Pitanje 16.

Neprekidnost napona kondenzatora.

Karakteristika linearnih kondenzatora je

$$C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} =^{*} \frac{Q}{U}$$

* – jer se karakteristika i tangenta na karakteristiku i radnoj tački poklapaju.

Struja kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

a za linearan kondenzator će biti

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}[C(t)u(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}u(t) + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Ako je kondenzator i *vremenski nepromenljiv* važi

$$(\forall t)\ C = C(t) = C_0 = const,$$

i tada je

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Napon kondenzatora

početni uslov: $u(t_0) = U_0$

za $t > t_0$: $u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = U_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$

Teorema o neprekidnosti napona kondenzatora

Ako je struja linearnog i vremenski nepromenljivog kondenzatora ograničena u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$ tada je napon kondenzatora neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Dokaz:

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Opterećenje kondenzatora je

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$q(t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau=q(t)+\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Zaključujemo da je priraštaj opterećenja:

$$\Delta \mathrm{q}(\mathrm{t})= q(t+\Delta t)-q(t)=\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta \mathrm{t}\to 0} \Delta \mathrm{q}(\mathrm{t})=0$$

u intervalu (t_1, t_2) u kome je struja kondenzatora ograničena, jer površina koja je određena integralom

$$\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)\mathrm{d}\tau=\Delta \mathrm{q}(\mathrm{t})\rightarrow 0, \qquad (\Delta \mathrm{t}\rightarrow 0)$$

dok je priraštaj napona

$$\Delta \mathrm{u}(\mathrm{t})=u(t+\Delta \mathrm{t})-\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

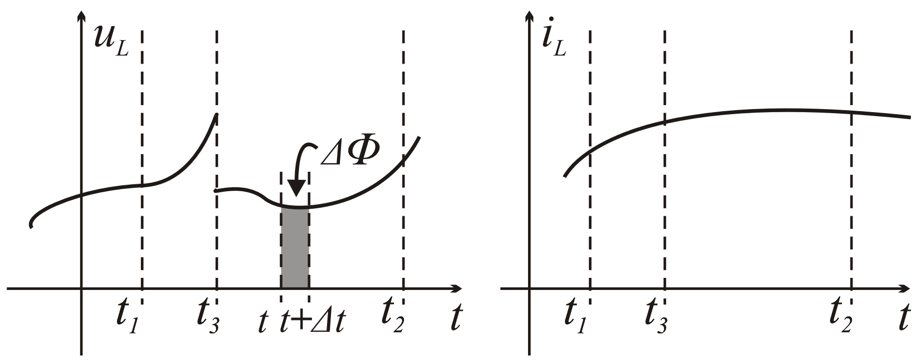
$$\Delta \mathrm{u}(\mathrm{t})=U_0+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta \mathrm{t}} i(\tau)\mathrm{d}\tau-U_0-\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta \mathrm{t}} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Delta \mathrm{u}(\mathrm{t})=\frac{1}{\mathrm{C}}\Delta \mathrm{q}(\mathrm{t})\,.$$

Zaključujemo:

$$\lim_{\Delta \mathrm{t}\to 0} \Delta \mathrm{u}(\mathrm{t})=0,$$

odnosno, struja kondenzatora može imati skokove (uslov je samo da bude ograničena), ali je napon kondenzatora neprekidna funkcija vremena.



Pitanje 17.

Memorisanje napona kondenzatora

Memorisanje napona kondenzatora iskazuje sposobnost kondenzatora da akumuliše energiju.

Ukoliko u trenutku t_0 „isključimo kondenzator iz mreže“, odnosno, ako je $i_C(t) = 0$, za $t \geq t_0$ tada će napon kondenzatora zadržati svoju vrednost koju je imao u trenutku t_0, tj. $u_C(t) = u_C(t_0)$ za svako $t \geq t_0$.

Dokaz:

$$t < t_0: \qquad u_C(t) = u(t)$$

$$t \geq t_0: \quad u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau = u_C(t_0),$$

jer je $i_C(t) = 0 \; za \; t \geq t_0$

Pitanje 18.

Neprekidnost struje kalema

Karakteristika *linearnog kalema* je:

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} =^* \frac{\Phi}{I}$$

* – jer se karakteristika i tangenta na karakteristiku i radnoj tački poklapaju.

Napon kalema je

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t},$$

a za linearan kalem će biti

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}[L(t)i(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}i(t) + L(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Ako je kalem i vremenski nepromenljiv važi

$$(\forall t)L \ = \ L(t) \ = \ L_0 = const,$$

i tada je

$$u(t) = \ L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Struja kalema

početni uslov: $i(t_0) = I_0$

za $t > t_0$: $i(t) = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t_0} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = I_0 + \frac{1}{L}\int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$

Teorema o neprekidnosti struje kalema

Ako je napon linearnog i vremenski nepromenljivog kalema ograničen u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$ tada je struja kalema neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Dokaz:

