$$y_p(t) = Y_p = \frac{b_0}{a_0}E, \qquad a_0 \neq 0.$$

Za određivanje integracionih konstanti potrebno je poznavati početne uslove. Ako je komutacija regularna važiće: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$ ali iako to nije ispunjeno do promene početnih uslova može doći jedino usled delovanja ekscitacije tj. važi:

$$u_{C_k}(0^+) = \alpha_k E, \qquad i_{L_j}(0^+) = \beta_k E, \qquad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R})$$

Stoga, ako nema višestrukih korena,

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{K_i} + \frac{b_0}{a_0}E = f_1\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_1 E \\ Dy(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{S_i}\underline{K_i} + 0 = f_2\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_2 E \\ &\vdots \\ D^{(n-1)}y(0^+) &= \sum_{i=1}^{r} \underline{S_i}^{n-1}\underline{K_i} + 0 = f_n\big(u_C(0^+), i_L(0^+), e(0^+)\big) = g_n E \end{aligned}$$

Odakle sledi da su svi koeficijenti srazmerni sa E:

$$\underline{K_i} = \underline{k_i}E, \qquad (i = 1,2, \dots, r)$$

Ukupno rešenje za $t \geq 0$:

$$y(t) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \underline{k_i} e^{\underline{S_i}t} + \frac{b_0}{a_0}\right)}_{\varphi(t)} E$$

Sličan je postupak i za slučaj kada postoje višestruki koreni gde se dobija:

$$y(t) = \underbrace{\left(\left(\sum_{i=1}^{p} t^{i-1}\underline{k_i}\right) e^{\underline{s_i}t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{k_i} e^{\underline{s_i}t} + \frac{b_0}{a_0}\right)}_{\varphi(t)} E, \qquad t \geq 0$$

Konačno rešenje za $\forall t$:

$$y(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$

gde je $f(t)$ funkcija koja je okarakterisana mrežom vezanom za krajeve nezavisnog generatora a ne zavisi od vrednosti skoka ekscitacije E naziva se *funkcija mreže* a definisana za odziv na delovanje *Heaviside*-ovog generatora naziva se *indiciona funkcija kola*.

$$f(t) = \frac{y(t)}{E} = \varphi(t)h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t) & t \geq 0 \end{cases}.$$

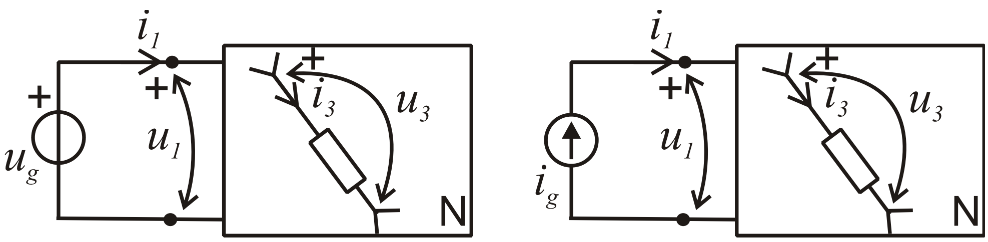
Može se dobiti direktno iz polazne diferencijalne jednačine $A(D)y(t) = B(D)e(t) = b_0Eh(t)$ deljenjem obe strane jednačine sa skokom ekscitacije E:

$$A(D)\frac{y(t)}{E} = b_0h(t) \Rightarrow A(D)f(t) = b_0h(t), \text{ gde je } f(t) = \frac{y(t)}{E}$$

funkcija mreže definisana za odziv na delovanje *Heaviside*-ovog generatora.

Što se za $t \geq 0$ svodi na nehomogenu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim nehomogenim delom $A(D)\varphi(t) = b_0$, čijim rešavanjem određujemo funkciju $\varphi(t)$.

Priroda indicione funkcije zavisi od prirode odziva i ekscitacije. Ako je ekscitacija naponski generator $u_g(t) = Uh(t)$ odziv može biti ulazna struja $i_1(t)$ ili struja odn. napon neke druge grane: $i_j(t), u_j(t), (j \neq 1)$.



Odgovarajuće indicione funkcije mreže su:

- *indiciona ulazna admitansa:* $f_{Y_{11}}(t) = \frac{i_1(t)}{U}$
- *indiciona prenosna admitansa:* $f_{Y_{j1}}(t) = \frac{i_j(t)}{U}$
- *indiciona transmitansa napona:* $f_{M_{j1}}(t) = \frac{u_j(t)}{U}$

Ako je ekscitacija u vidu strujnog generatora, kao na slici pod b), $i_g(t) = Ih(t)$, odzivi mogu biti: ulazni napon, $u_1(t)$, napon ili struja neke druge grane: $u_j(t), i_j(t)$.

Odgovarajuće indicione funkcije mreže su:

- *indiciona ulazna impedansa:* $f_{Z_{11}}(t) = \frac{u_1(t)}{I}$
- *indiciona prenosna impedansa:* $f_{Z_{j1}}(t) = \frac{u_j(t)}{I}$
- *indiciona transmitansa struja:* $f_{N_{j1}}(t) = \frac{i_j(t)}{I}$

Pitanje 62.

Regularna i neregularna komutacija.

Posmatramo kola bez akumulirane energije.

Regularna komutacija

Pod pojmom komutacije se u užem smislu podrazumeva uključivanje ili isključivanje neke grane (ili više grana) u električnom kolu, dok se, šire posmatrano, pod ovim pojmom podrazumeva nagla (skokovita) promena nekog od parametara kola. Do promene početnih uslova u kolu bez akumulirane energije može doći jedino usled delovanja ekscitacije. Komutacija je regularna ako se pri njoj zadržavaju uslovi neprekidnosti napona kondenzatora i struje kalemova:

$$u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-), \qquad i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$$

Neregularna komutacija

U modelima linearnih i vremenski nepromenljivih kola može doći i do takve komutacije pri kojoj nisu zadovoljeni početni uslovi neprekidnosti napona kondenzatora i/ili struje kalemova. U tom slučaju radi se o neregularnoj komutaciji. U fizičkim kolima to se ne može desiti jer nagla promena početnog uslova označava i naglu promenu energije, odnosno naglu promenu električnog/magnetskog (EM) polja, što nije moguće jer je maksimalna brzina promene EM polja jednaka brzini svetlosti. Međutim, u nedovoljno tačnim modelima električnog kola, kada se ne uzimaju u obzir svi relevantni efekti, može doći do neregularne komutacije.

Delovanje *Heaviside*-ovog generatora se može shvatiti kao uključenje (isključenje) konstantnog generatora napona (struje) u nekom trenutku. Neka je diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)Eh(t)$$

Na osnovu poređenja reda polinoma $A(D)$ i $B(D)$ možemo odrediti da li je reč o regularnoj ili neregularnoj komutaciji, što ćemo pokazati na primeru kola drugog reda.

Konačno rešenje za $\forall t$ pomenute diferencijalne jednačine:

$$y(t) = z(t)h(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$
$$f(t) = \varphi(t)h(t), \qquad indiciona\ funkcija\ kola$$

Možemo pisati

$$A(D)f(t) = B(D)h(t)$$

Neka je r red polinoma $A(D)$, u našem slučaju $r = 2$, a q red polinoma $B(D)$.

$$A(D) = D^2 + a_1 D + a_0$$

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots \\ B(D)h(t) &= b_0 h(t) + b_1 Dh(t) + b_2 D^2 h(t) + \cdots \\ &= b_0 h(t) + b_1 \delta(t) + b_2 \delta'(t) + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(D)f(t) &= D^2 f(t) + a_1 Df(t) + a_0 f(t) \\ &= a_0\big(\varphi(t)h(t)\big) + a_1\big[D\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] + \big[D^2\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] \\ &= a_0\varphi(t)h(t) + a_1[D\varphi(t)h(t) + \varphi(0^+)\delta(t)] \\ &\quad + \big[D^2\varphi(t)h(t) + D\varphi(0^+)\delta(t) + D\big(\varphi(0^+)\big)h(t)\big] + \varphi(0^+)\delta'(t) \text{ [7]} \\ &= h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+)] + \delta'(t)\varphi(0^+) \end{aligned}$$

Razlikovaćemo tri slučaja:

1) $\boldsymbol{q < r}$**:** $\boldsymbol{q = 1,\ r = 2}$

   Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\begin{aligned} &h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + a_2 D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2 D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+) \\ &= b_0 h(t) + b_1\delta(t) \end{aligned}$$

   Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1 D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi(0^+) = 0 \implies f(0^+) = 0 \implies y(0^+) = 0.$$

   Ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

   Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ višeg reda od polinoma $B(D)$, da je reč o regularnoj komutaciji (nije došlo do promene početnih uslova)

---

[7] $D\varphi(0^+) = D\big(\varphi(t)\big)$ za $t = 0^+$, dok je $D\big(\varphi(0^+)\big) = \frac{\mathrm{d}\varphi(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0$ (izvod konstante)

2) $\boldsymbol{q = r:} \quad \boldsymbol{q = r = 2}$

Jednačina $A(D)f(t) = \ B(D)h(t)$ se svodi na:

$$h(t)[a_0\varphi(t) + a_1D\varphi(t) + a_2D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+)$$
$$= b_0h(t) + b_1\delta(t) + b_2\delta'(t)$$

Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = b_2 \end{aligned}$$

$$\varphi(0^+) \neq 0 \implies f(0^+) \neq 0 \implies y(0^+) \neq 0.$$

Nije ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ istog reda kao i polinom $B(D)$, da je reč o neregularnoj komutaciji (jeste došlo do promene početnih uslova)

3) $\boldsymbol{q > r:} \quad \boldsymbol{q = 3,\ r = 2}$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\underbrace{h(t)[a_0\varphi(t) + a_1D\varphi(t) + a_2D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+)}_{M}$$
$$= b_0h(t) + b_1\delta(t) + b_2\delta'(t) + b_3\delta''(t)$$

Pošto na levoj strani jednakosti nemamo član $\delta''(t)$ pretpostavka da je $f(t) = \varphi(t)h(t)$ je pogrešna, pa ćemo uvesti sledeću pretpostavku: $f(t) = \varphi(t)h(t) + H_1\delta(t)$. Sada je leva strana jednakosti, odn.

$$A(D)f(t) = M + a_0H_1\delta(t) + a_1H_1\delta'(t) + H_1\delta''(t)$$

Vršimo balansiranje prethodne jednačine:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1D + a_0)\varphi(t) = b_0 \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) + a_0H_1 = b_1 \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) + a_1H_1 = b_2 \\ \delta''(t)&: \quad H_1 = b_3 \end{aligned}$$

Iz poslednje tri relacije nalazimo nove početne uslove $\varphi(0^+) \neq 0, D\varphi(0^+) \neq 0$ i dalje rešavamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu po $\varphi(t)$.

U opštem slučaju, u rešenju diferencijalne jednačine odziva se javlja zavisnost od $\delta(t)$ i njegovih izvoda pa je reč o neregularnoj komutaciji. Pokazali smo, ako je pobuda u vidu Heaviside-ovog generatora a polinom $A(D)$ manjeg reda od reda polinoma $B(D)$, da je reč o neregularnoj komutaciji (jeste došlo do promene početnih uslova).

Pitanje 63.

Određivanje odziva na *Heaviside*-ovu pobudu „balansiranjem“ diferencijalne jednačine odziva

Neka u lineranom i vremenski nepromenljivom kolu r-tog reda bez akumulirane energije deluje *Heaviside*-ov generator $e(t) = Eh(t)$. Objasnićemo primenu balansiranja diferencijalne jednačine odziva na primeru.

Neka je diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)Eh(t)$$

Konačno rešenje za $\forall t$:

$$y(t) = z(t)h(t) = f(t)E = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi(t)E & t \geq 0 \end{cases}$$
$$f(t) = \varphi(t)h(t), \qquad indiciona\ funkcija\ kola$$

Možemo pisati

$$A(D)f(t) = B(D)h(t)$$

Neka je $r = 2$ red polinoma $A(D)$, a $q = 1$ red polinoma $B(D)$.

$$A(D) = D^2 + a_1 D + a_0$$

$$\begin{aligned} B(D) &= b_0 + b_1 D \\ B(D)h(t) &= b_0 h(t) + b_1 Dh(t) \\ &= b_0 h(t) + b_1 \delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(D)f(t) &= D^2 f(t) + a_1 Df(t) + a_0 f(t) \\ &= a_0\big(\varphi(t)h(t)\big) + a_1\big[D\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] + \big[D^2\big(\varphi(t)h(t)\big)\big] \\ &= a_0\varphi(t)h(t) + a_1[D\varphi(t)h(t) + \varphi(0^+)\delta(t)] \\ &\qquad + \big[D^2\varphi(t)h(t) + D\varphi(0^+)\delta(t) + D\big(\varphi(0^+)\big)h(t)\big] + \varphi(0^+)\delta'(t)\ ^{8} \\ &= h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+)] + \delta'(t)\varphi(0^+) \end{aligned}$$

Jednačina $A(D)f(t) = B(D)h(t)$ se svodi na:

$$\begin{aligned} &h(t)[a_0\varphi(t) + a_1 D\varphi(t) + a_2 D^2\varphi(t)] + \delta(t)[a_1\varphi(0^+) + a_2 D\varphi(0^+)] + \delta'(t)a_2\varphi(0^+) \\ &= b_0 h(t) + b_1\delta(t) \end{aligned}$$

[8] $D\varphi(0^+) = D\big(\varphi(t)\big)$ za $t = 0^+$, dok je $D\big(\varphi(0^+)\big) = \frac{\mathrm{d}\varphi(0^+)}{\mathrm{d}t} = 0$ (izvod konstante)

Vršimo balansiranje prethodne jednačine, odn. izjednačavamo odgovarajuće članove uz $h(t), \delta(t), \delta'(t)$ (u opštem slučaju $\delta''(t), \dots$) sa leve i desne strane:

$$\begin{aligned} h(t)&: \quad (D^2 + a_1 D + a_0)\varphi(t) = b_0 \quad (\mathbf{1}) \\ \delta(t)&: \quad a_1\varphi(0^+) + D\varphi(0^+) = b_1 \quad (\mathbf{2}) \\ \delta'(t)&: \quad \varphi(0^+) = 0 \quad (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

Ubacivanjem $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{2})$ dobijamo:

$$D\varphi(0^+) = b_1$$

pa zatim rešavamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu $(\mathbf{1})$ čiji je karakteristični polinom

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0 = 0$$

a rešenje oblika $\varphi(t) = \underline{K}_1 e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}_2 e^{\underline{S}_2 t}$.

Pomoću početnih uslova

$$\begin{aligned} \varphi(0^+) &= 0 \\ D\varphi(0^+) &= b_1 \end{aligned}$$

nalazimo konstante $\underline{K}_1$ i $\underline{K}_2$.

Konačno,

$$y(t) = \varphi(t)h(t)E.$$

Ispunjen je uslov $y(0^+) = y(0^-) = 0$, za bilo koju promenljivu u kolu.

Pitanje 64.
Odziv na impulsnu pobudu. *Green*-ova funkcija.

Ako je ekscitacija impulsnog oblika u kolu se po pravilu javlja neregularna komutacija – vrši se izmena početnih uslova:

$$u_C(0^+) \neq u_C(0^-), \qquad i_L(0^+) \neq i_L(0^-).$$

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije, u kome deluje impulsna ekscitacija: $e(t) = F\delta(t)$. Diferencijalna jednačina odziva je: $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$ sa početnim uslovima $D^{i-1}y(0^-) = 0$, $(i = 1,2, \dots r)$. Odziv se može rešavati posredno, na osnovu veze *Heaviside*-ove i *Dirac*-ove funkcije (odn. indicione i *Green*-ove funkcije kola), i direktno, iz polazne diferencijalne jednačine.

Posredno rešavanje

1) *Na osnovu veze Heaviside-ove i Dirac-ove funkcije kola.*

Kako je:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

pri čemu je:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[h(t) - h(t-\varepsilon)]\ ,$$

tade je ekscitacija $e(t)$ zadata sa:

$$e(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} e_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F}{\varepsilon}[h(t) - h(t-\varepsilon)]$$

Posmatrajmo sada odziv na ekscitaciju oblika $e_\varepsilon(t) = e_1(t) + e_2(t)$, gde je:

$$e_1(t) = \frac{F}{\varepsilon} h(t) \text{ i } e_2(t) = -\frac{F}{\varepsilon} h(t-\varepsilon).$$

Metodom superpozicije, odziv usled ekscitacije $e_\varepsilon(t)$ će biti: $y_\varepsilon(t) = y_1(t) + y_2(t)$, gde su $y_1(t)$ i $y_2(t)$ odzivi na ekscitacije $e_1(t)$ i $e_2(t)$, koje određujemo iz diferencijalnih jednačina:

$$A(D)y_1(t) = B(D)e_1(t) \longrightarrow y1(t) = \frac{F}{\varepsilon} f(t)$$

i

$$A(D)y_2(t) = B(D)e_2(t) \longrightarrow y_2(t) = -\frac{F}{\varepsilon} f(t-\varepsilon),$$

gde je () indiciona funkcija kola.

Tačno rešenje na pobudu: () = (), dobija se u graničnom procesu

$$(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F}{\varepsilon}[f(t) - f(t-\varepsilon)] \Longrightarrow y(t) = F\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

što znači da je odziv na impulsnu ekscitaciju srazmeran jačini udara ekscitacije F i izvodu indicione funkcije po vremenu. Funkcija koja se dobija kao količnik odziva na impulsnu ekscitaciju i jačine udara ekscitacije je funckija mreže koja se naziva *Green-ova funkcija*: $g(t) = \frac{y(t)}{F} = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$. Kao i u slučaju indicione funkcije i *Green*-ova funkcija može imati različitu prirodu u zavisnosti od prirode odziva i prirode ekscitacije.

2) *Na osnovu veze indicione i Green-ove funkcije kola*

Umesto da tražimo *Green*-ovu funkciju kola iz jednačine $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$ nalazimo indicionu funkciju kola iz $A(D)f(t) = B(D)h(t)$. A *Green*-ova funkcija je jednaka izvodu indicione funkcije po vremenu.

Direktno rešavanje

Polaznu diferencijalnu jednačinu $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$ podelimo sa jačinom udara ekscitacije F i dobijamo $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$, sa početnim uslovima $D^{i-1}g(0^-) = 0$, $(i = 1,2, \dots r)$, iz koje direktno možemo odrediti $g(t) = \frac{y(t)}{F}$. Rešenje posmatramo u obliku

$g(t) = \varphi(t)h(t) + H_1\delta(t) + H_2\delta'(t) + \cdots$.

