Pitanje 46.
Formiranje osnovnih jednačina linearnih električnih kola.

Analiza električnih kola podrazumeva određivanje odziva (struja i napona). Pod ekscitacijom podrazumevamo struje i napone generatora, a akumulisane energije predstavljaju početne uslove. Oni su definisani kao struje kalemova i naponi kondenzatora. $i_{Lj}(t_0)$, $u_{Cj}(t_0)$.

Za kolo kome odgovara povezan graf sa b grana i c čvorova osnovne jednačine kola su oblika

$$(KZS) \qquad \sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l = 0\,; \qquad k = 1, 2, \dots, n; \qquad n = c - 1$$

$$(KZN) \qquad \sum_{l=1}^{b} b_{kl} u_l = 0; \qquad k = 1, 2, \dots, m; \qquad m = b - n \qquad\qquad (*)$$

$$(KE) \qquad F_e(x_e, y_e, t) = 0; \qquad l = 1, 2, \dots, b$$

gde su a_{kl}, b_{kl} u kirhofovim jednačinama (KZS) i (KZN) su koeficijenti sa vrednostima +1, -1, 0. (KE) su karakteristike elemenata, gde $x_e, y_e \in \{i, u, q, \Phi\}$.

Jednačine $(*)$ u opštem slučaju predstavljaju sistem nelinearnih, i vremenski promenljivih (sa koeficijentima koji zavise od vremena) diferencijalnih jednačina po promenljivima u_l, i_l – što je određeno karakterom elementa u kolu. Kada su elementi u koli linearni i vremenski nepromenljivi

$$(KE) \qquad \begin{array}{lll} u_{Ri} = R_i i_{Ri}, & i = 1, \dots, b_R, & b_R \text{ – broj otpornika u kolu} \\ u_{Li} = L_i \dfrac{di_{Li}}{dt}, & i = 1, \dots, b_L, & b_L \text{ – broj kalemova u kolu} \\ i_{Ci} = C_i \dfrac{du_{Ci}}{dt}, & i = 1, \dots, b_C, & b_C \text{ – broj kondenzatora u kolu} \end{array}$$

Zamenom ovih relacija u (KZS) i (KZN) dobijamo sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima pa naponima i strujama grana.

Pitanje 47.

Svođenje jednačina kola na jednu diferencijalnu jednačinu odziva.

Polazeći od sistema jednačina kola odredimo red kola. Neka je to r. Sistem linearnih diferencijalnih jednačina r-tog reda (dmatramo da elementi kola linearni i vremenski nepromenljivi) može se preurediti u pogodniji oblik za rešavanje. Sistem možemo svesti na jednu diferencijalnu jednačinu r-tog reda, po željenoj promenljivoj $y \in \{u_l, i_l\}$, $l = 1, \dots, b$, b-broj grana u kolu. Dakle, eliminišemo sve promenljive osim y i sistem jednačina kola se svodi na

$$a_r \frac{d^r y(t)}{dt^r} + a_{r-1} \frac{d^{r-1} y(t)}{dt^{r-1}} + \cdots + a_1 \frac{d^1 y(t)}{dt^1} + a_0 y(t) = F(t),$$

gde je a_i, $i = 0, 1, \dots, r$ konstante koje zavise od parametara mreže vezane za krajeve nezavisnih generatora, $F(t)$ funkcija vremena koja je određena nezavisnim generatorima.

Zgodno je svesti da $a_r = 1$. Ovde uvodimo operator izvoda $D \equiv \frac{d}{dt}$. Gornja jednačina sada postaje

$$A(D)y(t) = F(t)$$

gde je $A(D)$ operatorski polinom nad promenljivom $y(t)$ oblika

$$A(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0, \qquad (a_r = 1)$$

Pitanje 48.

Svođenje jednačina kola na sistem jednačina stanja.

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina električnog kola r-tog reda može se svesti na sistem od r nezavisnih diferencijalnih jednačina prvog reda po promenljivima koje definišu stanje električnog kola. Promenjive veličine kojima se opisuje stanje kola su *promenljive stanja*, a dobijeni sistem diferencijalnih jednačina prvog reda jeste *sistem jednačina stanja*.

Za promenljive sistema biramo $u_{ck(t)}$[4] i $i_{lj(t)}$[5] jer se u tom slučaju direktrno koriste stvarni početni uslovi i rešavanje kola je jednostavnije.

Jednačine stanja pišemo u obliku:

$$\begin{gathered} Dx_1 = F_1\big(x_1, \dots, x_r; e_1, \dots, e_g; t\big) \\ \vdots \\ Dx_r = F_r(x_1, \dots, x_r; e_1, \dots, e_g; t) \end{gathered}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo promenljive kola.

---

[4] naponi kondenzatora
[5] struje kalemova

Pitanje 49.
Kako se određuje red sistema jednačina kola.

Red sistema linearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju linearno i vremenski nepromenljivo kolo jednak je ukupnom broju nezavisnih kalemova i kondenzatora.

$$r = b_L + b_C - n_L - m_C$$

gde je b_L - broj kalemova, b_C - broj kondenzatora n_L - broj kalemskih preseka i m_C - broj kondenzatorskih petlji. Drugim rečima red sistema je jednak ukupnom broju nezavisnih početnih uslova, a početni uslovi su upravo određeni L, C elementima.

Pitanje 50.
Šta su kalemski preseci, a šta kondenzatorske petlje?

Posmatramo *kalemski presek* (presek koji sadrži samo kalemove i eventualno strujne generatore) na slici.

Jednačina I *Kirchhof*-ovog zakona za ovaj presek je:

$$-i_1 + i_2 - i_3 - i_{g4} = 0$$

odakle sledi da su struje kalemova linearno zavisne, odnosno umesto tri postoje samo dva linearno nezavisna početna uslova.