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Fluks kalema je

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Phi(t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \Phi(t) + \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Zaključujemo da je priraštaj fluksa:

$$\Delta\Phi(\mathrm{t}) = \ \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \Delta\Phi(\mathrm{t}) = 0$$

u intervalu (t_1, t_2) u kome je napon kalema ograničen, jer površina koja je određena integralom

$$\int_{t}^{t+\Delta t} u(\tau)d\tau = \Delta\Phi(\mathrm{t}) \to 0, \quad \Delta \mathrm{t} \to 0,$$

dok je priraštaj struje

$$\Delta i(t) = i(t+\Delta \mathrm{t}) - i(t)$$

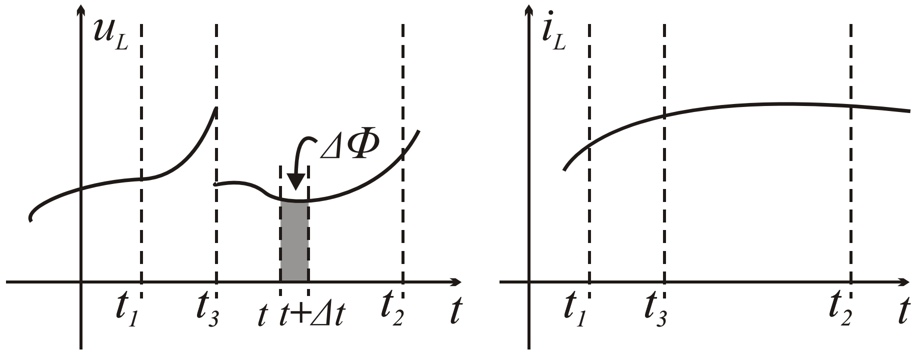
$$\Delta i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta \mathrm{t}} u(\tau)\mathrm{d}\tau - I_0 - \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{t}^{t+\Delta \mathrm{t}} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Delta i(t) = \frac{1}{L}\Delta\Phi(t)$$

Zaključujemo:

$$\lim_{\Delta \mathrm{t}\to 0} \Delta i(t) = 0,$$

odnosno, napon kalema može imati skokove (uslov je samo da bude ograničen), ali je struja kalema neprekidna funkcija vremena.



Pitanje 19.
Memorisanje struje kalema.

Memorisanje struje kalema iskazuje sposobnost kalema da akumuliše energiju.

Ukoliko u trenutku t_0 „isključimo kalem iz mreže“, odnosno, ako je $u_L(t) = 0$, za $t \geq t_0$ tada će struja kalema zadržati svoju vrednost koju je imala u trenutku t_0, tj. $i_L(t) = i_L(t_0)$ za svako $t \geq t_0$.

Dokaz:

$$t < t_0: \qquad i_L(t) = i(t)$$

$$t \geq t_0: \quad i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau = i_L(t_0),$$

jer je $u_L(t) = 0$ za $t \geq t_0$.

Pitanje 20.

Elementi sa više pristupa. Opšta svojstva.

Za element sa više pristupa, npr. k krajeva, uvodimo referentni čvor.

Čvor k uzmemo za referentni, odnosno $V_k = 0$.

Za ovaj element možemo pisati *Kirchhof*-ove relacije:

$$u_{12} + u_{23} + \ldots + u_{k-1k} + u_{k1} = 0$$
$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_k - 1 - i_k = 0$$

Ovaj element ima $k - 1$ nezavisnih pristupa i $2(k - 1)$ nezavisnih veličina ($k - 1$ napon i $k - 1$ struju).

Pristupe ovom elementu nazivamo pristupi sa zajedničkim krajem.

Element možemo vezati tako da pristupi nemaju zajednički priključak. U tom slučaju kažemo da su pristupi izolovani. Ako je k parno onda element ima $k/2$ izolovanih pristupa.

Važi:

$$i_1 = i_2$$
$$i_3 = i_4$$
$$\vdots$$

Ako se posmatra idealizovan element (u smislu njegovog fizičkog ponašanja) on je opisan algebarskim relacijama između ulaznih i izlaznih veličina

$$x_i, y_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

Zavisno od prirode ovih velicina vrsi se podela ovih elemenata na

1) ***rezistivne*** ($x_i = u, y_j = i$)
2) ***induktivne*** ($x_i = \Phi, y_j = i$) i
3) ***kapacitivne*** ($x_i = q, y_j = u$)

Karakteristika elementa je data sistemom algebarskih jednačina po x_i, y_j, s tim da jednačine mogu zavisiti i od vremena:

$$F_1(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k;\ t) = 0$$
$$F_2(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k;\ t) = 0,$$
$$\ldots,$$
$$F_k(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k;\ t) = 0$$

Prema obliku algebarskih jednačina elementi mogu biti *linearni* i *nelinearni*, a prema zavisnosti od vremena, elementi su *vremenski promenljivi* ili *nepromenljivi*.

Ulazna snaga elementa sa q pristupa jednaka je zbiru svih ulaznih snaga pojedinačnih pristupa:

$$p = \sum_{j=1}^{q} p_j = \sum_{j=1}^{q} u_j i_j$$

Uslov za pasivnost elementa sa više pristupa je

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0,$$

pri čemu je $w(t_0)$ akumulirana energija elementa u proizvoljnom trenutku t_0, a $a(t_0, t)$ je električni rad koji se, spolja, ulaže u element od trenutka t_0 do proizvoljnog trenutka $t \geq t_0$:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga elementa dobijena kao suma ulaznih snaga svakog od pristupa.