Ako je red polinoma $A(D)$ veći ili jednak od reda polinoma $B(D)$ u rešenju indicione funkcije postojaće članovi uz *Dirac*-ovu funkciju i njen izvod, pa je komutacija neregularna. Pretpostavljeno rešenje ubacimo u $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$, i izbalansiramo levu i desnu stranu, odakle nalazimo koeficijente $H_1, H_2, \dots$ i izmenjene početne uslove $D^{i-1}\varphi(0^+)$, $(i = 1,2, \dots r)$. Rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu $A(D)\varphi(t) = 0$ sa izračunatim početnim uslovima.

Ako je red polinoma $A(D)$ manji od reda polinoma $B(D)$, $g(t) = \varphi(t)h(t)$ i rešenje se sadrži samo iz homogene diferencijalne jednačine $A(D)\varphi(t) = 0$, a pocetne uslove nalazimo uzastopnom integracijom r puta polazne diferencijalne jednačine $A(D)g(t) = B(D)\delta(t)$ u granicama od 0^- do 0^+.

Pitanje 65.
Odziv na usponsku i stepene funkcije vremena.

Ako u kolu deluje ekscitacija oblika usponske funkcije

$$e(t) = \frac{E}{T}r(t) = \frac{E}{T}th(t),$$

prinudni odziv se može odrediti na osnovu veze usponske i *Heaviside*-ove funkcije:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau = th(t).$$

Diferencijalna jednačina odziva

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\frac{E}{T}th(t)$$

se može rešiti posredno tako što se diferencira i leva i desna strana jednačine čime se dobija jednačina

$$A(D)y_1(t) = B(D)e(t) = B(D)\frac{E}{T}h(t)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju.

Odziv $y_1(t) = \frac{E}{T}f(t)$ gde je $f(t)$ odgovarajuća indiciona funkcija, jeste pomoćni odziv – odziv na *Heaviside*-ovu (pomoćnu) ekscitaciju $e_1(t) = \frac{E}{T}h(t)$. Stvaran odziv na usponsku ekscitaciju $e(t) = \frac{E}{T}r(t)$ je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{E}{T}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

što u slučaju da je indiciona funkcija data izrazom $f(t) = \varphi(t)h(t)$ iznosi:

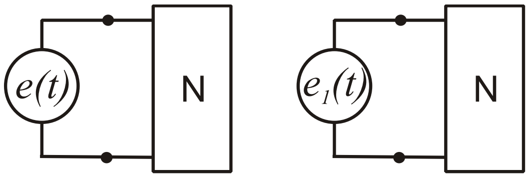
$$y(t) = \frac{E}{T}h(t)\int_{0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Odzivi na stepene funkcije vremena oblika $e(t) = E\left(\frac{t}{T}\right)^n$ se takođe višestrukim diferenciranjem i integraljenjem mogu rešiti primenom odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju.

Pitanje 66.

Veza indicione i *Green*-ove funkcije.

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije, u kome deluje impulsna ekscitacija: $e(t) = F\delta(t)$. Impulsni odziv na ovu ekscitaciju je $y(t) = Fg(t)$. Na mesto impulsne ekscitacije ubacujemo pomoćni *Heaviside*-ov generator $e_1(t) = Eh(t)$. Impulsni odziv na ovu ekscitaciju je $y_1(t) = Ef(t)$.



Diferencijalna jednačina odziva na impulsnu ekscitaciju je $A(D)y(t) = B(D)F\delta(t)$, deljenjem ove jednačine sa F dobija se $A(D)g(t) = B(D)\delta(t) \quad (\mathbf{1})$.

Diferencijalna jednačina odziva na *Heaviside*-ovu ekscitaciju je $A(D)y_1(t) = Eh(t)$, deljenjem ove jednačine sa E dobija se $A(D)f(t) = B(D)h(t)$. Diferenciranjem ove jednačine po vremenu dobijamo

$$D[A(D)f(t)] = D[B(D)h(t)]$$
$$A(D)Df(t) = B(D)\delta(t) \qquad (\mathbf{2})$$

Iz $(\mathbf{1})$ i $(\mathbf{2})$ sledi veza indicione i *Green*-ove funkcije

$$Df(t) = g(t).$$

Pitanje 67.
Odziv na eksponencijalnu i periodičnu pobudu.

Eksponencijalna ekscitacija

Posmatrajmo linearno i vremenski nepromenljivo kolo r-tog reda bez akumulirane energije. Ako je ekscitacija oblika: e(t) = e^{at}, pri čemu konstanta a ima prirodu frekvencije, tada je diferencijalna jednačina odziva: $A(D)y(t) = B(D)e^{at} = F(t)$.

Partikularno rešenje $y(t)$ je istog oblika kao $F(t)$ dok se koeficijenti koji figurišu u $y(t)$ nalaze ubacivanjem pretpostavljenog partikularnog rešenja u polaznu diferencijalnu jednačinu čime se dobija $A(D)y(t) = F(t)$ a zatim se jednačina izbalansira.

Razlikuju se dva slučaja:

a) Slučaj kada učestanost a nije jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti kola (rešenje karakterističnog polinoma $A(\underline{S})$. Tada je odziv kola oblika: $y(t) = Ke^{at}$. Zamenom u polaznu jednačinu: $A(D)y(t) = B(D)e^{at}$, dobija se vrednost konstante K:
$$K = \frac{B(a)}{A(a)},$$
pri $A(a) \neq 0$, gde su $A(a)$ i $B(a)$ polinomi po frekvenciji a, dobijeni iz odgovarajućih operatorskih polinoma $A(D)$ i $B(D)$. Ako je učestanost kompleksna: $a = \underline{s} = (\sigma + j\omega)$, tada će i koeficijent K biti kompleksan.

b) Ako je učestanost a jednaka nekoj od sopstvenih ucestanosti kola: $a = s_i$ (bilo da je realna ili kompleksna) tj. ako je $A(a) = 0$, tada je odziv oblika: $y(t) = t^p K e^{at}$ sa:
$$K = \frac{B(a)}{A^{(p)}a},$$
gde je p red višestrukog korena polinoma $A(s)$, dok $A^{(p)}(a)$ predstavlja izvod p-tog reda polinoma $A(s)$ po s u tački $s = a$. S obzirom na *Euler*-ovu smenu: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$, prostoperiodične funkcije $\cos(\omega t + \alpha)$ i $\sin(\omega t + \beta)$ pripadaju klasi eksponencijalnih funkcija.

Prostoperiodična ekscitacija.

Odziv na periodičnu ekscitaciju koja se uključuje u trenutku $t = 0$

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \delta)\, h(t)$$

može se odrediti direktno ili posredno.

Pri *direktnom rešavanju* se pretpostavljen prostoperiodični impulsni odziv

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \gamma)\,, \qquad t \geq 0$$

zameni u polaznu diferencijalnu jednačinu, a zatim izvrši balansiranje leve i desne strane čime se nalaze vrednosti Y_m i γ.

Posredno rešavanje se svodi na odziv na eksponencijalnu ekscitaciju primenom *Euler*-ove smene: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$. Uvodimo smene:

$$\underline{e}(t) = \underline{E_m} e^{j\omega t} \qquad \underline{E_m} = E_m e^{j\gamma}$$
$$\underline{e_1}(t) = \frac{1}{2}\underline{e}(t) \qquad \underline{e_2}(t) = \frac{1}{2}\underline{e}^*(t)$$

Sada je:

$$e(t) = \left(\underline{e_1}(t) + \underline{e_2}(t)\right) h(t).$$

Rešavamo diferencijalnu jednačinu odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e_1}(t) + \underline{e_2}(t)\right) h(t)$$

Za $t < 0$: $y(t) = 0$, jer je kolo bez akumulirane energije.

Za $t \geq 0$: $y(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e_1}(t) + \underline{e_2}(t)\right) = F(t)$$

$y(t)$ je istog oblika kao i $F(t)$:

$$y(t) = \underline{y_1}(t) + \underline{y_2}(t)$$

i ovde uvodimo smene:

$$\underline{y}(t) = \underline{Y_m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{Y_m} e^{j\omega t} \qquad \underline{Y_m} = Y_m e^{j\delta}$$
$$\underline{y_1}(t) = \frac{1}{2}\underline{y}(t) \qquad \underline{y_2}(t) = \frac{1}{2}\underline{y}^*(t)$$

Sada rešavamo diferencijalnu jednačinu koju dobijamo deljenjem sa 2 sledeće jednačine:

$$A(D)\underline{y_1}(t) = B(D)\underline{e_1}(t) \quad /\cdot \frac{1}{2}$$
$$A(D)\underline{y}(t) = B(D)\underline{e}(t)$$
$$A(D)\underline{Y_m} e^{j\omega t} = B(D)\underline{E_m} e^{j\omega t}$$

Uočavajući da je $De^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$, odn. $D^2 e^{j\omega t} = (j\omega)^2 e^{j\omega}$ dobija se da je

$$A(j\omega)\underline{Y_m} = B(j\omega)\underline{E_m}$$

Konačno,

$$\underline{Y}_m = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \underline{E}_m = Y_m e^{j\delta}$$

$$\underline{y}(t) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} E_m e^{j\gamma} e^{j\omega t}$$

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \delta).$$

Pitanje 68.