Posmatramo *kondenzatorsku petlju* (petlju koja sadrži samo kondenzatore i eventualno naponske generatore) na slici.

Jednačina II *Kirchhof*-ovog zakona za ovaj presek je

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_{g5} = 0\,.$$

odakle sledi da su naponi kondenzatora linearno zavisni, odnosno umesto četiri postoje samo tri linearno nezavisna početna uslova.

Pitanje 51.
Osnovna svojstva diferencijalne jednačine odziva. Ilustracija kroz primere.

Primeri za kola sa jednom ekscitacijom

Primer 1. Posmatamo prosto RC kolo, koje sadrži akumuliranu energiju. Jednačine kola sa slike su

$$
\begin{aligned}
&i_R + i_C = 0 && (\mathbf{1})\\
&u_R = u_C && (\mathbf{2})\\
&i_C = CDu_c && (\mathbf{3})\\
&i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R} && (\mathbf{4})\\
&u_C(0-) = U_0 && (\mathbf{5})
\end{aligned}
$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora:

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = 0$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj i_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po struji otpornika

$$Di_R + \frac{1}{RC}i_R = 0$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = 0$$

Primer 2. Jednačine kola sa slike su

$$
\begin{aligned}
&i_R = i_C && (\mathbf{1})\\
&u_g = u_C + u_R && (\mathbf{2})\\
&u_R = Ri_C && (\mathbf{3})\\
&i_C = CDu_C && (\mathbf{4})\\
&u_C(0-) = U_0 && (\mathbf{5})
\end{aligned}
$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom (3) i (4) u (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = \frac{1}{RC}u_g$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj u_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po naponu otpornika

$$Du_R + \frac{1}{RC}u_R = Du_g$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = \frac{1}{R}Du_g$$

Primer 3. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned} u_R = u_C = Ri_R \quad & (\mathbf{1}) \\ i_g = i_R + i_C \quad & (\mathbf{2}) \\ i_C = CDu_C \quad & (\mathbf{3}) \\ u_C(0-) = U_0 \quad & (\mathbf{4}) \end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Zamenom (1) i (3) u (2) dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = \frac{1}{C}i_g$$

Gornji sistem jednačina se može rešavati i po nekoj drugoj promenljivoj i_R ili i_C.

Lako se dobija diferencijalna jednačina po struji otpornika

$$Di_R + \frac{1}{RC}i_R = \frac{1}{RC}i_g$$

odnosno diferencijalna jednačina po struji kondenzatora

$$Di_C + \frac{1}{RC}i_C = Di_g$$

Na osnovu pokazanih primera zaključujemo da su u slučaju linearnih i vremenski nepromenljivih kola jednačine odziva oblika linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. To nam omogućava da primenjujemo bilo koju linearnu operaciju nad celom diferencijalnom jednačinom, a da se karakter jednačine ne promeni. Konkretno, to znači da na osnovu diferencijalne jednačine po jednoj (ma kojoj) promenljivoj, možemo odrediti diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj drugoj promenljivoj primenom odgovarajućih linearnih operacija.

Takođe, zaključujemo da su diferencijalne jednačine za ma koju promenljivu oblika

$$A(D)y(t) = F_{y,e}(t),$$

pri čemu važi sledeće:

- homogeni deo jednačine $A(D)$ je **isti** za sve promenljive.
- nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ se javlja **samo** ako postoji ekscitacija $e(t)$. Oblik ove funkcije određen je i ekscitacijom i promenljivom y po kojoj je formirana diferencijalna jednačina.

Primeri za kola sa više ekscitacija

Primer 4. Jednačine kola sa slike su

$$\begin{aligned}
&u_g = u_C + u_R && \mathbf{(1)}\\
&i_g = i_R + i_C && \mathbf{(2)}\\
&i_C = CDu_C && \mathbf{(3)}\\
&u_R = -Ri_R && \mathbf{(4)}\\
&u_C(0-) = U_0 && \mathbf{(5)}
\end{aligned}$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$. Rešavanjem sistema dobijaju se sledeće diferencijalne jednačine za promenljive u_C, i_C, i_R

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)u_C = \frac{1}{C}i_g + \frac{1}{RC}u_g$$
$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i_C = Di_g + \frac{1}{R}Du_g$$
$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i_R = -\frac{1}{R}Du_g + \frac{1}{RC}i_g$$

Primer 4 je potvrda jednog značajnog svojstva linearnih i vremenski nepromenljivih kola – ***principa superpozicije*** koji tvrdi da pri delovanju dva ili više generatora u kolu, odziv u ma kojoj grani kola može se odrediti kao suma pojedinačnih odziva na svaku od ekscitacija pri isključenim ostalim ekscitacijama. U našem slučaju se primer 4 pri isključenom strujnom generatoru svodi na primer 2, pri isključenom naponskom generatoru na primer 3, a pri isljučena oba generatora na primer 1.

Na osnovu svega o formi diferencijalne jednačine koja određuje odziv u kolu možemo zaključiti sledeće:

1) Ako u kolu deluje *jedan generator*, diferencijalna jednačina je oblika

$$(D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y(t) = \left(b_q D^q + b_{q-1}D^{q-1} + \cdots + b_1 D + b_0\right)e(t)$$

što kraće pišemo

$$A(D)y(t) = B_{y,e}(D)e(t) = F_{y,e}(t)$$

Operatorski polinom $A(D)$ je isti[6] za ma koju promenljivu $y(t)$, dok polinom $B_{y,e}(D)$ zavisi i od promenljive po kojoj formiramo diferencijalne jednačine i od ekscitacije $e(t)$.