Pitanje 21.

Rezistivni elementi sa dva pristupa.

Karakteristika rezistivnih elemenata je opisana algebarskim relacijama između napona i struja na pristupima elemenata.

Za elemente sa dva pristupa karakteristika je data sa

$$F_1(u_1, i_1, u_2, i_2;\ t) = 0$$
$$F_2(u_1, i_1, u_2, i_2;\ t) = 0$$

Ne računajući vreme postoji $\binom{4}{2} = 6$ različitih načina za eksplicitno predstavljanje ovih jednačina.

Strujno kontrolisano predstavljanje:

$$u_1 = r_1(i_1, i_2; t)$$
$$u_2 = r_2(i_1, i_2; t)$$

Naponski kontrolisano predstavljanje:

$$i_1 = g_1(u_1, u_2; t)$$
$$i_2 = g_2(u_1, u_2; t)$$

Prvo hibridno predstavljanje:

$$u_1 = h_1(i_1, u_2, t)$$
$$i_2 = h_2(i_1, u_2, t)$$

Drugo hibridno pretstavljanje:

$$i_1 = k_1(u_1, i_2, t)$$
$$u_2 = k_2(u_1, i_2, t)$$

Prvo prenosno predstavljanje:

$$u_1 = a_1(u_2, i_2', t)$$
$$i_1 = a_2(u_2, i_2', t)$$

gde je $i_2' = -i_2$.

Drugo prenosno predstavljanje:

$$u_2 = b_1(u_1, i_1, t)$$
$$i_2' = b_2(u_1, i_1, t)$$

gde je $i_2' = -i_2$.

Pitanje 22.
Linearni rezistivni elementi sa dva pristupa.

Strujno kontrolisano predstavljanje:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

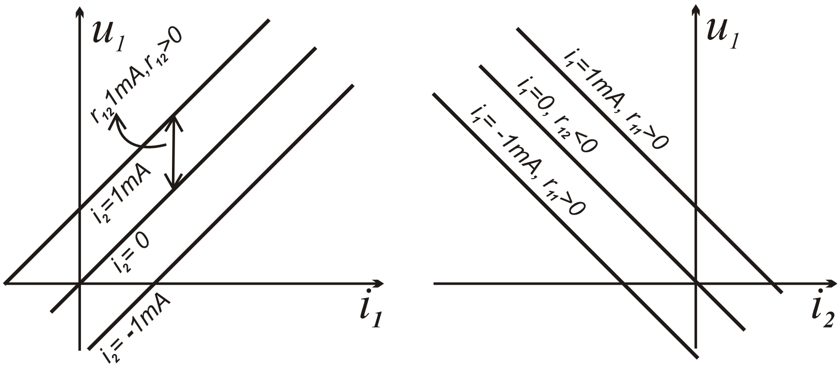
Koeficijenti r_{ij} nazivaju se rezistanse (rezistivni parametri), a određujemo ih na sledeći način:

$$r_{11} = \frac{u_1}{i_1}|_{i_2=0} = R_{ul1}|_{i_2=0}$$
$$r_{12} = \frac{u_1}{i_2}|_{i_1=0}$$

gde se r_{11} i r_{12} nazivaju ulazna i prenosna otpornost prvog pristupa.

$$r_{21} = \frac{u_2}{i_1}|_{i_2=0}$$
$$r_{22} = \frac{u_2}{i_2}|_{i_1=0} = R_{ul2}|_{i_1=0}$$

gde se r_{22} i r_{21} nazivaju ulazna i prenosna otpornost drugog pristupa. r_{12} i r_{21} se još nazivaju i transrezistanse.



Važi:

$$[u] = [r] \cdot [i],$$

gde su $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$, $[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$.

Naponski kontrolisano predstavljanje:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ i_2 &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{aligned}$$

Koeficijenti g_{ij} nazivaju se konduktanse, dok se g_{12} i g_{21} nazivaju još i transkonduktanse, a određujemo ih na sledeći način:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{i_1}{u_1}|_{u_2=0} = G_{ul1}|_{u_2=0} \neq \frac{1}{r_{11}} \\ g_{12} &= \frac{i_1}{u_2}|_{u_1=0} \\ g_{21} &= \frac{i_2}{u_1}|_{u_2=0} \\ g_{22} &= \frac{i_2}{u_2}|_{u_1=0} = G_{ul2}|_{u_1=0} \neq \frac{1}{r_{22}} \end{aligned}$$

Važi:

$$[i] = [g] \cdot [u],$$

gde su $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$, $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

Ako postoje $[r]$ i $[g]$ važiće $[g] = [r]^{-1} = \frac{1}{\det[r]}\operatorname{adj}[r]$, dakle,

$$[g] = \frac{1}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}}\begin{bmatrix} r_{22} & -r_{21} \\ -r_{12} & r_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

zaključujemo da je

$$g_{11} = \frac{r_{22}}{r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}} \neq \frac{1}{r_{11}} \ (*)$$

Slično se može zaključiti i za g_{22}.