Određivanje potpunog odziva.

U najopštijem slučaju kolo sadrži generatore i poseduje akumuliranu energiju. Odziv koji pritom nastaje predstavlja potpun odziv i posledica je oba navedena uzroka. Posmatra se opet jedno linearno i vremenski nepromenljivo kolo reda r koje se sastoji iz linearne i vremenski nepromenljive mreže N, koja poseduje akumuliranu energiju i ukupno $g = f + h$ nezavisnih generatora: $u_{g1}, \ldots, u_{gf}, i_{g1}, \ldots, i_{gh}$, predstavljenih van mreže. Diferencijalna jednačina odziva za bilo koju promenljivu $y(t) \in \{u_k, i_k\}$, $(k = 1,2, \ldots)$ je oblika:

$$A(D)y(t) = \sum_{s=1}^{g} \left[B_{y,s}(D)e_s(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

za čije je rešenje potrebno znati prvih r početnih (izvedenih) uslova:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= h_{10}, \\ Dy(0^+) &= h_{20}, \\ &\vdots \\ D^{r-1}y(0^+) &= h_{r0} \end{aligned}$$

gde su vrednosti h_{i0}, $i = 1,2, \ldots, r$ određene stvarnim početnim uslovima: $u_{C_k}(0^+), i_{L_j}(0^+), k = 1, 2, \ldots b_C$, $j = 1, 2, \ldots b_L$, kao i vrednostima ekscitacija: $u_{gm}(0^+)$, $i_{gn}(0^+)$, $m = 1,2, \ldots, f$, $n = 1,2, \ldots, h$. Pri tome, ako je komutacija regularna, tada je: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$, dok u protivnom treba odrediti izmenjene početne uslove.

Diferencijalna jednačina odziva se može rešavati na dva načina: direktno i superpozicijom.

Direktno rešavanje

Rešava se polazna nehomogena diferencijalna jednačina

$$A(D)y(t) = \sum_{i=1}^{g} \left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

čije je rešenje u obliku:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Član $y_h(t)$ predstavlja rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_h(t) = 0$$

Konstante u članu $y_h(t)$ se nalaze iz početnih uslova

$$\begin{aligned} y(0^+) &= h_{10}, \\ Dy(0^+) &= h_{20}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$D^{r-1}y(0^+) = h_{r0}$$

Član $y_p(t)$ predstavlja partikularno rešenje koje je istog oblika kao nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ polazne diferencijalne jednačine:

$$y_p(t) = \sum_{(i=1)}^{g} y_{pi}(t)\,, \qquad y_{pi}(t) \sim e_i(t)$$

Zatim se u polaznu diferencijalnu jednačinu ubaci $y_p(t)$:

$$A(D)y_p(t) = \sum_{i=1}^{g} \left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

i jednačina se izbalansira.

Rešavanje superpozicijom

Ovaj postupak smemo da primenimo u linearnim kolima. Odvojeno tražimo odziv na akumuliranu energiju, $y_0(t)$, u kolu bez generatora i odziv usled delovanja generatora $y_e(t)$ u kolu bez akumulirane energije. Drugim rečima, ukupan odziv je jednak sumi sopstvenog i prinudnog odziva $y(t) = y_0(t) + y_e(t)$.

Sopstveni odziv se određuje iz homogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_0(t) = 0$$

sa izvedenim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= f_{10}, \\ Dy(0^+) &= f_{20}, \\ &\vdots \\ D^{r-1}y(0^+) &= f_{r0} \end{aligned}$$

koji su određeni sa $u_{C_k}(0^+) = 0, i_{L_j}(0^+) = 0, k = 1, 2, \dots b_C,\ j = 1, 2, \dots b_{L.}$ Pri tome, ako je komutacija regularna, tada je: $u_{C_k}(0^+) = u_{C_k}(0^-)$, $i_{L_j}(0^+) = i_{L_j}(0^-)$, dok u protivnom treba odrediti izmenjene početne uslove.

Prinudni odziv se određuje iz nehomogene diferencijalne jednačine

$$A(D)y_e(t) = \sum_{i=1}^{g} \left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t)$$

sa izvedenim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} y(0^+) &= k_{10}, \\ Dy(0^+) &= k_{20}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$D^{r-1}y(0^+) = k_{r0}$$

koji su određeni sa $u_{C_k}(0^+) = 0, i_{L_j}(0^+) = 0, k = 1, 2, \dots b_C,\ j = 1, 2, \dots b_L$, odnosno samo ekscitacijama.

Prinudni odziv će biti oblika:

$$y_e(t) = y_{eh}(t) + y_{ep}(t).$$

Pitanje 69.
Ustaljen prostoperiodičan režim. Kompleksan domen.

Posmatrajmo delovanje jedne prostoperiodične ekscitacije:

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \gamma)$$

u linearnom, vremenski nepromenljivom i pasivnom kolu bez akumulisane energije, pri čemu je:

E – maksimalna vrednost (amplituda) funkcije. $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ – efektivna vrednost funkcije. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – kružna frekvencija. T – perioda funkcije. $(\omega t - \gamma)$ – trenutna faza. γ – početna faza (u trenutku $t = 0$). Odziv kola $y(t)$ je određen diferencijalnom jednačinom:

$$A(D)y(t) \ = \ B(D)e(t)$$

i oblika je sume dva člana: $y(t) = y_h(t)$ i $y_p(t)$. Rešenje homogenog dela je oblika:

Ako je kolo striktno pasivno, komponenta $y_h(t)$ će težiti nuli posle dovoljno dugo vremena (praktično, posle trajanja u vrednosti od pet vremenskih konstanti), pa se ova komponenta naziva prelazni odziv.

Dakle, posle dovoljno dugo vremena postojaće samo prinudni odziv $y_p(t)$ koji je opisan funkcijom istog oblika kao ekscitacija:

$$y(t) \equiv y_p(t) = Y_m \cos(\omega t + \delta) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \delta)$$

sa analognim značenjem veličina kao i za ekscitaciju. Komponente ustaljenog odziva mogu se odrediti na dva načina – direktno i posredno.

Direktno određivanje

Pretpostavljen prostoperiodični impulsni odziv

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \gamma)\,, \qquad t \geq 0$$

zameni se u polaznu diferencijalnu jednačinu, a zatim izvrši balansiranje leve i desne strane čime se nalaze vrednosti Y_m i γ, što predstavlja rešavanje kola u vremenskom domenu.

Posredno određivanje

Svodi se na odziv na eksponencijalnu ekscitaciju primenom *Euler*-ove smene: $e^{\pm jx} = (\cos x \pm j \sin x)$, što predstavlja rešavanje kola u kompleksnom domenu.

Pomoću *Euler*-ove smene, prostoperiodična ekscitacije se može izraziti pomoću dve eksponencijalne funkcije vremena:

$$e(t) = \frac{E_m}{2}\left[e^{j(\omega t+\gamma)} + e^{-j(\omega t+\gamma)}\right] = \underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)\ ,$$

gde su funckije $\underline{e}_1(t)$ i $\underline{e}_2(t)$ konjugovano kompleksne:

$$\underline{e}(t) = \underline{E}_m e^{j\omega t} \qquad \underline{E}_m = E_m e^{j\gamma}$$
$$\underline{e}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{e}(t) \quad \underline{e}_2(t) = \frac{1}{2}\underline{e}^*(t)$$

Veličine $\underline{e}(t)$, $\underline{e}_1(t)$ i $\underline{e}_2(t)$ su kompleksne funkcije vremena i zovu se kompleksne trenutne vrednosti. Njihovi moduli su: E_m za $\underline{e}(t)$ i $\frac{E_m}{2}$ za $e_1(t)$ i $e_2(t)$, a argumenti zavise od vremena i iznose $(\omega t + \gamma)$ za $\underline{e}(t)$ i $\underline{e}_1(t)$ i $-(\omega t + \gamma)$ za $\underline{e}_2(t)$.