2) Ako u kolu deluje *više generatora* e_1, e_2, … , e_g tada su pojedinačni odzivi određeni diferencijalnim jednačinama

$$\begin{gathered} A(D)y_{e_1}(t) = B_{y,e_1}(D)e_1(t) \\ A(D)y_{e_2}(t) = B_{y,e_2}(D)e_2(t) \\ \vdots \\ A(D)y_{e_g}(t) = B_{y,e_g}(D)e_g(t) \end{gathered}$$

gde je g broj generatora. Sa $y_{e_1}, \dots, y_{e_g}$ je označen isti odziv, ali pri delovanju različitih ekscitacija. Sumiranjem pojedinačnih odziva dobijamo ukupan odziv

$$A(D)y(t) = B_{y,e}(D)e(t)$$

pri čemu je

$$B_{y,e}(D) = \sum_{i=1}^{g} B_{y,e_i}(D)\, e_i(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{g} y_{e_i}(t)$$

Sistem možemo rešiti rešavanjem pojedinačnih odziva i njihovim sumiranjem, ali rešenje možemo dobiti i rešavanjem jedne diferencijalne jednačine koja je oblika

$$A(D)y(t) = \sum_{i=1}^{g}\left[B_{y,i}(D)e_i(t)\right] = F_{y,e}(t).$$

Detaljnije o rešavanju diferencijalnih jednačina u knjizi “TEK1” 246-253 str. ili poništiti Matematiku 2 pa gradivo učiti ponovo sa razumevanjem :P

[6] **postoje slučajevi kada nije isti, tako bar piše u knjizi, nemamo pojma**

Pitanje 52.

Određivanje sopstvenog odziva.

Sopstveni odziv nastaje u kolima sa akumuliranom energijom, kada nema ekscitacija. Označavamo ga sa $y_0(t)$. Opisan je homogenom diferencijalnom jednačinom

$$A(D)y_0(t) = 0$$

čije je rešenje oblika:

1) koreni karakteristične jednačine su prosti

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{r} \underline{K}^{(i)} e^{\underline{S_i} t}$$

gde je r red kola odnosno diferencijalne jednačine, a donja crta oznaka za kompleksan broj.

2) postoje višestruki koreni karakteristične jednačine (neka je S_1 koren reda p, a ostali koreni su prosti)

$$y_0(t) = \left(\underline{K}^{(1)} + t\underline{K}^{(2)} + \cdots + t^{p-1}\underline{K}^{(p)}\right) e^{\underline{S_1} t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{K}^{(i)} e^{\underline{S_i} t}$$

Karakter (realan ili kompleksan) integracionih konstanti $\underline{K}^{(i)}$ određen je karakterom korena $\underline{S_i}$. Integracione konstante $\underline{K}^{(i)}$ određuju se iz poznatih ***stvarnih početnih uslova:***

$$u_{C_k}(0^-) = U_{0k}$$
$$i_{L_j}(0^-) = I_{0j}$$

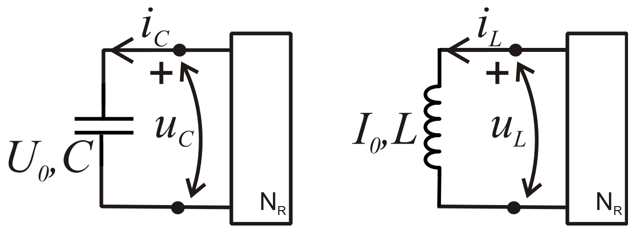
Za određivanje svih r konstanti potrebno je r nezavisnih relacija, koje uspostavljaju vezu ovih konstanti sa stvarnim početnim slovima. Te relacije, poznate i kao ***izvedeni početni uslovi***, opisane su vrednostima promenljive koju posmatramo i njenih $(r-1)$ izvoda u trenutku $t = 0^+$

$$y(0^+),\ Dy(0^+),\ D^2y(0^+),\ \ldots\ ,\ D^{r-1}y(0^+)$$

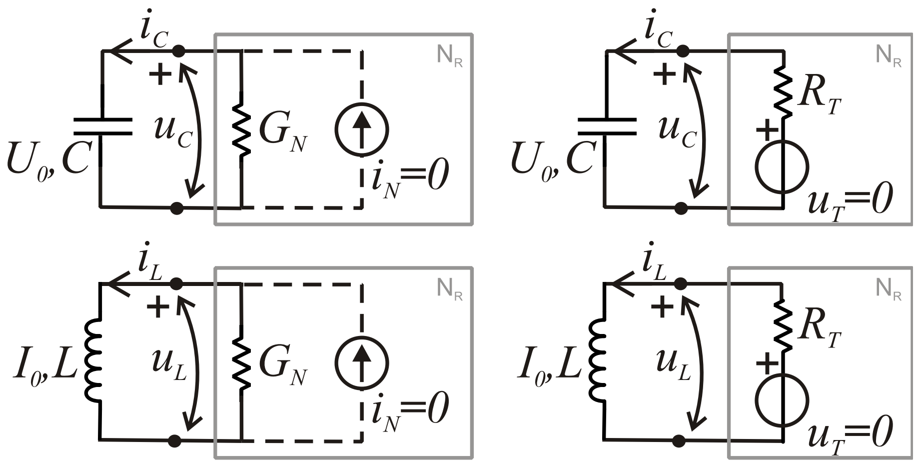
Pitanje 53.

Sopstveni odziv u kolima prvog reda.

Kola prvog reda sadrže samo jedan dinamički element C ili L i rezistivnu mrežu N_R vezanu za njegove krajeve.



Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira *Thevenin*-ovim odnosno *Norton*-ovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N. Opšti slučaj kola prvog reda ovim postupkom ekvivalentiramo prostim RC ili RL kolom.



Analiza RC-kola

$$i_R + i_C = 0 \qquad (1)$$
$$u_R = u_C \qquad (2)$$
$$i_C = CDu_c \qquad (3)$$
$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R} \qquad (4)$$
$$u_C(0-) = U_0 \qquad (5)$$

i ovaj sistem je najlakše rešavati po u_C jer imamo početni uslov $u_C(0-) = U_0$.

Zamenom $(\mathbf{3})$ i $(\mathbf{4})$ u $(\mathbf{1})$ dobijamo diferencijalnu jednačinu po naponu kondenzatora:

$$Du_C + \frac{1}{RC}u_c = 0$$

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)u_c = 0$$

$$A(D) = D + \frac{1}{RC}$$

Karakterističan polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S} + \frac{1}{RC}\ .$$

Koren polinom je realan

$$\underline{S}_1 = -\frac{1}{RC} = \sigma_1 = -a_0\ ,$$

napon kondenzatora za $t \geq 0$ je

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}\ .$$

Konstantu K određujemo iz početnog uslova:

$$u_C(0^-) = K$$

Zadovoljen je uslov neprekidnosti napona kondenzatora

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = K = U_0$$

konačno odziv je

$$u_C(t) = U_0e^{-\frac{t}{RC}} = U_0e^{\sigma t} = U_0e^{-a_0t}$$

Pošto je operatorski polinom $A(D)$ isti za sve promenljive u kolu one se menjaju po istom eksponencijalnom zakonu.

-SLIKA-

Za pasivna kola veličina $a_0 = \frac{1}{RC}$ je pozitivna i naziva se učestanošću prigušenja jer pokazuje kojom brzinom opadaju amplidude odziva u kolu, dok se $\tau = RC$ naziva vremenska konstanta kola, koja u vremenskom domenu ukazuje na brzinu kojom opadaju amplitude odziva u kolu. Grafička interpretacija vremenske konstante: to je trenutak kada amplituda napona kondenzatora opadne na $1/e$ od svoje maksimalne vrednosti u $t = 0$.

-SLIKA-

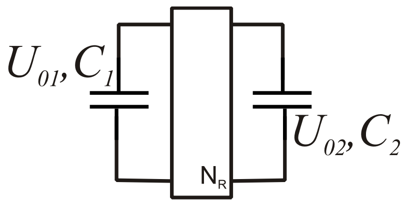
Posle tri vremenske konstante, uaostali napon kondenzatora iznosi 5% početne vrednosti, a posle pet vremenskih konstatnti zaostali napon je manji od 1% u odnosu na početnu vrednost.

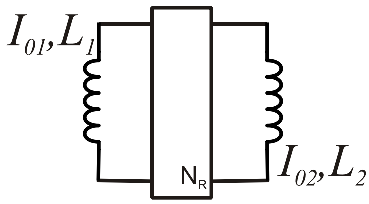
Za kola prvog reda kažemo da su bez gubitaka kada je rezistivna mreža u vidu otvorene veze $(G_N = 0)$ ili kratkog spoja $(R_T = 0)$ i tada odzivi zadržavaju početnu konstantnu vrednost. Ukoliko kolo nije ni pasivno ni bez gubitaka onda je aktivno.

Pitanje 54.

Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Aperiodični režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.





Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

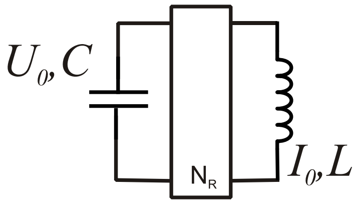
$$(D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = 0$$

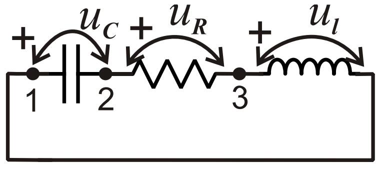
sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: $u_C(0^+)$ i $i_L(0^+)$.

Posmatrajmo kolo sa slike





Jednačine kola su

$$i_C = i_L = i_R = i$$
$$u_C + u_R + u_L = 0$$
$$i_c = i = CDu_C$$
$$u_R = Ri_R = Ri$$
$$u_L = LDi_L = LDi$$
$$u_C(0^-) = U_0$$
$$i_L(0^-) = I_0$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodiučni sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja:

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$

3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Aperiodični režim $(\alpha > \omega_0)$

U ovom slučaju koreni su realni i različiti

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \beta = \sigma_{1,2}$$
$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

pri čemu je $\omega_0 = \sqrt{a_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ \alpha = a_1/2 = R/2L.$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = K^{(1)}e^{\sigma_1 t} + K^{(2)}e^{\sigma_2 t}$$

konkretno, za napon kondenzatora:

$$u_C(t) = K^{(1)}e^{\sigma_1 t} + K^{(2)}e^{\sigma_2 t}$$

Računanje integracionih konstanti:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C}i_L(0^+) = \frac{1}{C}i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \sigma_1 K^{(1)} + \sigma_2 K^{(2)}$$

sledi da je

$$K^{(1)} = \frac{U_0\sigma_2 - \frac{I_0}{C}}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right)$$

$$K^{(2)} = \frac{-U_0\sigma_1 + \frac{I_0}{C}}{\sigma_2 - \sigma_1} = -\frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right)$$

