksponencijalnom (kompleksnom obliku):

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}\left[e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}\right], \qquad \sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j}\left[e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}\right]$$

pa se *Fourier*-ov red može predstaviti u obliku:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{2}\left[e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{2j}\left[e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}\right].$$

Grupisanjem članova sa pozitivnim i negativnim eksponentom dobija se:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(A_n - jB_n)e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(A_n + jB_n)e^{-jn\omega_1 t}$$

Uvođenjem kompleksne konstante: $\underline{C}_n = \frac{1}{2}(A_n - jBn)$ i $\underline{C}_n^* = \frac{1}{2}(A_n + jBn)$,

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(\cos(n\omega_1 t) - j\sin(n\omega_1 t))$$
$$= \frac{1}{T\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_1 t}\mathrm{d}t}$$
$$\underline{C}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = A_0$$

$\underline{C}_0$ je srednja vrednost signala.

Fourier-ov red ima oblik:

$$f(t) = \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n^* e^{-jn\omega_1 t}$$
$$= \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} (\underline{C}_n^* e^{-jn\omega_1 t})^*.$$

Kako je funkcija $\cos(n\omega_1 t)$ parna funkcija, funkcija $\sin(n\omega_1 t)$ neparna, važiće $C_n^* = C_{-n}$, pa je:

$$f(t) = \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_{-n} e^{-jn\omega_1 t}$$
$$= \underline{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$$

čime se dobija:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$$

Kompleksan oblik *Fourier*-ovog reda koji je u važnosti za svako celobrojno n uključujući i $n = 0$. Svi koeficijenti *Fourier*-ovog reda u kompleksnom obliku dati su izrazom:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(\tau) e_1^{-jn\omega_1 t} \mathrm{d}\tau$$

Koeficijenti C_n predstavljaju frekvencijsku sliku periodične funkcije vremena $f(t)$ i poznati su kao kompleksne amplitude *Fourier*-ovog reda.

Pitanje 77.

Snage u ustaljenom složenoperiodičnom režimu.

U ustaljenom složenoperiodičnom režimu trenutna, srednja (aktivna) i prividna snaga se definišu sa:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

trenutna snaga,

$$P = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} p(t)\mathrm{d}t$$

srednja (aktivna) snaga,

$$S = UI$$

prividna snaga, gde su $u(t)$ i $i(t)$ trenutne vrednosti napona i struje na pristupu (usaglašenih smerova), a U i I su njihove efektivne vrednosti.

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(t)$$
$$i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} i^{(m)}(t)$$

sa:

$$u^{(0)} = U_0, \qquad u^{(n)}(t) = \sqrt{2}U^{(n)}\cos\left(n\omega_1 t + \theta^{(n)}\right), \qquad n \geq 1$$
$$i^{(0)} = I_0, \qquad i^{(m)}(t) = \sqrt{2}I^{(m)}\cos\left(m\omega_1 t + \psi^{(m)}\right), \qquad n \geq 1$$

gde je $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ učestanost osnovnog harmonika.

Trenutna ulazna snaga

Posmatrajmo linearnu, vremenski nepromenljivu mrežu N. Ako se ekscitacija $e(t)$ može opisati periodičnom funkcijom vremena periode T, u ustaljenom režimu će svi odzivi mreže, a time i napon i struja na pristupu, biti periodični, iste periode kao i ekscitacija i sa istim sadržajem harmonika, pa je trenutna ulazna snaga:

$$p(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(t)\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} i^{(m)}(t)\right].$$

Ako razdvojimo članove sa istim i različitim frekvencijama dobijamo:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(t) i^{(n)}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, m\neq n}^{\infty} \left[u^{(n)}(t) i^{(n)}(t)\right]$$

U odnosu na prostoperiodični režim, situacija je složenija jer se javljaju proizvodi harmonika napona i struje različitih frekvencija.

Trenutna ulazna snaga n-tog harmonika

Proizvod komponenenata napona i struje istog indeksa odgovara trenutnoj ulaznoj snazi n-tog harmonika: $p^{(n)} = u^{(n)}(t) i^{(n)}(t)$ – trenutna ulazna snaga n-tog harmonika, pri čemu je: $p^{(0)} = U^{(0)}(t) I^{(0)}(t)$ – trenutna ulazna snaga nultog harmonika. Trenutna ulazna snaga n-tog harmonika u razvijenom obliku je:

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= U^{(n)} I^{(n)} \cos(\theta - \psi) + U^{(n)} I^{(n)} \cos\left(2n\omega_1 t + \theta^{(n)} + \psi^{(n)}\right) \\ &= P^{(n)} + p_f^{(n)} \end{aligned}$$

gde je:

$$P^{(n)} = U^{(n)} I^{(n)} \cos \varphi^{(n)}$$

srednja snaga n-tog harmonika, a

$$p_f(t) = U^{(n)} I^{(n)} \cos(2n\omega_1 t + \theta^{(n)} + \psi^{(n)})$$

fluktuirajuća snaga n-tog harmonika.