Sada je diferencijalna jednačina odziva:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(\underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t)\right) = F(t)$$

$y(t)$ je istog oblika kao i $F(t)$:

$$y(t) = \underline{y}_1(t) + \underline{y}_2(t)$$

i ovde uvodimo smene:

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t} \qquad \underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$$
$$\underline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\underline{y}(t) \quad \underline{y}_2(t) = \frac{1}{2}\underline{y}^*(t)$$

Sada rešavamo diferencijalnu jednačinu koju dobijamo deljenjem sa 2 sledeće jednačine:

$$A(D)\underline{y}_1(t) = B(D)\underline{e}_1(t) \quad /:2$$
$$A(D)\underline{y}(t) = B(D)\underline{e}(t)$$
$$A(D)\underline{Y}_m e^{j\omega t} = B(D)\underline{E}_m e^{j\omega t}$$

Uočavajući da je $De^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$, odn. $D^2 e^{j\omega t} = (j\omega)^2 e^{j\omega}$ dobija se da je

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y}_m = \underline{B}(j\omega)\underline{E}_m$$

Konačno,

$$\underline{Y}_m = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{B}(j\omega)}\underline{E}_m = Y_m e^{j\delta}$$

$$\underline{y}(t) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{B}(j\omega)} E_m e^{j\gamma} e^{j\omega t}$$

Kompleksna veličina $\underline{E}_m = E_m e^{j\gamma}$ (analogno i za $\underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$) čiji je moduo jednak amplitudi, a argument odgovara početnoj fazi prostoperiodične funkcije $e(t)$ ($y(t)$) jeste kompleksna amplituda posmatrane vremenske funkcije, pa su kompleksne efektivne vrednosti definisane sa:

$$\underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}} \quad \left(\underline{Y} = \frac{\underline{Y}_m}{\sqrt{2}}\right)$$

Ove kompleksne veličine (bilo amplitude, bilo efektivne vrednosti) su kompleksni predstavnici prostoperiodičnih velicina. Veza između prostoperiodične funkcije i njenog kompleksnog predstavnika je:

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma) = \mathrm{Re}\{\underline{E}_m e^{j\omega t}\} \leftrightarrow \underline{E}_m = E_m\, e^{j\gamma}$$
$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \delta) = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_m e^{j\omega t}\} \leftrightarrow \underline{Y}_m = Y_m e^{j\delta}$$
$$\left(\underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}}, \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{Y}_m}{\sqrt{2}}\right)$$

što se naziva preslikavanje iz vremenskog u frekvencijski domen, pa je diferencijalna jednačina odziva:

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y}_m = \underline{B}(j\omega)\underline{E}_m.$$

Ova jednačina je poznata kao jednačina odziva u kompleksnom domenu, s obzirom na polinome $\underline{A}(j\omega)$ i $\underline{B}(j\omega)$.

Pitanje 70.
Funkcije mreže u ustaljenom prostoperiodičnom režimu.

Posmatrajmo jednačinu kola u frekvencijskom domenu:

$$\underline{A}(j\omega)\underline{Y}_m = \underline{B}(j\omega)\underline{E}_m\,.$$

Kako je reč o klasičnom množenju polinoma $\underline{A}(j\omega)$ i $\underline{B}(j\omega)$ sa kompleksnim predstavnicima odziva $\underline{Y}_m$ i pobude $\underline{E}_m$, to se kompleksan odziv može odrediti iz algebarskog izraza:

$$\underline{Y}_m = \underline{E}_m \frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}.$$

Odavde se može odrediti trenutna vrednost prinudnog odziva primenom veze funkcija iz vremenskog i kompleksnog domena:

$$y(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{y}(t)\right\} = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_m e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}\underline{E}_m e^{j\omega t}\right\}$$

Količnik $\frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)}$ je određen samo parametrima mreže vezane za krajeve ekscitacije $e(t)$. Ovaj količnik jeste funkcija mreže u kompleksnom domenu, tj. kompleksna funkcija mreže $\underline{T}(j\omega)$:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{B}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)} .$$

Kompleksna funkcija mreže predstavlja količnik kompleksnog odziva i kompleksne pobude:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{y}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{E}_m} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} .$$

Kompleksan odziv kola se može predstaviti u vidu proizvoda kompleksne funkcije mreže i kompleksne ekscitacije:

$$\underline{Y}_m = \underline{T}(j\omega)\underline{E}_m .$$

Funkcija mreže se može izraziti pomoću realnog dela (parne funkcije) i imaginarnog dela (neparne funkcije):

$$\begin{aligned}\underline{B}(j\omega) &= b_0 + b_1 j\omega + b_2(j\omega)^2 + \cdots \\ &= \underbrace{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \cdots)}_{B_1(\omega)} + j\,\underbrace{\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \cdots)}_{B_2(\omega)} \\ &= B_1(\omega) + jB_2(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{A}(j\omega) &= A_1(\omega) + jA_2(\omega) \\ \underline{T}(j\omega) &= \frac{B_1(\omega) + jB_2(\omega)}{A_1(\omega) + jA_2(\omega)} \cdot \frac{A_1(\omega) - jA_2(\omega)}{A_1(\omega) - jA_2(\omega)} \\ &= \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{A_1^2 + A_2^2} + j\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1^2 + A_2^2} \\ &= T_1(\omega) + jT_2(\omega)\end{aligned}$$

A možemo je prikazati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}B(\omega) &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \\ \beta(\omega) &= \mathrm{arctg}\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \\ \underline{B}(j\omega) &= B(\omega)e^{j\beta(\omega)} \\ \underline{A}(j\omega) &= A(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \\ \underline{T}(j\omega) &= \frac{B(\omega)e^{j\beta(\omega)}}{A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}} = T(\omega)e^{j\tau(\omega)} \\ T(\omega) &= \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}\end{aligned}$$

$$\tau(\omega) = \beta(\omega) - \alpha(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Napomenimo da u vremenskom domenu postoje dva oblika funkcije mreže – *Green*-ova i indiciona, dok u kompleksnom domenu postoji samo jedna funkcija mreže.

Pitanje 71.
Linearni transformator u ustaljenom prostoperiodičnom režimu.

Linearni transformator obezbeđuje razmenu energija između ovih mreža, bez direktne (galvanske) veze – mreže su izolovane. Razmena energije se vrši posredstvom zajedničkog magnetnog polja - kalemovi L_1 i L_2 su induktivno spregnuti.

Posmatramo slučaj spregnutih kalemova u ustaljenom prostperiodičnom režimu; neka je linearni transformator recipročan, odn. neka važi $L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$, gde je k koeficijent sprege.

Jednačine linearnog transformatora u vremenskom domenu su:

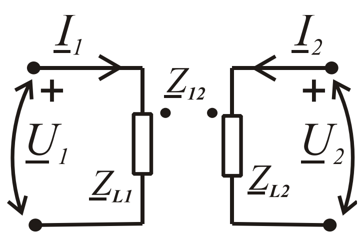
$$u_1 = L_1 D i_1 \pm L_{12} D i_2$$
$$u_2 = L_2 D i_2 \pm L_{12} D i_1$$

Položaju tačkica na slici odgovara znak "+".

Jednačine linearnog transformatora u kompleksnom domenu su:

$$\underline{U}_1 = \underbrace{j\omega L_1}_{\underline{Z}_{L_1}} \underline{I}_1 + \underbrace{j\omega L_{12}}_{\underline{Z}_{12}} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underbrace{j\omega L_{12}}_{\underline{Z}_{12}} \underline{I}_1 + \underbrace{j\omega L_2}_{\underline{Z}_{L_2}} \underline{I}_2$$

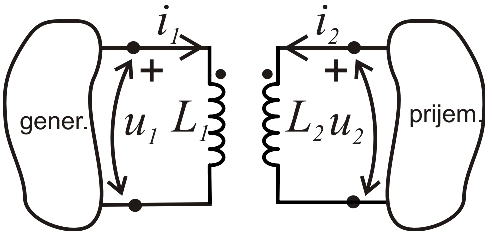
Ekvivalentno kolo u kompleksnom domenu:



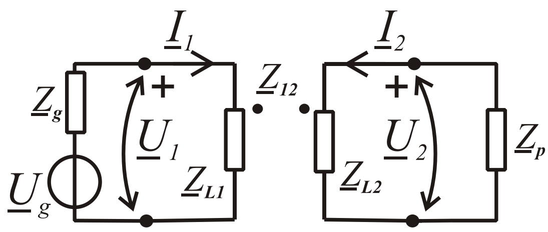
dok su jednačine linearnog transformatora:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{L_1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{L_2}\underline{I}_2\ . \end{aligned}$$

Posmatramo kolo:



Ekvivalentno kolo u kompleksnom domenu:



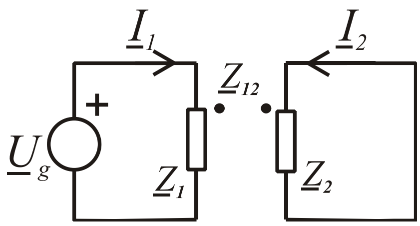
dok su jednačine kola u kompleksnom domenu:

$$\begin{aligned} \underline{U}_g &= \underline{Z}_g\underline{I}_1 + \underline{U}_1 \Longrightarrow \underbrace{\left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_{L_1}\right)}_{\underline{Z}_1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 = \underline{U}_g \\ \underline{U}_2 &= -\underline{Z}_p\underline{I}_2 \Longrightarrow \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underbrace{\left(\underline{Z}_p + \underline{Z}_{L_2}\right)}_{\underline{Z}_2}\underline{I}_2 = 0 \end{aligned}$$

Sada su jednačine

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 &= \underline{U}_g \\ \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

gde je $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12} = jX_{12}$.

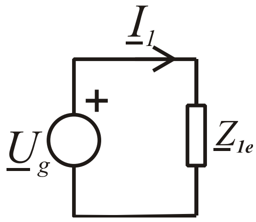


Iz $(*)$ sledi:

$$\underbrace{\left(\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}\right)}_{\underline{Z}_{1e}}\underline{I}_1 = \underline{U}_g$$

gde je ekvivalentna impedansa primarnog kola (impedansa koju vidi naponski generator) $\underline{Z}_{1e} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_1 + \frac{X_{12}^2}{\underline{Z}_2} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2'$, a $\underline{Z}_2'$ predstavlja preslikanu impedansu sekundara na primarno kolo.