Konačno,

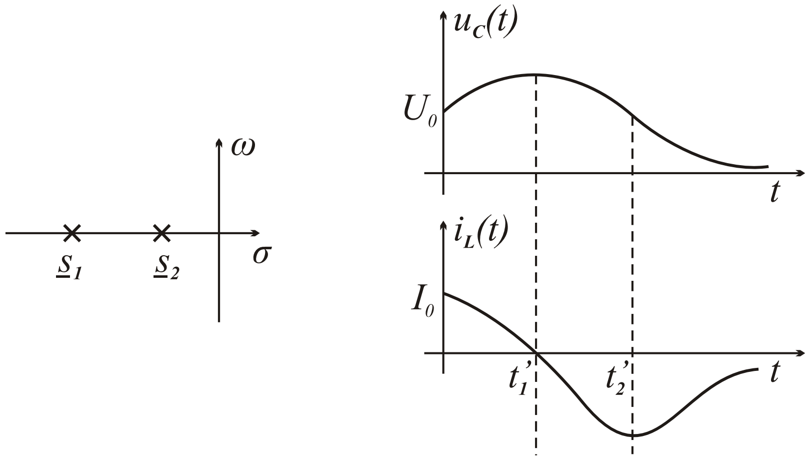
$$u_C(t) = \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_2 U_0\right)e^{\sigma_1 t} - \frac{1}{2\beta}\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right)e^{\sigma_2 t}$$

Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = \frac{\sigma_1}{2\beta}(I_0 - C\sigma_2 U_0)e^{\sigma_1 t} - \frac{\sigma_2}{2\beta}(I_0 - C\sigma_1 U_0)e^{\sigma_2 t}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:



Aperiodični režim RLC kola drugog reda: položaj sopstvenih učestanosti i vremenski oblici odziva.

U ovakvom kolu nema oscilatornog (periodičnog) karaktera sopstvenog odziva, odnosno nema razmene energije između kalema i kondenzatora jer su gubici veliki.

Pitanje 55.

Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Kritičan režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.

Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = 0$$

sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: u_C 0^+ i i_L 0^+ .

Posmatrajmo kolo sa slike

-SLIKE-

Jednačine kola su:

$$
\begin{aligned}
i_C &= i_L = i_R = i \\
u_C + u_R + u_L &= 0 \\
i_c &= i = CDu_C \\
u_R &= Ri_R = Ri \\
u_L &= LDi_L = LDi \\
u_C(0^-) &= U_0 \\
i_L(0^-) &= I_0
\end{aligned}
$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodiučni sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$
2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$
3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Kritičan režim ($\alpha = \omega_0$)

Koreni karakteristične jednačine su realni i dvostruki:

$$\underline{S}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = (K^{(1)} + tK^{(2)})e^{\sigma_1 t}$$

Konkretno, za napon kondenzatora

$$u_C(t) = (K^{(1)} + tK^{(2)})e^{\sigma_1 t}$$

Računanje integracionih konstanti

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = K^{(1)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \sigma_1 K^{(1)} + K^{(2)}$$

sledi da je

$$K^{(2)} = \frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0$$

Konačno:

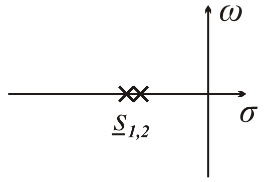
$$\begin{aligned} u_C(t) &= \left(U_0 + t\left(\frac{I_0}{C} - \sigma_1 U_0\right)\right)e^{\sigma_1 t} \\ &= U_0(1 - \sigma_1 t)e^{\sigma_1 t} + \frac{I_0}{C} t e^{\sigma_1 t} \end{aligned}$$

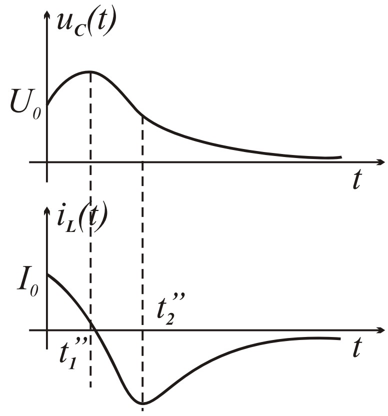
Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = I_0(1 + \sigma_1 t)e^{\sigma_1 t} - \frac{U_0}{L} t e^{\sigma_1 t}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:





Slično kao i za aperiodičan režim u ovakvom kolu nema oscilatornog (periodičnog) karaktera sopstvenog odziva, odnosno nema razmene energije između kalema i kondenzatora jer su gubici veliki, samo je proces prigušenja brži. Ovaj režim se naziva kritični jer razdvaja apreiodičan režim od pseudoperiodičnog režima.

Pitanje 56.
Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Pseudoperiodičan režim.

Kola drugog reda, bez ekscitacija, sadrže dva nezavisna reaktivna (dinamička) elementa i rezistivnu mrežu N_R bez unutrašnjih generatora. Proizvoljna rezistivna mreža se ekvivalentira Tevenenovim odnosno Nortonovim generatorom, a zbog nepostojanja ekscitacije $u_T = 0$ odnosno $i_N = 0$, pa se N_R svodi na R_T odnosno na G_N.

-SLIKE-

Diferencijalna jednačina odziva je oblika:

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = 0$$

sa (izvedenim) početnim uslovima:

$$y(0^+) = f_1(0^+)$$
$$Dy(0^+) = f_2(0^+)$$

gde su vrednosti $f_1(0^+)$ i $f_2(0^+)$ izražene stvarnim početnim uslovima: $u_C(0^+)$ i $i_L(0^+)$.