Fluktuirajuća snaga

ako su komponente različitih indeksa, njihov proizvod je deo ukupne ulazne snage nastao usled delovanja različitih harmonika:

$$\begin{aligned} p^{(n,m)} &= u^{(n)} i^{(m)}, \qquad n \neq m \\ p^{(0,m)} &= u^{(0)} \sqrt{2} I^{(m)} \cos\left(m\omega_1 t + \psi^{(m)}\right) \\ p^{(n,0)} &= \sqrt{2} U^{(n)} \cos\left(n\omega_1 t + \theta^{(n)}\right) i^{(0)} \\ p^{(n,m)} &= U^{(n)} I^{(m)} \cos\left((n+m)\omega_1 t + \theta^{(n)} + \psi^{(m)}\right) + U^{(n)} I^{(m)} \cos\left((n-m)\omega_1 t + \theta^{(n)} - \psi^{(m)}\right) \end{aligned}$$

sve komponente $p^{(n,m)}$ imaju prirodu fluktuirajuće snage.

Kraće pišemo

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_f^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p^{(n,m)}$$

u složenoperiodičnom režimu trenutna snaga osciluje oko

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} = const.$$

s tim što su te oscilacije složenog oblika.

Srednja (aktivna) snaga

U ustaljenom složenoperiodičnom režimu srednja snaga se posmatra za vreme jedne periode i opisana je izrazom:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$$

Pošto je u ustaljenom režimu srednja snaga jednaka sumi srednjih snaga svih harmonika, tada je:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$$

srednja (aktivna) snaga u složenoperidiočnim režimu, gde su $P^{(n)}$ srednje (aktivne) snage pojedinih harmonika:

$$P^{(0)} = U_0 I_0, \qquad P^{(n)} = U^{(n)} I^{(n)} \cos\varphi^{(n)}, \qquad (n \geq 1)$$

Srednja snaga označava brzinu kojom se konstantno isporučuje energija mreži, tj. predstavlja snagu koja se nepovratno troši u mreži.

Prividna snaga

U ustaljenom složenoperiodičnom režimu prividna snaga se definiše sa: $S = UI$ - prividna snaga, gde su U i I efektivne vrednosti složenoperiodičnih veličina napona i struja, respektivno.

Efektivne vrednosti složenoperiodičnih veličina napona i struje računamo na sledeći način:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} (u^{(n)})^2 + \underbrace{\sum_{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{m}} u^{(n)} u^{(m)}}_{\mathrm{sr.vrednost} = 0}\right]\mathrm{d}t}$$

$$n = 0\colon \left(u^{(0)}\right)^2 = U_0^2$$
$$n \geq 1\colon \left(u^{(n)}\right)^2 = 2\left(U^{(n)}\right)^2 \cos^2\left(n\omega_1 t + \theta^{(n)}\right) - \text{ sr. vrednost} = \left(U^{(n)}\right)^2$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(n)})^2}\,, \qquad I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (I^{(n)})^2}$$

Samim tim, prividna snaga je jednaka:

$$S = \left[\left(u^{(0)}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(U^{(n)}\right)^2\right]^{1/2} \left[\left(i^{(0)}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(I^{(n)}\right)^2\right]^{1/2}$$

I u složenoperiodičnom režimu se može definisati faktor snage $k_p = \frac{P}{S}$. Ovaj faktor označava koji se deo raspoložive energije, pri datim efektivnim vrednostima napona i struje, stvarno koristi u mreži u nepovratnom procesu.

Pitanje 78.

Ustaljen pseudoperiodicni rezim.

Posmatrajmo linearno, vremenski nepromenljivo kolo bez akumulirane energije u kome deluje pseudoperiodična ekscitacija:

$$e(t) = E_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \gamma)\,.$$

Prinudni odziv kola je opisan funkcijom istog tipa kao i ekscitacija:

$$y_p(t) = Y_m e^{\sigma t} \cos(wt + \delta)\,.$$

Ako je za krajeve generatora vezana pasivna mreža, bez akumulirane energije, ukupan odziv će posle dovoljno dugo vremena postati jednak prinudnom odzivu (ustaljen režim – komponenta $y_h(t)$ iščezava).

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)\big|_{t\to\infty} = y_p(t)$$

Ekscitacija i odziv se mogu napisati i u obliku:

$$e(t) = \frac{1}{2}E_m e^{j\gamma} e^{(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2}E_m e^{-j\gamma} e^{(\sigma - j\omega)t}$$
$$y(t) = \frac{1}{2}Y_m e^{j\delta} e^{(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2}Y_m e^{-j\delta} e^{(\sigma - j\omega)t}$$

Kompleksa veličina $(\sigma + j\omega)$ ima prirodu frekvencije i predstavlja kompleksnu frekvenciju eksitacije: $\underline{s} = \sigma + j\omega$, pa je:

$$e(t) = \underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)$$
$$\underline{e}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{e}(t) \quad \underline{e}(t) = \underline{E}_m e^{st}$$
$$\underline{e}_2(t) = \underline{e}_1^*(t) \quad \underline{E}_m = E_m e^{j\gamma}$$

odnosno:

$$y(t) = \underline{y}_1(t) + \underline{y}_2(t)$$
$$\underline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{y}(t) \quad \underline{y}(t) = \underline{Y}_m e^{st}$$
$$\underline{y}_2(t) = \underline{y}_1^*(t) \quad \underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$$

Sada se iz diferencijalne jednacine odziva

$$A(D)y(t) = B(D)e(t)$$

dobija komleksna algebarska jednacina

$$\underline{A}(\underline{s})y(t) = \underline{B}(\underline{s})e(t).$$

Deljenjem leve i desne strane sa e^{st}, dobija se:

$$\underline{A}(\underline{s})\underline{Y}_m = \underline{B}(\underline{s})\underline{E}_m$$

jednačina odziva u kompleksnom domenu. Kompleksan odziv $\underline{Y}_m$ se sada lako određuje:

$$\underline{Y}_m = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})}\underline{E}_m = \underline{T}(\underline{s})\underline{E}_m$$

gde je

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{y}(t)}{\underline{e}(t)}$$

kompleksna funkcija mreže.