Prvo hibridno predstavljanje:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}i_2$$
$$u_2 = h_{21}i_1 + h_{22}i_2$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1}|_{u_2=0} = R_{ul1}|_{i_2=0} = \frac{1}{g_{11}} \neq r_{11}$$
$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2}|_{i_1=0}$$
$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}|_{u_2=0}$$
$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2}|_{i_1=0} = G_{ul2}|_{i_1=0} = \frac{1}{r_{22}} \neq g_{22}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Drugo hibridno predstavljanje:

$$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2$$
$$i_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$k_{11} = \frac{i_1}{u_1}|_{i_2=0} = G_{ul1}|_{i_2=0} = \frac{1}{r_{11}} \neq g_{11}$$
$$k_{12} = \frac{i_1}{i_2}|_{u_1=0}$$
$$k_{21} = \frac{u_2}{u_1}|_{i_2=0}$$

$$k_{22} = \frac{u_2}{i_2}|_{u_1=0} = R_{ul2}|_{u_1=0} = \frac{1}{gr_{22}} \neq r_{22}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje $[h]$ i $[k]$ važiće $[k] = [h]^{-1} = \frac{1}{\det[h]}\mathrm{adj}[h]$

Prvo prenosno predstavljanje:

$$u_1 = a_{11}i_1 + a_{12}(-i_2)$$
$$u_2 = a_{21}i_1 + a_{22}(-i_2)$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$a_{11} = \frac{u_1}{u_2}|_{i_2=0}$$
$$a_{12} = -\frac{u_1}{i_2}|_{u_2=0}$$
$$a_{12} = \frac{i_1}{u_2}|_{i_2=0}$$
$$a_{22} = -\frac{i_1}{i_2}|_{u_2=0}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}.$$

Drugo prenosno predstavljanje:

$$u_2 = b_{11}u_1 + b_{12}i_1$$
$$-i_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_1$$

Koeficijente određujemo na sledeći način:

$$b_{11} = \frac{u_2}{u_1}|_{i_1=0}$$
$$b_{12} = \frac{u_2}{i_1}|_{u_1=0}$$
$$b_{12} = -\frac{i_2}{u_1}|_{i_1=0}$$
$$b_{22} = -\frac{i_2}{i_1}|_{u_1=0}$$

Važi:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje $[a]$ i $[b]$ važiće $[b] = [a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]}\operatorname{adj}[a]$.

Pitanje 23.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena r-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa, 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

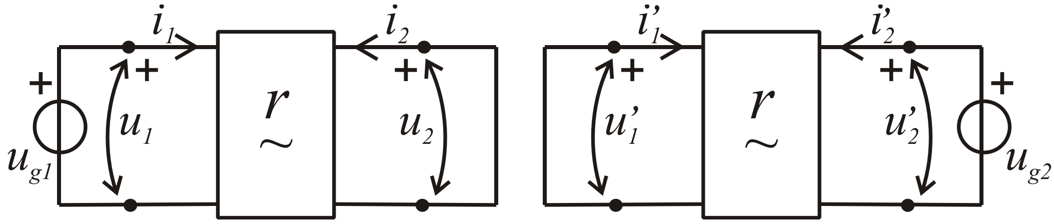
1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen r-parametrima je

$$\boldsymbol{r_{12} = r_{21}}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.



$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi

$$i_1' = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa strujno kontrolisano predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \qquad (\mathbf{3})$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2, \;\; u_2 = 0 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1{}' = r_{11}i_1{}' + r_{12}i_2{}', \;\; u_1{}' = 0 \qquad (\mathbf{5})$$
$$u_2{}' = r_{21}i_1{}' + r_{22}i_2{}' \qquad (\mathbf{6})$$

Iz $(\mathbf{4})$ sledi:

$$r_{21}i_1 = -r_{22}i_2 \Rightarrow i_1 = -\frac{r_{22}}{r_{21}}i_2 \qquad (\mathbf{7})$$

Iz $(\mathbf{5})$ sledi:

$$r_{11}i_1' = -r_{12}i_2{}' \qquad (\mathbf{8})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ u $(\mathbf{8})$ dobija se:

$$i_2' = -k\frac{r_{11}}{r_{12}}i_2 \qquad (\mathbf{9})$$

Iz $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{6})$ sledi:

$$r_{21}i_1' + r_{22}i_2' = k\, r_{11}i_1 + k\, r_{12}i_2 \qquad (\mathbf{10})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$, $(\mathbf{9})$ i $(\mathbf{7})$ u $(\mathbf{10})$ dobija se:

$$r_{21}ki_2 - r_{22}k\frac{r_{11}}{r_{12}}i_2 = -k\, r_{11}\frac{r_{22}}{r_{21}}i_2 + k\, r_{12}i_2$$

Sada ćemo celu prethodnu jednačinu podeliti sa ki_2 posle čega dobijamo:

$$r_{21} - r_{22}\frac{r_{11}}{r_{12}} = -r_{11}\frac{r_{22}}{r_{21}} + r_{12}$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$\frac{r_{21}r_{12} - r_{22}r_{11}}{r_{12}} = \frac{r_{21}r_{12} - r_{22}r_{11}}{r_{21}}$$