Posmatrajmo kolo sa slike

-SLIKE-

Jednačine kola su

$$
\begin{aligned}
i_C &= i_L = i_R = i \\
u_C + u_R + u_L &= 0 \\
i_c &= i = CDu_C \\
u_R &= Ri_R = Ri \\
u_L &= LDi_L = LDi \\
u_C(0^-) &= U_0 \\
i_L(0^-) &= I_0
\end{aligned}
$$

odakle možemo naći diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neka je to napon kondenzatora u_C:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)u_C(t) = 0$$

$$A(D) = D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = D^2 + a_1 D + a_0$$

Karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \frac{R}{L}\underline{S} + \frac{1}{LC} = \underline{S}^2 + a_1\underline{S} + a_0$$

sa korenima

$$\underline{S}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Veličinu $a_0 = 1/LC$ označićemo sa ω_0^2, a $\omega_0 = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{LC}$ se naziva učestanost neprigušenih oscilacija, jer u kolu bez gubitaka postoji prostoperiodiučni sopstveni režim sa učestanošću ω_0. Veličinu $a_1 = R/L$ označićemo sa 2α, a $\alpha = a_1/2 = R/2L$ naziva se učestanost prigušenja. Koren karakteristične jednačine možemo pisati

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Na osnovu oblika korena karakteristične jednačine razlikovaćemo tri slučaja

1) $\alpha > \omega_0$, koreni su realni i različiti: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_{1,2} = -\alpha \pm \beta$

2) $\alpha = \omega_0$, koreni su realni i dvostruki: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 = -\alpha = -\omega_0$

3) $\alpha < \omega_0$, koreni čine konjugovano-kompleksni par: $\underline{s}_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Odgovarajući odzivi, za slučajeve 1, 2, 3 jesu aperiodični, kritični i pseudoperiodični, respektivno.

Pri tome, ako je kolo *striktno pasivno*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} < 0$, a ako je *kolo bez gubitaka*, tada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} = 0$, dok u slučaju kada je $\mathrm{Re}\{\underline{s}_{1,2}\} > 0$, reč o *aktivnom kolu.*

Pseudoperiodičan režim $(\boldsymbol{\alpha < \omega_0})$

Koreni karakteristične jednačine su realni i dvostruki:

$$\underline{S}_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_1 = \sigma_{1,2} \pm j\omega_1$$
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = \underline{K}^{(1)} e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}^{(2)} e^{\underline{S}_2 t}$$

Konkretno, za napon kondenzatora:

$$u_C(t) = \underline{K}^{(1)} e^{\underline{S}_1 t} + \underline{K}^{(2)} e^{\underline{S}_2 t}$$

što možemo izraziti ekvivalentnim oblikom

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} u_{Cm} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Računanje integracionih konstanti

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 = \underline{K}^{(1)} + \underline{K}^{(2)}$$

$$Du_C(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = \frac{I_0}{C} = \underline{S}_1 \underline{K}^{(1)} + \underline{S}_2 \underline{K}^{(2)}$$

sledi da je

$$\underline{K}^{(1)} = \frac{U_0 \underline{S}_2 - \frac{I_0}{C}}{\underline{S}_2 - \underline{S}_1} = \frac{U_0}{2} - j\frac{\left(U_0\alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}$$

$$\underline{K}^{(2)} = \frac{-U_0 \underline{S}_1 + \frac{I_0}{C}}{\underline{S}_2 - \underline{S}_1} = \frac{U_0}{2} + j\frac{\left(U_0\alpha + \frac{I_0}{C}\right)}{2\omega_1}$$

Konačno,

$$u_C(t) = \left(\frac{U_0}{2} - j \frac{\left(U_0 \alpha + \frac{I_0}{C} \right)}{2\omega_1} \right) e^{(-\alpha + j\omega_1)t} + \left(\frac{U_0}{2} + j \frac{\left(U_0 \alpha + \frac{I_0}{C} \right)}{2\omega_1} \right) e^{(-\alpha - j\omega_1)t}$$

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} \left[U_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1} \left(\alpha U_0 + \frac{I_0}{C} \right) \sin(\omega_1 t) \right]$$

Na osnovu napona kondenzatora lako možemo naći i struju kalema:

$$i_C(t) = CDu_C = i_L(t) = i(t)$$

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} \left[I_0 \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{\omega_1} \left(\alpha I_0 + \frac{U_0}{L} \right) \sin(\omega_1 t) \right]$$

Odnosno,

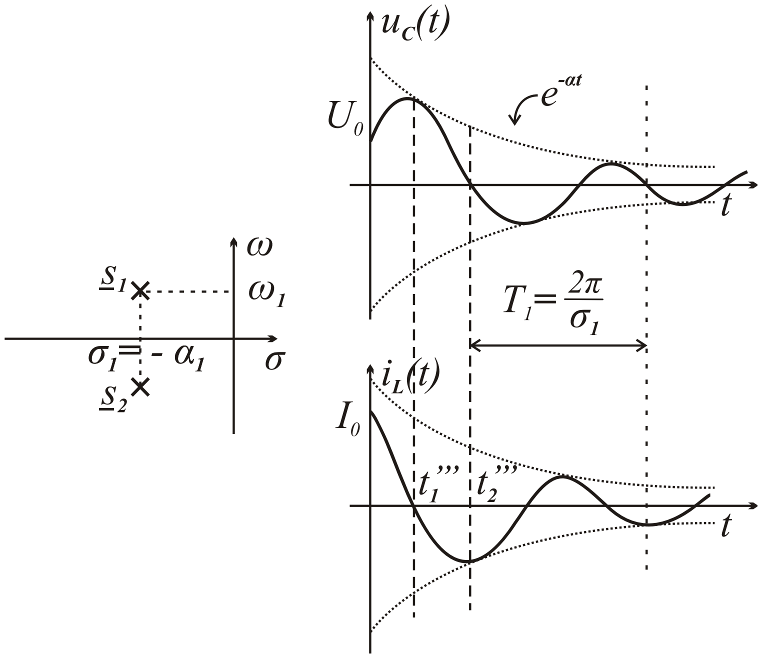
$$u_C(t) = U_{Cm} e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \theta_C)\,,$$
$$i_L(t) = I_{Lm} e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \psi_L)$$

sa

$$U_{Cm} = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1} U_0 \right)^2}\,, \qquad \theta_C = \mathrm{arctg} \frac{-\left(\frac{\mathrm{I}_0}{\mathrm{C}\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1} \mathrm{U}_0 \right)}{\mathrm{U}_0}$$

$$I_{Lm} = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{U_0}{L\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1} I_0 \right)^2}\,, \qquad \psi_L = \mathrm{arctg} \frac{-\left(\frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{L}\omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1} \mathrm{I}_0 \right)}{\mathrm{I}_0}$$