Šema primarnog kola:



Slično možemo izvesti i za sekundarno kolo:

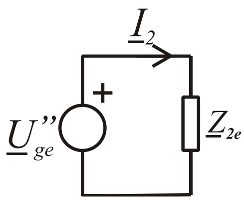
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_g}{\left(\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2}\right)}$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_2}\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}_g \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2} = \frac{-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1}\underline{U}_g}{\underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1}} = \frac{-\underline{U}''_{ge}}{\underbrace{\underline{Z}_2 + \underline{Z}''_1}_{\underline{Z}_{e2}}}$$

gde je $\underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}''_1 = \underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1}$ ekvivalentna impedansa sekundarnog kola, a $\underline{Z}'_1$ predstavlja preslikanu impedansu primara na sekundarno kolo.

Gledano sa strane sekundara, mrežu možemo predstaviti ekvivalentnim *Thevenin*-ovim generatorom sa $\underline{U}''_{ge} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_1}\underline{U}_g$.

Šema sekundarnog kola:

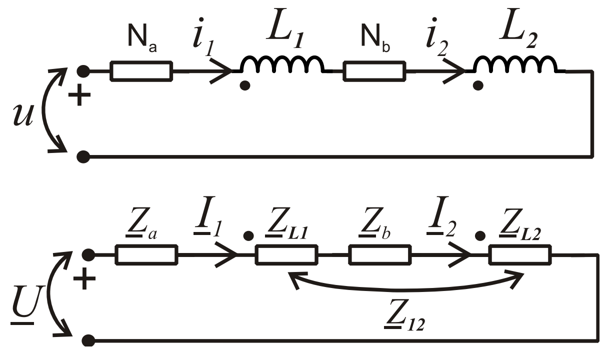


Ekvivalentne impedanse primarnog i sekundarnog kola $\underline{Z}_{1e}$ i $\underline{Z}_{2e}$, možemo predstaviti preko *rezistanse* i *reaktanse*. Gde rezistansa predstavlja gubitke u kolu.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{1e} &= \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2} \\
&= (R_1 + jX_1) + \frac{X_{12}^2}{R_2 + jX_2} \\
&= \left(R_1 + \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2}R_2\right) + j\left(X_1 - \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2}X_2\right) \\
&= R_{1e} + jX_{1e}
\end{aligned}$$

Sprega primara i sekundara povećava gubitke što uočavamo i kod R_{1e}, odn. gubici se preslikavaju.

Redna veza spregnutih kalemova



Za položaj tačaka na slici pišemo jednačine kola:

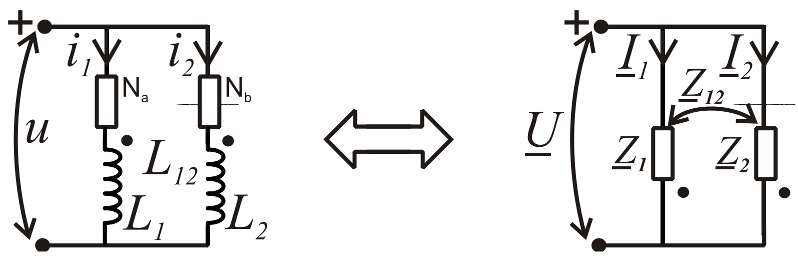
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}$$
$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$
$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

gde su $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_a + \underline{Z}_{L_1}$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_b + \underline{Z}_{L_2}$, $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12}$. Dalje je $\underline{U} = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12}\right)\underline{I}$.

Redna veza induktivno spregnutih mreža u kompleksnom domenu može se zameniti ekvivalentom impedansom:

$$\underline{Z}_{ule} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12}$$

Paralelna veza spregnutih kalemova



Za položaj tačaka na slici pišemo jednačine kola:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 = \underline{U}_2$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

Slično kao i kod redne veze, zaključujemo da se paralelna veza spregnutih mreža u kompleksnom domenu može zameniti ekvivalentnom impedansom

$$\underline{Z}_{ule} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{12}}.$$

Pitanje 72.

Snage u ustaljenom prostoperiodicnom rezimu.

Posmatrajmo mrežu N sa jednim pristupom koja je deo nekog električnog kola. Trenutna ulazna snaga predstavlja brzinu kojom se, spolja, ulaže energija u mrežu N. Za usaglašene smerove napon-struja, ova snaga iznosi: $p(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)i(t)$ - trenutna snaga.

Za mreže sa više pristupa trenutna ulazna snaga je jednaka sumi trenutnih ulaznih snaga svakog od pristupa:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t), \qquad p_k(t) = u_k(t)i_k(t)$$

Neka je mreža N linearna i vremenski nepromenljiva i u njoj je ostvaren ustaljen prostoperiodični režim. Tada su napon i struja na ulazu mreze:

$$u(t) = \sqrt{2}Ucos(\omega t + \theta)$$
$$i(t) = \sqrt{2}Icos(\omega t + \psi).$$

Trenutna ulazna snaga mreze je:

$$\begin{aligned} p(t) &= 2UI\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \psi) = UI[\cos(\theta - \psi) + \cos(2\omega t + \theta + \psi)] \\ &= \underbrace{UI\cos(\theta - \psi)}_{P} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)}_{p_f(t)}. \end{aligned}$$

Trenutna snaga se može prikazati u vidu sume dva člana od kojih je jedan konstantan (nepromenljiv sa vremenom), a drugi je prostoperiodična funkcija vremena, dvostruke frekvencije u odnosu na frekvenciju napona/struje. Konstantan član jeste srednja snaga za vreme jedne periode napona/struje: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, predstavlja srednju (ili još: aktivnu) snagu, a označava se sa slovom P:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(\theta - \psi)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)\mathrm{d}t \\ &= UI\cos(\theta - \psi) + 0 = \frac{a(0,T)}{T}, \end{aligned}$$

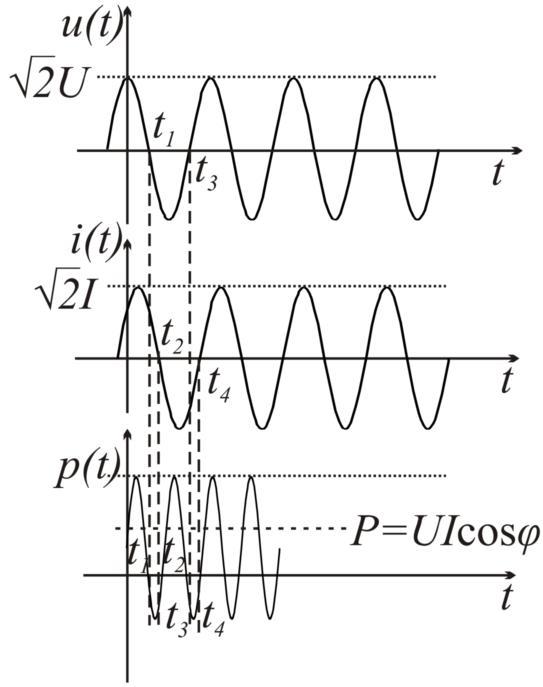
gde je $\varphi = \theta - \psi$, argument impedanse mreže N, a $a(0,T)$ ukupan rad. Drugi član u izrazu je naizmenično pozitivan i negativan i on predstavlja razmenu energije između mreže N i ostatka kola, naziva se fluktuirajućom snagom i označava se sa $p_f(t)$:

$$p_f(t) = UI\cos(2\omega t + \theta + \psi)$$

Sada se trenutna snaga može definisati sa: $p(t) = P + p_f(t)$. Za realne, striktno pasivne mreže, je: $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, tako da je srednja (aktivna) snaga pasivne mreže uvek pozitivna: $P > 0$.

To znači da mreža N stalno nepovratno troši električnu energiju koja joj se dovodi. Ako mreža sadrži samo induktivne i/ili kapacitivne elemente, tada je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ili $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, pa je aktivna snaga uvek jednaka nuli: $P = 0, \forall t$. Mreže sa takvom osobinom jesu mreže bez gubitaka. Ako je srednja snaga negativna: $P < 0$, tada je mreža aktivna - ona ulaže električnu energiju u ostatak kola.

Vremenski dijagrami, napona, struje i trenutne snage na pristupu pasivne mreže



U intervalu vremena $t_1 - t_2$ mreža predaje energiju ostatku kola, dok u intervalu $t_2 - t_3$ mreža prima energiju od ostatka kola, u intervalu $t_3 - t_4$ mreža opet predaje energiju itd…

Uočavamo da pasivna mreža ulaže energiju u ostatak kola u nekim vremenskim intervalima. Objašnjenje je u postojanju dinamičkih elemenata koji imaju sposobnost akumuliranja energije. U jednom delu periode prostoperiodičnog napona pored ulaganja spoljašnje energije na nepovratne procese vrši se akumuliranje energije u dinamičkim elementima a potom se akumulirana energija delom troši u rezistivnim elementima a delom vraća ostatku kola. Zatim se situacija periodično ponavlja.

Prividna snaga se obeležava sa $S = UI$ i predstavlja snagu koju generator treba da obezbedi. Proizvod efektivnih vrednosti napona i struje na pristupu mreže je prividna snaga i označava se sa S: $S = UI$ – prividna snaga. Ova veličina predstavlja maksimalno odstupanje trenutne snage od srednje (aktivne) snage.

U mrežama koje sadrže dinamičke elemente javlja se i reaktivna snaga, koja karakteriše mrežu u pogledu njenog ponašanja kao reaktivnog prijemnika i označava se sa Q: $Q = UI\sin\varphi$ – reaktivna snaga.