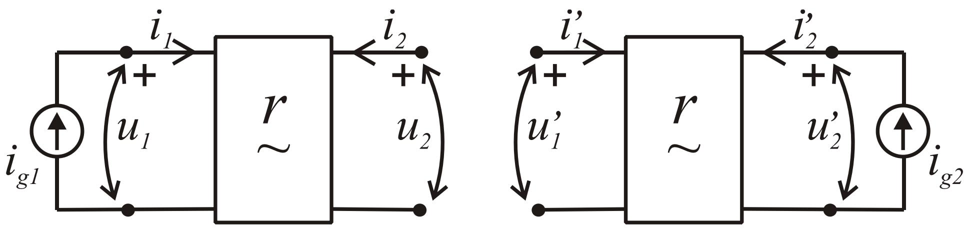
Sledi:

$$\boldsymbol{r_{12} = r_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Na osnovu prethodne relacije sledi da je recipročan rezistivan element opisan sa svoja tri parametra: $r_{11}, r_{22}, r_{12}\ (= r_{21})$.

***Dokaz*:** (za drugi slučaj)



$$i_{g2} = k i_{g1}$$

Odnosno:

$$i_2' = k i_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$u_1' = k u_2 \qquad (\mathbf{2})$$

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2, \qquad i_2 = 0 \Longrightarrow\ u_1 =\ r_{11} i_1 \qquad (\mathbf{3})$$
$$u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2, \qquad i_2 = 0 \Longrightarrow u_2 = r_{21}\, i_1 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1' = r_{11} i_1' + r_{12} i_2', \qquad i_1' = 0 \Longrightarrow\ i_2{}' =\ u_1'/\mathrm{r}_{12} \qquad (\mathbf{5})$$
$$u_2' = r_{21} i_1' + r_{22} i_2', \qquad i_1' = 0\ \Longrightarrow u_2' = r_{22}\, i_2' \qquad (\mathbf{6})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{4})$ sledi:

$$u_2\ =\ r_{21} \frac{i_2'}{k}$$

Pa uvrštavanjem $(\mathbf{5})$ u prethodnu dobijamo:

$$u_2 = r_{21} \frac{1}{k} \frac{\mathrm{u}_1'}{\mathrm{r}_{12}}$$

Konačno uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ dobija se:

$$u_2 = r_{21} \frac{1}{k} \frac{k u_2}{\mathrm{r}_{12}}$$

Sledi:

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{21}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 24.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena g-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa, 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen g-parametrima je

$$\boldsymbol{g}_{12} = \boldsymbol{g}_{21}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \quad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i_1' = ki_2 \quad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa naponski kontrolisano predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow i_1 = g_{11}u_1 \\ i_2 &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow i_2 = g_{21}\,u_1 \qquad (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

za kolo sa slike 2:

$$\begin{aligned} i_1' &= g_{11}u_1' + g_{12}u_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow i_1' = g_{12}u_2' \qquad (\mathbf{4}) \\ i_2' &= g_{21}u_1' + g_{22}u_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow i_2' = g_{22}\,u_2' \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{4})$ i $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{2})$ dobija se:

$$g_{12}u_2' = kg_{21}i_1$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u prethodnu jednačinu:

$$g_{12}ku_1 = kg_{21}i_1$$

Sledi:

$$\boldsymbol{g_{12} = g_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 25.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{h}$-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen $\boldsymbol{h}$-parametrima je

$$\boldsymbol{h_{12} = -h_{21}}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulirane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u'_2 = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i'_1 = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa prvo hibridno predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = h_{11}i_1 \qquad (\mathbf{3})$$
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow i_2 = h_{21}\, i_1 \qquad (\mathbf{4})$$

za kolo sa slike 2:

$$u_1' = h_{11}i_1' + h_{12}u_2', \qquad u_1' = 0 \Longrightarrow \; h_{11}i_1' = \; -h_{12}u_2' \qquad (\mathbf{5})$$
$$i_2' = h_{21}i_1' + h_{22}u_2'$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{2})$ i $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{5})$ dobijamo

$$h_{11}ki_2 = -h_{12}ku_1$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u prethodnu jednačinu dobijamo

$$h_{11}kh_{21}i_1 = -h_{12}kh_{11}i_1$$

Sledi:

$$\boldsymbol{h_{12}} = \; -\boldsymbol{h_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 26.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{k}$-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u_{gk}' = \; ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i_l' = \; ki_k$, gde je $k \; = \; const.$

2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i_{gk}' = \; ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u_l' = \; ku_k$, gde je $k = const.$