Dijagrami $u_C(t)$ i $i_L(t)$:



U ovakvom kolu režim je pseudoperiodičan sa pseudoperiodom $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ i obvojnicom $\pm Y_m e^{-\alpha t} = \pm Y_m e^{-t/\tau}$, gde τ ima značenje vremenske konstante.

Pitanje 57.

Sopstveni odziv u kolima višeg reda.

Ako kolo sadrži više od dva dinamička elementa kažemo da je reč o kolu višeg reda. Određujemo sopstveni odziv, pa posmatramo kolo bez generatora, sa akumuliranom energijom. Neka je red kola r. Možemo odrediti diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj promenljivoj.

$$A(D)y_0(t) = 0$$

Operatorski polinom je

$$A(D) = D^r + a_{r-1}D^{r-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \,,$$

karakteristični polinom je

$$A(\underline{S}) = \underline{S}^r + a_{r-1}\underline{S}^{r-1} + \cdots + a_1\underline{S} + a_0 \,,$$

i može se izraziti preko svojih korena:

$$\underline{A}(\underline{s}) = (\underline{s} - \underline{s}_1)(\underline{s} - \underline{s}_2) \ldots (\underline{s} - \underline{s}_r).$$

Razlikovaćemo slučajeve:

- Koreni karakteristične jednačine su ***prosti*** ($\underline{s}_1 \neq \underline{s}_2 \neq \cdots \neq \underline{s}_r$).
- Koreni su ***realni***: $\underline{s}_i = \sigma_i$. Tada je $y_{0i}(t) = k_i e^{\sigma_i t}$, gde je $k_i \in \mathbb{R}$.
  Dakle, sopstveni odziv se može predstaviti u obliku sume odziva koji odgovaraju članovima prvog reda:
  $$y_0(t) = \sum_{k=1}^{r} k_i e^{\sigma_i t}$$
- Koreni su ***kompeksni***: $\underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i$. U slučaju da postoji jedan kompleksan koren, tada postoji i njemu konjugovano kompleksni koren $\underline{s}_{i+1} = \underline{s}_i^* = \sigma_i - j\omega_i$, jer su koeficijenti karakterističnog polinoma a_i realni.
  Tada je $y_{0,i}(t) = \underline{k}_i e^{\underline{s}_i t}$, gde je
  $$\underline{k}_i = k_{\mathbb{R}} + jk_{\mathbb{C}} \,,$$
  dok je
  $$y_{0,i+1}(t) = \underline{k}_{i+1} e^{\underline{s}_i^* t} \,,$$
  gde je
  $$\underline{k}_{i+1} = k_{\mathbb{R}} - jk_{\mathbb{C}} \,.$$
  I ovde se sopstveni odziv može predstaviti u obliku sume odziva koji odgovaraju članovima prvog reda, ali je zgodno grupisati parove kompleksno konjugovanih korena:
  $$y_{0,k}(t) = y_{0,i}(t) + y_{0,i+1}(t) = 2\mathrm{Re}\big[y_{0,i}(t)\big] = Y_{k,m} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_k)$$
  $k = 1,2, \dots, s$, gde je s broj konjugovano kompleksnih parova.
- Koreni karakteristične jednačine su ***višestruki.*** Neka postoji jedan višestruki koren, neka je to koren $\underline{s}_1$ reda p:
  $$\underline{s}_1 = \underline{s}_2 = \cdots = \underline{s}_p, \qquad \underline{s}_{p+1} \neq \underline{s}_{p+2} \neq \cdots \neq \underline{s}_r$$
  Tada je
  $$y_0(t) = \left(\underline{k}_1 + t\underline{k}_2 + \cdots + t^{p-1}\underline{k}_p\right) e^{\underline{s}_1 t} + \sum_{i=p+1}^{r} \underline{k}_i e^{\underline{s}_i t}$$

Dakle, sopstveni odziv u kolu višeg reda se može predstaviti u obliku sume odziva koje odgovaraju članovima prvog i drugog reda. Odnosno, kolo višeg reda svodimo na kola prvog odn. drugog reda.

Pitanje 58.
Osnovni vremenski oblici ekscitacija.

Ekscitacije u električnim kolima date su naponima i strujama nezavisnih generatora.

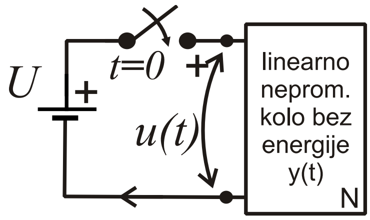
Konstantna funkcija

Ekscitacija koja je u vremenu opisana konstantnom funkcijom oblika: $e(t) = E = const, \forall t$, pri čemu je u elektrotehnici reč o naponu ili struji konstantnog generatora: $u_g(t) = U$ ili $i_g(t) = I$.
U praksi, generator koji nema ni početak ni kraj kao što je ovaj ne postoji, moguće je ostvariti ekscitaciju koja bi se u određenom vremenskom intervalu menjala po određenom zakonu.