Za linearan otpornik, kalem i kondenzator, relacije napona i struje i impedanse/admitanse u vremenskom i kompleksnom domenu su:

a) Otpornik: $u_{R_i} = R_i i_{R_i} \Longrightarrow \underline{U}_{R_i} = R_i \underline{I}_{R_i}, \underline{Z}_{R_i} = R_i$, odnosno $\underline{Y}_{R_i} = 1/\underline{Z}_{R_i} = 1/R_i = G_i$
b) Kalem: $u_{L_j} = L_j D i_{L_j} \Longrightarrow \underline{U}_{L_j} = L_j \underline{s}\underline{I}_{L_j}, \underline{Z}_{L_j} = L_j \underline{s}$, odnosno $\underline{Y}_{L_j} = 1/\underline{Z}_{L_j} = {}^{1}/_{L_j \underline{s}}$
c) Kondenzator: $i_{C_k} = C_k D u_{C_k} \Longrightarrow \underline{I}_{C_k} = C_k \underline{s}\underline{U}_{C_k}, \underline{Z}_{C_k} = {}^{1}/_{C_k \underline{s}}$, odnosno $\underline{Y}_{C_k} = 1/\underline{Z}_{C_k} = C_k \underline{s}$

Pseudoperiodični režim je najopštiji slučaj koji nastaje pri: $\underline{s} = \sigma + j\omega$, sa $\sigma \neq 0$ i $\omega \neq 0$.

Trenutna vrednost odziva $y(t)$ dobija se iz kompleksnog odziva $\underline{Y}_m$ na osnovu relacija:

$$y(t) = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_m e^{st}\} = Y_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \delta)$$

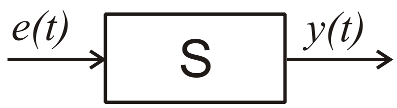
pri čemu je kompleksna frekvencija $\underline{s}$ različita od sopstvenih frekvencija kola.

Pitanje 79.
Rezonancija u opštem slučaju sistema koji se opisuje linearnom diferencijalnom jednačinom.

Definicija:

Pojava koja nastaje u fizičkom sistemu kada je frekvencija pobude jednaka nekoj od sopstvenih frekvencija sistema naziva se rezonancija. Prinudni odziv koji tada nastaje jeste rezonantni odziv, a on može imati amplitudu veoma velike vrednosti i pri pobudi male amplitude.

Posmatrajmo linearan vremenski nepromenljiv fizički sistem S.



Diferencijalna jednačina sistema:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t)\ .$$

Ako je pobuda pseudoperiodična i odziv je pseudoperiodičan (ustaljen režim):

$$e(t) = E_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \gamma)$$
$$y(t) = Y_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \delta)$$

Diferencijalnu jednačinu rešavamo najlakše u frekvencijskom domenu:

$$\underline{Y}_m = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})}\underline{E}_m = Y_m e^{j\delta} \to y(t) = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_m e^{\underline{s}t}\}$$
$$\underline{s} = \sigma + j\omega\ .$$

Sopstvene učestanosti su koreni karakteristične jednačine:

$$\underline{A}(\underline{s}) = 0 \Longrightarrow \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_r$$

mogu biti proste ili višestruke.

Karakteristični polinom:

$$\underline{A}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2) \dots (\underline{s} - \underline{s}_r) = \prod_{i=1}^{r} (\underline{s} - \underline{s}_i)$$

Pobuda je proizvoljna i nezavisna od sistema tako da njena frekvencija može biti jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti sistema:

$$\underline{s} = \underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i\,, \quad i = 1,2, \dots, r \quad (\mathbf{1})$$

kompleksna funkcija mreže postaje *beskonačna* pri toj frekvenciji:

$$T(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = \frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}(\underline{s}_i)} = \infty$$

jer jer $\underline{A}(\underline{s}_i) = 0, (\mathbf{1})$, a tada je beskonačan kompleksan predstavnik prinudnog odziva

$$\underline{Y}_m = T(s)\underline{E}_m\Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = \infty$$

Pri ovim okolnostima nastaje rezonancija.

Trenutna vrednost rezonantnog odziva ne mora biti beskonačna:

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{t^p \frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i)} \underline{E}_m e^{\underline{s}_i t}\right\} \quad (\mathbf{2})$$

$$\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i) = \frac{\mathrm{d}^p \underline{A}(\underline{s}_i)}{\mathrm{d}s^p}\Bigg|_{\underline{s}=\underline{s}_i}$$

$\underline{s}_i$ je sopstvena učestanost p-tog reda.

Iz izraza $(\mathbf{2})$ možemo zaključiti kakav će rezonantni odziv biti posle dovoljno dugo vremena $(t \to \infty)$.

Od značaja je samo $t^p e^{\sigma_i t}$. S obzirom na to da se rešenje može pisati:

$$y(t) = t^p e^{\sigma_i t} F(\sigma_i, \omega_i, t)$$

gde je $F(\sigma_i, \omega_i, t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}(\underline{s}_i)} \underline{E}_m e^{j\omega_i t}\right\}$ ograničena funkcija vremena.