Čisto rezistivna mreža sa jednim pristupom (otpornik)

Spider-pig, spider-pig
Does whatever a spider-pig does
Can he swing from a web
No he can't, he's a pig
Looook ooouuttt here's a spider pig ☺

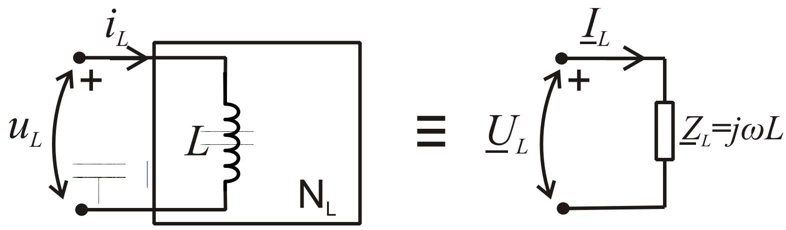
$$
\begin{aligned}
u_R &= Ri_R \\
u_R(t) &= \sqrt{2}U_R\cos(\omega t + \theta_R) \\
i_R(t) &= \sqrt{2}I_R\cos(\omega t + \psi_R)
\end{aligned}
$$

Neka je $\psi_R = \theta_R \Longrightarrow \varphi_R = 0$:

$$
\begin{aligned}
p_R(t) &= U_RI_R\cos\varphi_R + U_RI_R\cos 2(\omega t + \theta_R) \\
&= U_RI_R\big(1 + \cos 2(\omega t + \theta_R)\big) \geq 0
\end{aligned}
$$

U izolovanim tačkama, $p_R(t) = 0$, tu su i trenutni napon i trenutna struja jednaki nuli. Uočavama da trenutna snaga osciluje oko srednje (aktivne) vrednosti.

Čisto induktivna mreža sa jednim pristupom (kalem)



$$
\begin{aligned}
u_L &= LDi_L \\
i_L(t) &= \sqrt{2}I_L\cos(\omega t + \psi_L) \\
u_L(t) &= -L\omega\sqrt{2}I_L\sin(\omega t + \psi_L) \\
&= \sqrt{2}L\omega I_L\cos\left(\omega t + \psi_L + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

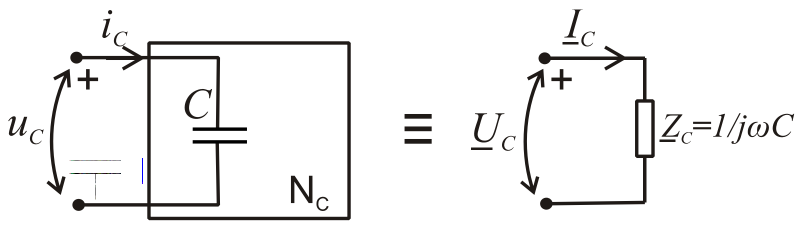
gde je $U_L = L\omega I_L$, $\theta_L = \psi_L + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
p_L(t) &= U_L I_L\cos\frac{\pi}{2} + U_L I_L\cos\left(2\omega t + \theta_L + \theta_L - \frac{\pi}{2}\right) \\
P_L &= 0 \\
p_L(t) &= p_f(t) = U_L I_L\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos 2(\omega t + \theta_L) + \sin\frac{\pi}{2}\sin 2(\omega t + \theta_L)\right) \\
&= U_L I_L\sin 2(\omega t + \theta_L)
\end{aligned}
$$

Kod induktivne mreže je srednja snaga nula, postoji samo razmena energije sa generatorom.

-SLIKA 4, knjiga 2, str. 74-

Čisto kapacitivna mreža sa jednim pristupom (kondenzator)



$$
\begin{aligned}
i_C(t) &= CDu_c(t) \\
u_C(t) &= \sqrt{2}U_C\cos(\omega t + \theta_C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_C(t) &= -C\omega\sqrt{2}U_C\sin(\omega t + \theta_C) \\
&= \sqrt{2}C\omega U_C\cos\left(\omega t + \theta_C + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

gde je $I_C = C\omega U_C, \psi_C = \theta_C + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
p_C(t) &= U_C I_C \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + U_C I_C \cos\left(2\omega t + \theta_C + \theta_C + \frac{\pi}{2}\right) \\
P_C &= 0 \\
p_C(t) &= p_f(t) = U_C I_C \left(\cos\frac{\pi}{2}\cos 2(\omega t + \theta_C) - \sin\frac{\pi}{2}\sin 2(\omega t + \theta_C)\right) \\
&= -U_C I_C \sin 2(\omega t + \theta_C)
\end{aligned}$$

Kod kapacitivne mreže je srednja snaga nula, postoji samo razmena energije sa generatorom.

-SLIKA 6, knjiga 2, str. 72.-

Opšti slučaj

$$\varphi = \theta - \psi$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \theta + \psi) \\
&= UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + 2\theta - \varphi) \\
&= UI\cos\varphi + UI\cos\varphi\cos 2(\omega t + \theta) + UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta) \\
&= \underbrace{UI\cos\varphi\,[1 + \cos 2(\omega t + \theta)]}_{p_P(t)} + \underbrace{UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta)}_{p_Q(t)} \\
&= p_P(t) + p_Q(t)
\end{aligned}$$

Trenutna snaga na rezisitivnim elementima odn. trenutna aktivna snaga je

$$p_P(t) = UI\cos\varphi\,[1 + \cos 2(\omega t + \theta)] = P[1 + \cos 2(\omega t + \theta)],$$

a trenutna snaga na reaktivnim (dinamičkim) elementima odn. trenutna reaktivna snaga je

$$p_Q(t) = UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta) = Q\sin 2(\omega t + \theta).$$

Kompleksan domen

Primenom *Euler*-ove smene trenutnu snagu izražavamo uvođenjem smena

$$p(t) = \left(\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t)\right)\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_1 = \frac{1}{2}\underline{u} \quad && \underline{u} = \sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t} \quad && \underline{i}_1 = \frac{1}{2}\underline{i} \quad && \underline{i} = \sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t} \\
&\underline{u}_2 = \underline{u}_1^* \quad && \underline{U}_m = \sqrt{2}\underline{U} \quad && \underline{i}_2 = \underline{i}_1^* \quad && \underline{I}_m = \sqrt{2}\underline{I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{2}\left(\underline{u} + \underline{u}^*\right)\frac{1}{2}\left(\underline{i} + \underline{i}^*\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\underline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}^* e^{-j\omega t}\right)\left(\underline{I}e^{j\omega t} + \underline{I}^* e^{-j\omega t}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\underline{U}\underline{I}^* + \underbrace{\underline{U}^*\underline{I}}_{(\underline{U}\underline{I}^*)^*}\right) + \left(\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + \underbrace{\underline{U}^*\underline{I}^*e^{-j2\omega t}}_{(\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t})^*}\right)\right]$$
$$= \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}^*\} + \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\}$$

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}^*\}$$
$$p_f(t) = \mathrm{Re}\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\}$$

Kompleksna snaga je

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j(\theta-\psi)} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

Reaktivna snaga Q predstavlja snagu koja se „nepotrebno“ ulaže u akumuliranje.

Pitanje 73.

Faktor snage i njegova popravka.

Proizvod efektivnih vrednosti napona i struje na pristupu mreže je prividna snaga i označava se sa S: $S = UI$ – prividna snaga. Ova veličina predstavlja maksimalno odstupanje trenutne snage od srednje (aktivne) snage. Aktivna i reaktivna snaga se mogu izraziti sa: $P = S\cos\varphi$, $Q = S\sin\varphi$. Sve tri veličine imaju prirodu snage, ali se, zbog toga što se njima opisuju različiti efekti u mrežama, uobičajeno da se koriste različite oznake njihovih jedinica:

$$P[W], \qquad Q[VAr], \qquad S = [VA]$$

Kvalitet neke mreže kao aktivnog prijemnika energije opisuje se faktorom snage, koji se može označiti sa k_p:

$$k_p = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

Ovaj faktor označava koji se deo raspoložive energije, pri datim efektivnim vrednostima napona i struje, stvarno koristi u mreži u nepovratnom procesu. Maksimalan faktor snage postoji kod čisto rezistivnih mreža: $\cos\varphi = 1$, a za reaktivne mreže je minimalne vrednosti jednake nuli: $\cos\varphi_L = \cos\varphi_C = 0$. Po analogiji sa faktorom snage član $\sin\varphi = \frac{Q}{S}$ koji karakteriše reaktivnu snagu naziva se faktor reaktivnosti.

Radi popravljanja faktora snage, za krajeve prijemnika treba vezati reaktansu suprotnog karaktera od reaktanse prijemnika X_p, što znači da se za prijemnika induktivne prirode, vezuju kapacitivni elementi, a za prijemnike kapacitivne prirode, induktivni elementi.

Ilustracija na primeru kola sa slike:

Kompleksna impedansa $\underline{Z} = R + j\omega L$

Faktor snage je $k_p = \frac{P}{S} = \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. „Idealni" faktor snage je 1, a to je postignuto kada je kompleksan deo impedanse (reaktivan) jednak nuli.