3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i_{gk}' vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i_l' u grani l. Ako je $i_{gl}' = \; Gu_{gl}$ tada će biti $i_l' = \; -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen $\boldsymbol{k}$-parametrima je

$$\boldsymbol{k_{12}} = \; -\boldsymbol{k_{21}}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulisane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u_2' = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi

$$i_1' = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa drugo hibridno predstavljanje predstavljanje karakteristika glasi

za kolo sa slike 1:

$$\begin{aligned} i_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}i_2 \\ u_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}i_2, \qquad u_2 = 0 \Rightarrow k_{21}u_1 = -k_{22}\, i_2 \quad (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

za kolo sa slike 2:

$$\begin{aligned} i_1' &= k_{11}u_1' + k_{12}i_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow i_1' = k_{12}i_2' \qquad (\mathbf{4}) \\ u_2' &= k_{21}u_1' + k_{22}i_2', \qquad u_1' = 0 \Rightarrow \mathrm{u}_2' = \mathrm{k}_{22}\mathrm{i}_2' \qquad (\mathbf{5}) \end{aligned}$$

uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ i $(\mathbf{2})$ u $(\mathbf{3})$ dobijamo:

$$k_{21}\frac{u_2'}{k} = -k_{22}\frac{i_1'}{k}$$

uvrštavanjem $(\mathbf{4})$ i $(\mathbf{5})$ u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$k_{21}\frac{k_{22}i_2'}{k} = -k_{22}\frac{k_{12}i_2'}{k}$$

Sledi:

$$\boldsymbol{k_{12} = -k_{21}}$$

što je i trebalo dokazati.

Pitanje 27.

Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena a-parametrima.

U opštem slučaju linearnih rezistivnih elemenata sa 2 pristupa 4 parametra (koeficijenta) koji karakterišu element su nezavisni. Za recipročne elemente pokazaćemo da su 3 parametra nezavisna.

Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo

Za linearno, vremenski nepromenljivo kolo (mrežu) kažemo da je recipročna ako je u važnosti jedan od sledećih slučajeva:

1) Ako u grani l deluje generator napona u_{gl} koji u grani k izaziva struju i_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora napona $u'_{gk} = ku_{gl}$ u granu k, struja grane l iznosi $i'_l = ki_k$, gde je $k = const.$
2) Ako između čvorova $i - j$ grane l deluje strujni generator i_{gl}, koji na krajevima grane k (između čvorova $m - n$) izaziva napon u_k, tada isključivanjem tog generatora, a stavljanjem generatora struje $i'_{gk} = ki_{gl}$ između čvorova $m - n$, napon između čvorova $i - j$ (napon grane l) biće $u'_l = ku_k$, gde je $k = const.$
3) ako naponski generator u_{gl}, koji deluje u grani l stvara napon u_k između čvorova $m - n$, tada će strujni generator i'_{gk} vezan između čorova $m - n$ izazvati struju i'_l u grani l. Ako je $i'_{gl} = Gu_{gl}$ tada će biti $i'_l = -Gu_k$, gde je G proizvoljna konstanta sa dimenzijom provodnosti.

Uslov recipročnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen a-parametrima je

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{a}] = \mathbf{1}$$

Dokaz: (za prvi slučaj)

U kolu nema akumulisane energije i nijedan drugi generator. Posmatramo *samo jedan* recipročan rezistivan element sa dva pristupa.

$$u_{g2} = ku_{g1}$$

Odnosno:

$$u'_2 = ku_1 \qquad (\mathbf{1})$$

Element je recipročan pa važi:

$$i'_1 = ki_2 \qquad (\mathbf{2})$$

Za rezistivan element sa dva pristupa prvo prenosno predstavljanje karakteristika glasi *za kolo sa slike 1:*

$$u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}(-i_2), \qquad u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -a_{12}\, i_2 \qquad (\mathbf{3})$$
$$i_1 = a_{21}u_2 + a\_22(-i_2)$$

za kolo sa slike 2:

$$u'_1 = a_{11}u'_2 + a_{12}(-i'_2), \qquad u'_1 = 0 \Rightarrow a_{11}\, u'_2 = a_{12}i'_2 \Rightarrow i'_2 = u'_2\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (\mathbf{4})$$
$$i'_1 = a_{21}u'_2 + a_{22}(-i'_2) \qquad (\mathbf{5})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{3})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo:

$$u'_2 = -k\, a_{12}i_2 \qquad (\mathbf{6})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{6})$ u $(\mathbf{4})$ dobijamo:

$$i'_2 = -ka_{11}i_2 \qquad (\mathbf{7})$$

Konačno uvrštavanjem $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{6})$ i $(\mathbf{7})$ u $(\mathbf{5})$ dobijamo:

$$ki_2 = -a_{21}ka_{12}i_2 + a_{22}ka_{11}i_2$$

Deljenjem prethodne jednačine sa ki_2 sledi:

$$\mathbf{det}[\boldsymbol{a}] = \mathbf{1}$$

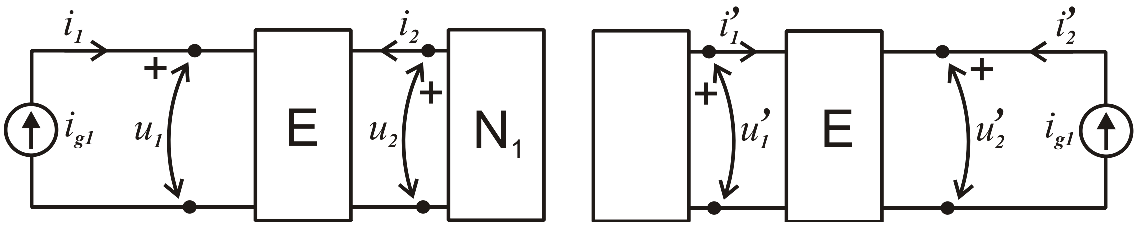
što je i trebalo dokazati.