Kako je

$$\lim_{t\to\infty} t^p e^{\sigma_i t} = \begin{cases} 0, & \sigma_i < 0 \\ \infty, & \sigma_i \geq 0 \end{cases} = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

jer se isto ponaša, imamo da je za $\sigma_i < 0$ mreža pasivna a za $\sigma_i > 0$ mreža aktivna.

Pri rezonanciji ostvarenoj pri nekoj sopstvenoj učestanosti $\underline{S_i} = \sigma_i + j\omega_i$ sa $\sigma_i < 0$ (pasivan sistem) prinudni odziv će težiti nuli, posle dovoljno dugo vremena, iako se za kompleksnog predstavnika prinudnog odziva dobija beskonačna vrednost.

Ako je $\sigma_i > 0$ (aktivna mreža) a $\omega_i = 0$ onda će se odziv povećavati sa vremenom (eksponencijalno ako je koren prost, odnosno po zakonu $t^p e^{\sigma_i t}$ ako je koren reda p). Ako je $\sigma_i > 0$ a $\omega_i \neq 0$ odziv je u vidu oscilatorne funkcije sa amplitudom koja se povećava sa vremenom i posle dovoljno dugo vremena dostiže beskonačnost.

Pitanje 80.
Idealna rezonancija u električnim kolima.

Posmatramo linearnu, vremenski nepromenljivu mrežu N bez akumulirane energije sa jednim pristupom i jednim nezavisnim naponskim generatorom.

Pri pobudi naponskim generatorom ulazni napon mreže N: $u_1(t) = u_g(t)$. Diferencijalna jednačina odziva za ulaznu struju $i_1(t)$:

$$A(D)i_1(t) = B(D)u_g(t)$$

Ako je generator pseudoperiodičan $u_g(t) = U_{gm}e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta_g)$. kompleksna učestanost pobude je $\underline{s} = \sigma + j\omega$. Ustaljen odziv je pseudoperiodičan, istog oblika kao i pobuda $i_1(t) = I_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \psi)$.

Sopstvene učestanosti sistema su koreni karakteristične jednačine

$$\underline{A}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s_1})(\underline{s} - \underline{s_2}) \dots (\underline{s} - \underline{s_r}) = 0 \Longrightarrow \underline{s_1}, \underline{s_2}, \dots, \underline{s_r}$$

„Tri uslova“ rezonancije (ekvivalentni su međusobno, mislim, uslovi...)

1) ***Osnovni uslov*** za nastajanje rezonancije je jednakost učestanosti pobude nekoj od sopstvenih učestanosti, odn. $\underline{s} = \underline{s_i}$.

   Funkcija mreže će biti beskonačna:

$$\frac{\underline{i_1}(t)}{\underline{u_g}(t)} = \underline{T}(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{s_i}} = \frac{\underline{B}(\underline{s_i})}{\underline{A}(\underline{s_i})} = \infty = \frac{\underline{I_m}}{\underline{U_{gm}}}$$

$$\underline{I_m} = \underline{T}(\underline{s_i})\underline{U_{gm}} = \infty$$

   pa se ova rezonancija naziva i strujna rezonancija.

2) ***Praktičan uslov*** *rezonancije*

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_{ul}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=\underline{s}_i}\underline{U}_{gm} = \infty$$

$\underline{Y}_{ul}(\underline{s})$ je kompleksna ulazna admitansa, odakle nalazimo kompleksnu ulaznu impedansu.

$$\underline{Z}_{ul}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = \frac{1}{\underline{Y}_{ul}\left(\underline{s}_i\right)} = \frac{\underline{A}(\underline{s}_i)}{\underline{B}(\underline{s}_i)} = 0$$

što predstavlja praktičan uslov za određivanje rezonancije. Ova rezonancija se naziva i *idealnom* upravo iz razloga što se mreža N ponaša kao mreža bez gubitaka.

$$R_{ul}(\sigma, \omega) = 0, \qquad X_{ul}(\sigma, \omega) = 0$$

3) ***Kompleksni predstavnik prinudnog odziva (struje) je beskonačan***

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_{ul}(\underline{s}_i)\underline{U}_{gm} = \infty$$

što zapravo označava da je njen moduo (amplituda) beskonačne vrednosti. Trenutna vrednost struje pri rezonanciji iznosi

$$y_1(t) = t^p e^{\sigma_i t}\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i)}\underline{U}_{gm}e^{j\omega_i t}\right\}$$

gde $\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i)$ predstavlja izvod p-tog reda polinoma $\underline{A}(\underline{s})$ po promenljivoj $\underline{s}_i$ za $\underline{s} = \underline{s}_i$, gde je $\underline{s}_i$ koren p-tog reda polinoma $\underline{A}(\underline{s})$.

Pitanje 81.

Rezonancija pri pobudi prostoperiodičnim generatorom.

Posmatramo delovanje prostoperiodičnog naponskog generatora u linearnom, vremenski nepromenljivom kolu bez akumulisane energije.

$$u_g(t) = U_{gm}\cos(\omega t + \theta_g)$$

kompleksna učestanost pobude je $\underline{s} = j\omega$.

Frekvenciju prostoperiodičnog generatora možemo menjati samo po imaginarnoj osi frekvencija.

Kolo bez gubitaka

Koristimo idealne generatore i mreže bez gubitaka. sopstvene učestanosti kola bez gubitaka su na imaginarnoj osi u $\underline{s}$-ravni.

$$\underline{s}_i = j\omega_i$$

U kolima bez gubitaka se može ostvariti idealna rezonancija bilo promenom frekvencije prostoperiodičnog generatora, bilo podešavanjem parametara mreže N (čime utičemo na promenu sopstvenih frekvencija kola).