Jednačina kola:

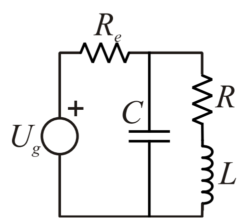
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}$$

Usvojićemo da je početna faza napona jednaka nuli odn. $\underline{U} = U$:

$$\underline{I} = \frac{U(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\underline{I_L} = j\mathrm{Im}\{\underline{\mathrm{I}}\} = \mathrm{j}\frac{-U\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Prijemnik je pretežno induktivan pa ćemo paraleleno vezati kondenzator kapacitivnosti C:



Da bi postigli željeni efekat treba da bude ispunjeno: $\underline{I_L} = -\underline{I_C}$.

$$\underline{I_C} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = Uj\omega C$$

Odnosno, treba da važi

$$\mathrm{j}\frac{-U\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = -Uj\omega C$$

Zaključujemo,

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Pitanje 74.
Ustaljen složenoperiodičan režim.

Realna periodična funkcija vremena oblika: $f(t+kT)=f(x),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ sa periodom T može se predstaviti *Fourier*-ovim redom:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t), \qquad f^{(0)}(t)=F_0, \qquad f^{(n)}(t)=F_m^{(n)}\cos(n\omega_1 t+\varphi^{(n)})$$

gde su: F_0 – konstantan član, $f^{(n)}(t)$ – n-ta harmonijska komponenta (n-ti harmonik), $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika, $n\omega_1$ – frekvencija n-tog harmonika.

Tada je: $v=f=\frac{1}{T}$ – frekvencija (broj promena u jedinici vremena). Umesto linearne frekvencije koristi se i ugaona frekvencija: $\omega=2\pi f\ [\frac{rad}{s}]$. Da bi realna i periodična funkcija $f(t)$ imala konvergentan *Fourier*-ov red, potrebno je da ispunjava *Dirichlet*-ove uslove koji se svode na to da unutar periode T funkcija mora da zadovoljava:

1) Da je funkcija $f(t)$ ograničena.
2) Da je funkcija $f(t)$ jednoznačna.
3) Da funkcija $f(t)$ ima konačan broj ekstremuma i konačan broj prekida prve vrste u jednom periodu.

Ako u kolu postoje odzivi koji su periodične funkcije vremena, ali nisu prostoperiodične, tada je reč o složenoperiodičnom režimu. U električnim kolima složenoperiodični režim može nastati u sledećim slučajevima:

1) Za linearno vremenski nepromenljivo kolo:
    a. ako deluje jedna ili više složenoperiodičnih pobuda.
    b. ako deluju više prostoperiodičnih pobuda različitih frekvencija.
2) Za kolo koje nije linearno i/ili vremenski invarijantno složenoperiodični režim može nastati i pri delovanju prostih ekscitacija.

Posmatramo linearno i vremenski nepromenljivo kolo u kome deluje jedna složena ekscitacija $e(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}e^{(n)}$ koja je ograničena po amplitudi i u jednom periodu ima konačan broj prekida prve vrste i konačan broj ekstremuma unutar periode T.

Srednja vrednost signala

$$E_0=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} e(t)\mathrm{d}t$$

Pojedinačne ekscitacije su:

$$e^{(n)}=\sqrt{2}E^{(n)}\cos\left(n\omega_1 t+\gamma^{(n)}\right)$$

gde je $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika.

Diferencijalna jednačina odziva po promenljivoj $i_l(t)$ je:

$$A(D)i_l(t) = B(D)e(t) = B(D)\left(E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(n)}\right)$$

Odziv određujemo principom superpozicije:

$$A(D)i_l^{(n)}(t) = B(D)e^{(n)}(t)\ ,$$

u kompleksnom režimu:

$$\underline{A}(\underline{S})\underline{I}_l^{(n)} = \underline{B}(\underline{S})\underline{E}^{(n)}$$

gde je $\underline{S} = jn\omega_1,\ n = 0,1,2, \ldots$

$$\underline{I}_l^{(n)} = \underline{T}(\underline{S})\underline{E}^{(n)} = I_l^{(n)} e_l^{j\psi^{(n)}}$$

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{\underline{B}(\underline{S})}{\underline{A}(\underline{S})}$$

Sada nađene kompleksne predstavnike prebacujemo u kompleksni domen.

$$i_l^{(0)} = I_l^{(0)}$$

$$n \geq 1:\ i_l^{(n)} = \sqrt{2} I_l^{(n)} \cos\left(n\omega_1 t + \psi^{(n)}\right)$$

$$i_l^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_l^{(n)}$$

Delovanje više ekscitacija (deluje više prostoperiodičnih pobuda različitih frekvencija)

Opšta jednačina odziva je

$$A(D)y(t) = \sum_{s=1}^{g} B_s(D)e_s(t)$$

$$y(t) = \sum_{s=1}^{g} y_s(t)$$

gde je $y_s(t)$ pojedinačni odziv na svaku od ekscitacija.

Primer: U kolu deluju dva generatora $u_g(t)$ i $i_g(t)$.

$$u_g(t) = U_0 + u^{(1)} + u^{(4)}$$
$$i_g(t) = i_g^{(2)} + i_g^{(3)}$$

Ukupan odziv će biti:

$$i_l(t) = i_l^{(0)} + i_l^{(1)} + i_l^{(2)} + i_l^{(3)} + i_l^{(4)}$$

Diferencijalna jednačina odziva je

$$A(D)i_l(t) = B_1(D)u_g(t) + B_2(D)i_g(t)$$

Sada nalazimo pojedinačne odzive:

$$n = 0: \qquad A(D)i_l^{(0)}(t) = B(D){u_g}^{(0)}(t)$$
$$a_0 I_l^{(0)} = b_{10}U_0$$
$$i_l^{(0)} = I_l^{(0)} = \frac{b_{10}}{a_0}$$
$$n = 1: \qquad \underline{A}(j\omega_1)\underline{I_l}^{(1)} = \underline{B_1}(j\omega_1){\underline{U_g}}^{(1)}$$
$$\underline{I_l}^{(1)} = I_l e^{j\psi_l^{(1)}}$$
$$i_l^{(1)} = \sqrt{2}I_l^{(1)}\cos\left(\omega_1 t + \psi_l^{(1)}\right)$$
$$n = 2: \quad \underline{A}(j2\omega_2)\underline{I_l}^{(2)} = \underline{B_2}(j2\omega_2){\underline{I_g}}^{(2)}$$

Pitanje 75.
Razvoj periodične funkcije u *Fourier*-ov red.

Da bi realna i periodična funkcija $f(t)$ imala konvergentan *Fourier*-ov red, potrebno je da ispunjava *Dirichlet*-ove uslove koji se svode na to da unutar periode T funkcija mora da zadovoljava:

1) Da je funkcija $f(t)$ ograničena.
2) Da je funkcija $f(t)$ jednoznačna.
3) Da funkcija $f(t)$ ima konačan broj ekstremuma i konačan broj prekida prve vrste u jednom periodu.

Fourier-ov red funkcije $f(t)$ dat je izrazom:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t), \qquad f^{(0)}(t) = F_0, \qquad f^{(n)}(t) = F_m^{(n)}\cos(n\omega_1 t + \varphi^{(n)})$$

gde su: F_0 – konstantan član, $f^{(n)}(t)$ – n-ta harmonijska komponenta (n-ti harmonik), $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija osnovnog harmonika, $n\omega_1$ – frekvencija n-tog harmonika.

Koeficient F_0 je srednja vrednost signala za vreme jedne periode:

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Ovakav oblik *Fourier*-ovog reda poznat je kao trigonometrijski oblik *Fourier*-ovog reda. Prostoperiodične funkcije $\cos(n\omega_1 t + \varphi^{(n)})$ mogu se, prema pravilu o kosinusu zbira, razložiti:

$$\cos\left(n\omega_1 t + \varphi^{(n)}\right) = \cos(n\omega_1 t)\cos\left(\varphi^{(n)}\right) - \sin(n\omega_1 t)\sin(\varphi^{(n)})$$

čime se *Fourier*-ov red može predstaviti u obliku:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n-1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)]$$

pri čemu je

$$A_n = C_m^{(n)}\cos\left(\varphi^{(n)}\right), \qquad B_n = C_m^{(n)}\sin\left(\varphi^{(n)}\right)$$

odnosno:

$$C_m^{(n)}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{B_n}{A_n}\right), & A_n > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{B_n}{A_n}\right) + \pi, & A_n < 0 \end{cases}$$

Koeficijent A_n predstavlja dvostruku srednju vrednost, za jednu periodu, proizvoda funkcije $f(t)$ i $\cos(n\omega_1 t)$:

$$\begin{aligned} f(t)\cos(n\omega_1 t) &= \\ &= A_0\cos(n\omega_1 t) + A_n\cos^2(n\omega_1 t) + \left(\sum_{m=1,m\neq n}^{\infty} A_m\cos(m\omega_1 t)\right)\cos(n\omega_1 t) \\ &+ \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\omega_1 t)\right)\cos(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{T}\int_0^T A_n \cos^2(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t + 0 + 0 \\
&= \frac{1}{2T}A_n \int_0^T \mathrm{d}t + \frac{1}{2T}A_n \int_0^T \cos(2n\omega_1 t) \\
&= \frac{A_n}{2} + 0 = \frac{A_n}{2}.
\end{aligned}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

Koeficijent B_n predstavlja dvostruku srednju vrednost, za jednu periodu, proizvoda funkcije $f(t)$ i $\sin(n\omega_1 t)$:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$