Pitanje 28.

Simetrični rezistivni elementi sa dva pristupa.

Simetričan rezistivan element sa dva pristupa predstavlja užu klasu recipročnih elemenata. Oni se pri istim uslovima rada identično ponašaju bez obzira na redosled vezivanja njihovih pristupa.

Posmatrajmo jedan recipročan element sa dva para krajeva vezan u kolo na sledeće načine:



Kolo sa slike 1: na pristupu 1 deluje strujni generator i_{g1}, a pristup 2 je zatvoren mrežom sa jednim pristupom, N.

Kolo sa slike 2: na pristupu 2 deluje strujni generator $i'_{g2} = i_{g1}\ (i'_2 = i_1)$, a pristup 1 je zatvoren već pomenutom mrežom N.

Za simetričan element biće ispunjeno:

$$u_2' = u_1$$
$$u_1' = u_2$$
$$i_1' = i_2$$

Uslov simetričnosti za linearne rezistivne elemente sa dva pristupa izražen njegovim parametrima glasi:

$$\boldsymbol{r_{11} = r_{22}}$$
$$\boldsymbol{g_{11} = g_{22}}$$
$$\boldsymbol{det\,[h] = 1}$$
$$\boldsymbol{det[k] = 1}$$
$$\boldsymbol{a_{11} = a_{22}}$$
$$\boldsymbol{b_{11} = b_{22}}$$

Zaključujemo, pošto je simetričan element istovremeno i recipročan, da simetrični rezistivni elementi sa dva pristupa imaju samo dva nezavisna parametra.

Pitanje 29.
Pasivnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa.

Opšti uslov pasivnosti glasi:

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako su rezistivni elementi elementi bez memorije (ne akumulišu energiju) imamo da je

$$W(t_0) = 0,$$

pa se pasivnost svodi na uslov

$$a(t_0, t) \geq 0$$

za bilo koje t_0 i $t > t_0$.

Uložena energija u rezistivni element od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određena je opštom relacijom:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u(\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Vidimo da mora da važi:

$$p(t) = u(t)i(t) \geq 0,$$

s tim da je ovde trenutna ulazna snaga elementa jednaka sumi ulaznih snaga na pristupima 1 i 2:

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t),$$

ako su smerovi napona i struja usaglašeni.

U slučaju linearnih elemenata uslov pasivnosti se može izraziti pomoću odgovarajućih parametara koji opisuju element. Za r-parametre važi:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (r_{11}i_1 + r_{12}i_2)i_1 + (r_{21}i_1 + r_{22}i_2)i_2$$

Uslov pasivnosti je:

$$r_{11}i_1^2 + (r_{12} + r_{21})i_1 i_2 + r_{22}i_2^2 \geq 0$$

odnosno,

$$r_{11}i_2^2\left[x^2 + \frac{x(r_{12} + r_{21})}{r_{11}} + \frac{r_{22}}{r_{11}}\right] \geq 0$$

gde je $x = \frac{i1}{i2}$.

Neka je

$$f(x) = x^2 + \frac{x(r_{12} + r_{21})}{r_{11}} + \frac{r_{22}}{r_{11}}$$

Uslov pasivnosti je onda zadovoljen u dva slučaja:

1) $r_{11} \geq 0$ i $f(x) \geq 0$
2) $r_{11} \leq 0$ i $f(x) \leq 0$ (a ovo ne može biti zadovoljeno jer je koeficijent uz x^2 pozitivan)

Prema tome:

$$f(x) \geq 0 \implies D \leq 0 \implies \left(\frac{r_{12} + r_{21}}{r_{11}}\right)^2 - 4\frac{r_{22}}{r_{11}} \leq 0$$

Pa zaključujemo da mora važiti:

$$r_{11} \geq 0 \text{ i } 4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2 \implies r_{22} \geq 0.$$

Relaciju

$$4r_{11}r_{22} \geq (r_{12} + r_{21})^2$$

možemo napisati u obliku

$$4\det[r] \geq (r_{12} - r_{21})^2$$

Za uslov pasivnosti dobijamo:

$$\boldsymbol{r_{11} \geq 0}, \qquad \boldsymbol{r_{22} \geq 0}, \qquad \mathbf{det}[\boldsymbol{r}] \geq (\boldsymbol{r_{12} - r_{21}})^2$$

Za recipročne elemente važi:

$$r_{12} = r_{21}$$

pa za uslov pasivnosti dobijamo:

$$\boldsymbol{r_{11} \geq 0}, \qquad \boldsymbol{r_{22} \geq 0}, \qquad \mathbf{det}\,[\boldsymbol{r}] \geq \mathbf{0}$$

Slično, preko ostalih parametara, uslov pasivnosti glasi:

1) $g_{11} \geq 0,\ \ g_{22} \geq 0,\ \ \det[g] \geq (g_{12} - g_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[g] \geq 0$
2) $h_{11} \geq 0,\ \ h_{22} \geq 0,\ \ \det[h] \geq (h_{12} - h_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[h] \geq 0$
3) $k_{11} \geq 0,\ \ k_{22} \geq 0,\ \ \det[k] \geq (k_{12} - k_{21})^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $\det[k] \geq 0$
4) $\frac{a_{11}}{a_{21}} \geq 0,\ \ \frac{a_{22}}{a_{21}} \geq 0,\ \ 4a_{11}a_{22} \geq (1 + \det[a])^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $a_{11}a_{22} \geq 1$
5) $\frac{b_{11}}{b_{21}} \geq 0,\ \ \frac{b_{22}}{b_{21}} \geq 0,\ \ 4b_{11}b_{22} \geq (1 + \det[b])^2$, za recipročne elemente ovo se svodi na $b_{11}b_{22} \geq 1$

Pitanje 30.

Kontrolisani generator.

Kontrolisani generatori su rezistivni elementi sa dva pristupa koji se na izlaznim krajevima ponašaju kao generatori (naponski ili strujni), ali vrednost napona odnosno struje tih generatora nije nezavisna već je određena ulaznom veličinom (naponom ili strujom).

$$\begin{aligned} &y = kx \\ &x \in \{u_1, i_1\} \\ &y \in \{u_2, i_2\} \end{aligned}$$

Naponski generator kontrolisan strujom (transrezistansni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = r_0 \, i_1$$

Karakteristike možemo predstaviti r-parametrima:

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna i izlazna otpornost elementa su jednake nuli - na ulazu se i fizički ponaša kao kratak spoj, a na izlazu kao naponski generator.

Karakteristike možemo predstaviti a-parametrima:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice r-parametara *uslov recipročnosti* je $r_{12} = r_{21}$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Na osnovu matrice *r*-parametara *uslov pasivnosti* je

$$r_{11} \geq 0, \qquad r_{22} \geq 0, \qquad \det[r] \geq (r_{12} - r_{21})^2$$

prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Strujni generator kontrolisan naponom (transkonduktansni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$i_1 = 0$$
$$i_2 = \gamma \, u_1$$

Karakteristike možemo predstaviti g-parametrima:

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna i izlazna provodnost elementa su jednake nuli, odnosna ulazna i izlazna otpornost su beskonačne.

Karakteristike možemo predstaviti a-parametrima:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -1/\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice g-parametara uslov recipročnosti je $g_{12} = g_{21}$, pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Na osnovu matrice g-parametara uslov pasivnosti je

$$g_{11} \geq 0, \qquad g_{22} \geq 0, \qquad \det[g] \geq (g_{12} - g_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan. Isto zaključujemo i iz matrice a-parametara.

Strujni generator kontrolisan strujom (strujni pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$u_1 = 0$$
$$i_2 = \nu i_1$$

Karakteristike možemo predstaviti h-parametrima:

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nu & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna otpornost i izlazna provodnost elementa su jednake jednake nuli, odnosna izlazna otpornost je beskonačna.

Na osnovu matrice h-parametara uslov recipročnosti je $h_{12} = -h_2$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan.

Na osnovu matrice h-parametara uslov pasivnosti je

$$h_{11} \geq 0, \qquad h_{22} \geq 0, \qquad \det[h] \geq (h_{12} - h_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan.

Naponski generator kontrolisan naponom(naponski pojačavač)

Karakteristike elementa su:

$$i_1 = 0$$
$$u_2 = \mu\, u_1$$

Karakteristike možemo predstaviti k-parametrima:

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Ulazna otpornost elementa je beskonačna, a izlazna je jednaka nuli.

Na osnovu matrice k-parametara uslov recipročnosti je $k_{12} = -k_{21}$ pa zaključujemo da ovaj element nije recipročan.

Na osnovu matrice k-parametara uslov pasivnosti je:

$$k_{11} \geq 0, \qquad k_{22} \geq 0, \qquad \det[k] \geq (k_{12} - k_{21})^2$$

Prva dva uslova su zadovoljena, ali treći nije, pa zaključujemo da je ovaj element aktivan.

Pitanje 31.
Operacioni pojačavač i osnovna kola sa operacionim pojačavačima.

Operacioni pojačavač (OP) je naponski generator kontrolisan naponom, pa su njegove karakteristike

$$i_1 = 0$$
$$u_2 = \mu\, u_1$$
$$R_{ul} = \infty$$
$$R_{iz} = 0$$

Karakteristika *idealnog* operacionog pojačavača je $\mu \to \infty$, odnosno pojačanje je veoma veliko (teoretski je beskonačno). Kod takvog pojačavača svakom konačnom izlaznom naponu $u_2 \neq 0$, odgovara ulazni napon vrednosti

$$u_1 = \frac{u_2}{\mu}|_{\mu \to \infty} \to 0\,.$$

Kako je $u_1 = 0$ odlika kratkog spoja prikljucaka 1 i $1'$ to se za ulazne prikljucke OP-a kaze da su virtuelno kratkospojeni.