Kolo sa gubicima

Realna kola su uvek sa gubicima – sadrže rezistivne elemente u kojima se energija nepovratno pretvara u toplotu ($\sigma_i \neq 0$). Sopstvene učestanosti takvih kola nalaze su u levoj poluravni kompleskne frekvencije

$$\underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i$$

Delovanjem prostoperiodičnih generatora u takvim kolima se nikad ne može ostvariti idealna rezonancija, s obzirom da se kompleksna frekvencija generatora nalazi na imaginarnoj osi. Mogu se ostvariti samo neki aspekti rezonancije/antirezonancije:

1) jednakost imaginarnih delova učestanisti generatora i sopstvene učestanosti kola:

   $$\omega = \omega_i \text{ ili } \mathrm{\omega} = \mathrm{\omega_j}$$

   Ovaj slučaj nazivamo pravom rezonancijom.

   Značaj se ogleda u tome što prostoperiodičnim generatorom možemo podržati sopstvene oscilacije kola, tj. možemo nadoknaditi gubitke kola. Tako da u kolu dobijemo prostoperiodičani režim učestanosti wi (ili wj) uz mali utrošak energije generatora. Potrebno je da prostoperiodični generator bude iste frekvencije i u fazi sa signalom sopstvenog režima.

2) može se postići deo uslova $\underline{Z}_{ul}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = 0$ koji se odnosi na imaginarni deo. Tj., može se postići

   $$X_{ul}(\omega) = 0 \,. \qquad \mathbf{(1)}$$

   Ulazna impedansa je tada čisto realna:

   $$\underline{Z}_{ul}(j\omega) = R_{ul}(\omega)$$

   odnosno argument admitanse je jednak nuli:

   $$\varphi_{ul}(\omega) = \arg \underline{Z}_{ul}(j\omega) = \arctan\frac{X_{ul}(\omega)}{R_{ul}(\omega)} = 0$$

   mreža se ponaša kao rezistivna.

   Prostoperiodični napon i struja na ulazu mreže su u fazi pri ispunjenom uslovu $(\mathbf{1})$ bez obzira koja je od tih veličina odziv a koja pobuda. Ovakav režim se naziva fazna rezonancija.

3) Možemo pokušati da ostvarimo maksimalnu moguću ulaznu struju pri pobudi naponskim generatorom.

$$\underline{I}_{1m} = \underline{Y}_{ul}(j\omega)\underline{U}_{gm} = \frac{\underline{U}_{gm}}{\underline{Z}_{ul}(j\omega)}$$
$$I_{1m} = |\underline{I}_{1m}| = Y_{ul}(\omega)U_{gm} = \frac{U_{gm}}{Z_{ul}(\omega)}$$

Pri konstantnoj amplitudi generatora struja zavisi od parametara mreže i od frekvencije generatora, tako da je

$$I_{1m} = I_{1m}(x)$$

gde je

$$x = \{R_i, L_j, C_k, \mu_m, r_n, \dots, \omega\} = \{x_e\}$$

gde smo sa x označili vektor promenljivih od kojih zavisi amplituda odziva.

Maksimalnu vrednost struje nalazimo iz relacije:

$$\frac{\mathrm{d}I_{1m}}{\mathrm{d}X_C} = 0 \Longrightarrow X_C = X_A, \qquad I_{1m}(X_A) = [I_{1m}]_{max}$$

pri čemu smo samo jednu od komponenti vektora x smatrali promenljivom, dakle, ostvarili smo parcijalni maksimum struje. Ovakav režim još nazivamo i ***amplitudskom rezonancijom***.

Pitanje 82.
Idealna antirezonancija u električnim kolima.

Posmatramo linearnu, vremenski nepromenljivu mrežu N bez akumulirane energije sa jednim pristupom i jednim nezavisnim strujenim generatorom.

Pri pobudi strujnim generatorom ulazna struja mreže N: $i_1(t) = i_g(t)$. Diferencijalna jednačina odziva za ulaznu napon $u_1(t)$:

$$A(D)u_1(t) = B(D)i_g(t)$$

Ako je generator pseudoperiodičan $i_g(t) = I_{gm}e^{\sigma t}\cos(\omega t + \psi_g)$. kompleksna učestanost pobude je $\underline{s} = \sigma + j\omega$. Ustaljen odziv je pseudoperiodičan, istog oblika kao i pobuda $u_1(t) = U_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$.

Sopstvene učestanosti sistema su koreni karakteristične jednačine

$$\underline{A}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2) \dots (\underline{s} - \underline{s}_r) = 0 \Longrightarrow \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_r$$

„Tri uslova" antirezonancije (ekvivalentni su međusobno, mislim, uslovi...)

1) ***Osnovni uslov*** za nastajanje antirezonancije je jednakost učestanosti pobude nekoj od sopstvenih učestanosti, odn. $\underline{s} = \underline{s}_i$.

   Funkcija mreže će biti beskonačna:

$$\frac{\underline{u}_1(t)}{\underline{i}_g(t)} = \underline{T}(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = \frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}(\underline{s}_i)} = \infty = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_{gm}}$$

$$\underline{U}_m = \underline{T}(\underline{s}_i)\underline{I}_{gm} = \infty$$

   pa se ova antirezonancija naziva i naponska rezonancija.

2) ***Praktičan uslov*** *rezonancije*

$$\underline{U}_m = \underline{Z}_{ul}(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i}\underline{I}_{gm} = \infty$$

   $\underline{Z}_{ul}(\underline{s})$ je kompleksna ulazna impedansa, odakle nalazimo kompleksnu ulaznu admitansu.

$$\underline{Y}_{ul}(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = \frac{1}{\underline{Z}_{ul}\left(\underline{s}_i\right)} = \frac{\underline{A}(\underline{s}_i)}{\underline{B}(\underline{s}_i)} = 0$$

   Što predstavlja praktičan uslov za određivanje antirezonancije. Ova antirezonancija se naziva i *idealnom* upravo iz razloga što se mreža N ponaša kao mreža bez gubitaka.

$$G_{ul}(\sigma,\omega) = 0, \qquad B_{ul}(\sigma,\omega) = 0$$

3) ***Kompleksni predstavnik prinudnog odziva (napona) je beskonačan***

$$\underline{U}_m = \underline{Z}_{ul}(\underline{s}_i)\underline{I}_{gm} = \infty$$

   što zapravo označava da je njen moduo (amplituda) beskonačne vrednosti. Trenutna vrednost napona pri antirezonanciji iznosi

$$y_1(t) = t^p e^{\sigma_i t}\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{B}(\underline{s}_i)}{\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i)}\underline{I}_{gm}e^{j\omega_i t}\right\}$$

   gde $\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i)$ predstavlja izvod p-tog reda polinoma $\underline{A}(\underline{s})$ po promenljivoj $\underline{s}_i$ za $\underline{s} = \underline{s}_i$, gde je $\underline{s}_i$ koren p-tog reda polinoma $\underline{A}(\underline{s})$.

Pitanje 83.

Antirezonancija pri pobudi prostoperiodičnim generatorom.

Posmatramo delovanje prostoperiodičnog strujnog generatora u linearnom, vremenski nepromenljivom kolu bez akumulisane energije.

$$i_g(t) = I_{gm}\cos(\omega t + \psi_g)$$

kompleksna učestanost pobude je $\underline{s} = j\omega$.

Frekvenciju prostoperiodičnog generatora možemo menjati samo po imaginarnoj osi frekvencija.

Kolo bez gubitaka

Koristimo idealne generatore i mreže bez gubitaka. sopstvene učestanosti kola bez gubitaka su na imaginarnoj osi u $\underline{s}$-ravni.

$$\underline{s_i} = j\omega_i$$

U kolima bez gubitaka se može ostvariti idealna rezonancija bilo promenom frekvencije prostoperiodičnog generatora, bilo podešavanjem parametara mreže N (čime utičemo na promenu sopstvenih frekvencija kola).

Kolo sa gubicima

Realna kola su uvek sa gubicima – sadrže rezistivne elemente u kojima se energija nepovratno pretvara u toplotu ($\sigma_i \neq 0$). Sopstvene učestanosti takvih kola nalaze su u levoj poluravni kompleskne frekvencije

$$\underline{s_i} = \sigma_i + j\omega_i$$

Delovanjem prostoperiodičnih generatora u takvim kolima se nikad ne može ostvariti idealna rezonancija, s obzirom da se kompleksna frekvencija generatora nalazi na imaginarnoj osi. Mogu se ostvariti samo neki aspekti rezonancije/antirezonancije:

1) jednakost imaginarnih delova učestanisti generatora i sopstvene učestanosti kola:

$$\omega = \omega_i \text{ ili } \omega = \omega_j$$

Ovaj slučaj nazivamo pravom antirezonancijom.

Značaj se ogleda u tome što prostoperiodičnim generatorom možemo podržati sopstvene oscilacije kola, tj. možemo nadoknaditi gubitke kola. Tako da u kolu dobijemo prostoperiodičani režim učestanosti wi (ili wj) uz mali utrošak energije generatora. Potrebno je da prostoperiodični generator bude iste frekvencije i u fazi sa signalom sopstvenog režima.

2) može se postići deo uslova $\underline{Y}_{ul}(\underline{s})\big|_{\underline{s}=\underline{s}_i} = 0$ koji se odnosi na imaginarni deo. Tj., može se postići

$$B_{ul}(\omega) = 0\,. \qquad (\mathbf{1})$$

Ulazna impedansa je tada čisto realna:

$$\underline{Y}_{ul}(j\omega) = G_{ul}(\omega)$$

odnosno argument admitanse je jednak nuli:

$$\varphi_{ul}(\omega) = \arg \underline{Y}_{ul}(j\omega) = \arctan \frac{B_{ul}(\omega)}{G_{ul}(\omega)} = 0$$

mreža se ponaša kao rezistivna.

Prostoperiodični napon i struja na ulazu mreže su u fazi pri ispunjenom uslovu $(\mathbf{1})$ bez obzira koja je od tih veličina odziv a koja pobuda. Ovakav režim se naziva fazna antirezonancija.

3) Možemo pokušati da ostvarimo maksimalno moguć ulazni napon pri pobudi strujnim generatorom.

$$\underline{U}_{1m} = \underline{Z}_{ul}(j\omega)\underline{I}_{gm} = \frac{I_{gm}}{\underline{Y}_{ul}(j\omega)}$$

$$U_{1m} = \left|\underline{U}_{1m}\right| = Z_{ul}(\omega)I_{gm} = \frac{I_{gm}}{Y_{ul}(\omega)}$$

pri konstantnoj amplitudi generatora napon zavisi od parametara mreže i od frekvencije generatora, tako da je

$$U_{1m} = U_{1m}(x)$$

gde je

$$x = \left\{R_i, L_j, C_k, \mu_m, r_n, \dots, \omega\right\} = \{x_e\}$$

gde smo sa x označili vektor promenljivih od kojih zavisi amplituda odziva.

Maksimalnu vrednost napona nalazimo iz relacije:

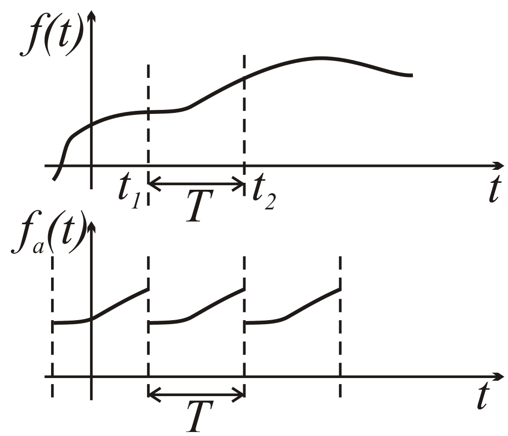
$$\frac{\mathrm{d}U_{1m}}{\mathrm{d}B_C} = 0 \Rightarrow B_C = B_A, \qquad U_{1m}(B_A) = [U_{1m}]_{max}$$

pri čemu smo samo jednu od komponenti vektora x smatrali promenljivom, dakle, ostvarili smo parcijalni maksimum napona. Ovakav režim još nazivamo i *amplitudskom antirezonancijom*.

Pitanje 84.

Prelaz sa *Fourier*-ovog reda na *Fourier*-ovu transformaciju.

Posmatrajmo proizvoljnu funkciju vremena $f(t)$. Možemo uočiti proizvoljan interval $(t_1,\ t_2)$ i izvršiti periodičko produženje funkcije iz tog intervala čime se dobija funkcija $f_a(t)$ periode T: $T = t_2 - t_1$, $f_a(t + kT) = f_a(t),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Periodična funkcija $f_a(t)$ se potpuno poklapa sa originalnom funkcijom $f(t)$ u intervalu $(t_1,\ t_2)$:

$$f_a(t) \equiv f(t), \qquad t_1 < t < t_2$$

U tačkama prekida, funkcija konvergira srednjoj vrednosti funkcije $f_a(t)$ u toj tački. Tačke prekida su granice intervala, pa je: $f_a(t_1) = f_a(t_2) = f_a(t_1 + kT) = \frac{1}{2}[f(t_1^+) + f(t_2^-)]$.

Periodična funkcija $f_a(t)$ ako zadovoljava *Dirichlet*-ove uslove, može se razviti u *Fourier*-ov red u kompleksnom obliku:

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$$

sa kompleksnim koeficijentima (amplitudama):

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f_a(\tau)e\hat{\ }(-jn\omega_1\tau)\mathrm{d}\tau$$

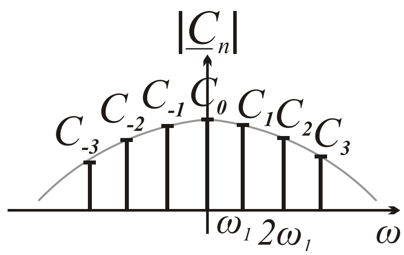
pri čemu je ω_1 ugaona frekvencija ponavljanja signala: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Ako se za početni trenutak integracije usvoji trenutak t_1, koeficijent *Fourier*-ovog reda periodične funkcije $f_a(t)$ biće određen sa:

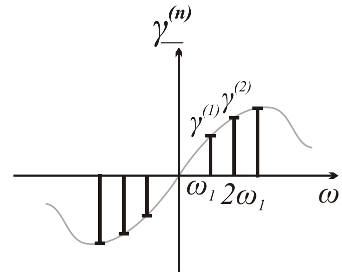
$$\underline{C}_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau)e\hat{\ }(-jn\omega_1\tau)\mathrm{d}\tau = C_n e^{j\gamma^{(n)}}\ .$$

Ovi koeficijenti su definisani u diskretnim tačkama $n\omega_1$, na osi frekvencije.

Grafici modula i argumenata kompleksnih koeficijenata $\underline{C}_n$ obrazuju amplitudski (parna funkcija) i fazni spektar (neparna funkcija) *Fourier*-ovog reda.



Amplitudski spektar



Fazni spektar

Pošto se frekvencije u spektru koeficijenata *Fourier*-ovog reda javljaju u diskretnom nizu, tada se osnovna frekvencija ω_1, može shvatiti kao priraštaj (korak) frekvencije:

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \omega_1$$

pa je:

$$C_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} f(\tau)e^{-jn\omega_1\tau}\mathrm{d}\tau$$

Da bi se aproksimativna periodična funkcija $f_a(t)$ poklapala sa originalnom funkcijom $f(t)$ u što širem intervalu, pomerićemo granice: donju granicu pomeramo ulevo – u tačku $t_1' < t_1$, a gornju granicu udesno – u tačku $t_2' > t_2$.

Nova funkcija $f_a'(t)$ je sada opisana *Fourier*-ovim redom:

$$f_a'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n' e\hat{}(jn\omega_1' t)\ ,$$

sa kompleksnim koeficijentima

$$C_n' = \frac{1}{T}\int_{t_1'}^{t_2'} f(\tau)e^{(-jn\omega_1'\tau)\mathrm{d}\tau} = \frac{\Delta\omega'}{2\pi}\int_{t_1'}^{t_2'} f(\tau)e\hat{}(-jn\omega_1'\tau)\mathrm{d}\tau\ ,$$

pri čemu je $\omega_1' = \frac{2\pi}{T'} = \Delta\omega', T' = t_2' - t_1'$.

Da bi aproksimativna periodična funkcija $f_a(t)$ prekrila polaznu funkciju $f(t)$ po celoj vremenskoj osi, granice intervala moraju da teže ka $-\infty$ i $+\infty$: $t_1 \to -\infty, t_2 \to +\infty$, tako da funkcija $f_a(t)$ ima beskonačnu periodu $T \to \infty$. Odgovarajuća frekvencija ponavljanja postaje beskonačno mala:$\omega_1 = \Delta\omega \to \mathrm{d}\omega$, a diskretne učestanosti $n\omega_1$ uzimaju kontinualne vrednosti ω: $n\omega_1 \to \omega$.

Koeficijenti Fourier-ovog reda C_n, koji su bili diskretnih vrednosti, postaju kontinualne promenljive, beskonačno malih amplituda jer je

$$C_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} f(\tau)e^{(-jn\omega_1\tau)}\mathrm{d}\tau \Longrightarrow C(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e\verb|^|(-j\omega\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

Pošto funkcija $f_a(t)$ zadovoljava *Dirichlet*-ove uslove, zaključujemo da je funkcija $f(t)$ integrabilna po celoj vremenskoj osi, tj. integral te funkcije ima konačnu vrednost. Integral funkcije $f(t)$ je nova funkcija koja ne zavisi od vremena, već samo od frekvencije ω.

Ta funkcija se naziva ***Direktna Fourier-ova transformacija*** funkcije $f(t)$ i označava se sa:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e\verb|^|(-j\omega\tau)\mathrm{d}\tau$$

pri cemu je:

$$\lim_{t_1\to-\infty,\ t_2\to+\infty} f_a(t) = f(t), \qquad (\forall t)$$

a suma u izrazu $f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$ prelazi u integral:

$$n\omega_1 \to \omega, \qquad \underline{C}_n \to \underline{C} = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\underline{F}(j\omega)$$

$$f_a(t) \to f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\underline{F}(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{F}(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\,.$$

Prelazak iz kompleksnog domena u vremenski domen moguć je ***Inverznom Fourier-ovom transformacijom*** definisanoj kao:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e\verb|^|(j\omega\tau)\mathrm{d}\omega$$

Funkcija $f(t)$ i njena *Fourier*-ova transformacija su međusobno jednoznačno određene i predstavljaju tzv. ***Fourier-ov transformacioni par***.

Pitanje 85.

Jednačine kola u domenu *Fourier*-ove transformacije.

Rešavanje kola primenom *Fourier*-ove transformacije, formalno se svodi na pisanje istih jednačina u kompleksnom domenu, kao za ustaljen prostoperiodični rezim, jer je oblik funkcija mreže isti. Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo bez akumulirane energije, pobuda $e(t)$ izaziva odziv $y(t)$, što je određeno diferencijalnom jednačinom $A(D)y(t) = B(D)e(t)$.

Ako odziv i pobudu izrazimo u formi inverznih *Fourier*-ovih transformacija

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{(j\omega\tau)\mathrm{d}\omega}$$
$$e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega)e\text{^}(j\omega\tau)\mathrm{d}\omega$$

i primenom operacije diferenciranja dobija se:

$$A(D)y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Y}(j\omega)\left[A(D)e^{j\omega t}\right]\mathrm{d}\omega$$
$$\begin{aligned} A(D)y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)\left[A(D)e^{j\omega\tau}\right]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)\left[A(j\omega)e^{j\omega\tau}\right]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [Y(j\omega)A(j\omega)]e^{(j\omega\tau)\mathrm{d}\omega} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)A(j\omega)\} \end{aligned}$$

$$B(D)e(t) = \mathcal{F}^{-1}\{E(j\omega)B(j\omega)\}$$

jer linearne operacije izvoda i integrala mogu međusobno zameniti redosled izvršavanja.

Polazna diferencijalna jednačina se može napisati u obliku:

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)A(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{E(j\omega)B(j\omega)\}$$

Nakon *Fourier*-ove transformacije leve i desne strane dobija se:

$$Y(j\omega)A(j\omega) = E(j\omega)B(j\omega)\ ,$$

pa je kompleksan odziv određen relacijom

$$Y(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}E(j\omega) = T(j\omega)E(j\omega),$$

gde je

$$T(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{e(t)\}}$$

funkcija mreže u domenu *Fourier*-ove transformacije.

Formalno, funkcija mreže je potpuno ista kao u slučaju ustaljenog prostoperiodičnog režima. Fundamentalna razlika se ogleda u tome što je kod ustaljenog prostoperiodičnog režima funkcija količnik obrtnih fazora i definisana u jednoj određenoj tački ω_1 (učestanost pobude) a kod primene direktne *Fourier*-ove transformacije funkcija mreže je količnik *Fourier*-ovih transformacija odziva i pobuda i definisana je po celoj ω-osi. Trenutni odziv kod *Fourier*-ove transformacije određujemo primenom inverzne *Fourier*-ove transformacije.