U realnom slučaju, konstanta funkcija je različita od nule dok traje delovanje generatora.

***Heaviside*-ova (odskočna) funkcija**

Generator oblika $e(t) = E = const$. uključujemo u kolu u trenutku $t = t_0$.



Konkretno, neka je $t_0 = 0$, i neka je to naponski generator $u_g(t) = U$ koji se prekidačem P spaja sa mrežom N koja nema nezavisne generatore niti akumuliranu energiju (napon na njenim krajevima je bio 0). Pri zatvaranju prekidača P potreno je neko vreme da napon $u(t)$ dostigne U. Dakle, postoji prelazni režim. Ovo prelazn vreme može biti kraće ili duže zavisno od oblika mreže M ali realno gledano, nikad ne možemo imati trenutnu promenu (vreme trajanja prelaznog režima ne može postati jednako nuli).

Ako funkciju $u(t)$ podelimo njenom amplitudom U, dobija se funkcija istog oblika ali bez dimenzije i sa jediničnom amplitudom koja se naziva *realna odskočna funkcija* i koja je definisana sa:

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \in (0,1), & 0 \le t < \varepsilon \\ 1, & t \ge \varepsilon \end{cases}$$

U graničnom procesu kada interval ε teži nuli, dobija se idealna odskočna funkcija, poznatija kao *Heaviside*-ova funkcija:

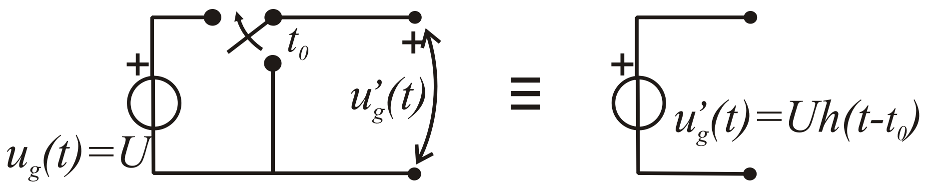
$$h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0^+ \end{cases}$$

Ako je $t_0 \neq 0$, odgovarajuća funkcija bi bila pomerena po vremenskoj osi – pomerena *Heaviside*-ova funkcija:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0^+ \end{cases}$$

Heaviside-ova ekscitacija se može opisati izrazom: $e(t) = Eh(t)$, gde amplituda E odražava prirodu funkcije, što je u konkretnom slučaju za napon i struju nezavisnih generatora: $u_g(t) = U\,h(t)$, $i_g(t) = Ih(t)$.

Preciznija simulacija *Heaviside*-ovog generatora:



Odnosno, generator ima otpornost 0 kada je isključen, a ne beskonačnu.

Funkcija $\mathbf{sgn}(t)$

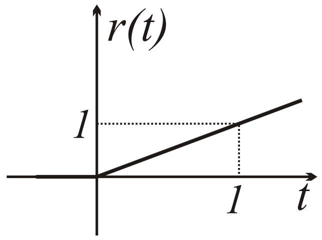
Funckija $\mathrm{sgn}(t)$ definisana je kao:

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

što se može interpretirati kao: $\mathrm{sgn}(t) = -1 + 2h(t)$ ili $\mathrm{sgn}(t) = h(t) - h(-t)$, gde je $h(t)$ *Heaviside*-ova funkcija. Funkcija $\mathrm{sgn}(t)$ je bez dimenzije, tako da bi ekscitacije ovog oblika bile opisane izrazima: $u_g(t) = U\,\mathrm{sgn}(t)$, $i_g(t) = I\,\mathrm{sgn}(t)$.

Usponska funkcija

Usponska funkcija definisana je sa: $r(t) = 0$ za $t < 0$ i $r(t) = at$ za $t \geq 0$. Jedinična usponska funkcija dobija se za $a = 1$, a funkcija proizvoljnog nagiba $a \neq 1$ dobija se množenjem konstante a i funkcije $r(t)$. Između *Heaviside*-ove i jedinične usponske funkcije postoji veza: $r(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = th(t)$, tj. $h(t) = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$.



Jedinična usponska funkcija ima dimenziju vremena, pa je ekscitacija oblika: $e(t) = \frac{E}{T}r(t) = \frac{E}{T}th(t)$, što je za naponski i strujni generator:

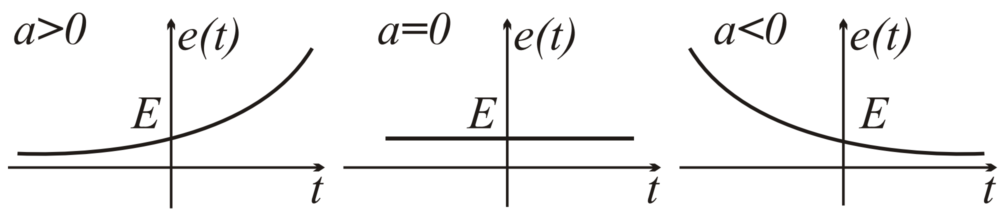
$$u_g(t) = \frac{U}{T}r(t) = \frac{U}{T}th(t), \qquad i_g(t) = \frac{I}{T}r(t) = \frac{I}{T}th(t)$$

Ako je $t_0 \neq 0$, odgovarajuća funkcija bi bila pomerena po vremenskoj osi - pomerena usponska funkcija:

$$r(t - t_0) = (t - t_0)h(t - t_0)$$

Eksponencijalna funkcija

Ekscitacija oblika eksponencijalne funkcije opisana je sa: $e(t) = Ee^{at}$. U realnim slučajevima funkcija se uključuje u nekom trenutku t_0. Ako je $t_0 = 0$, tada je ekscitacija oblika: $e_1(t) = Ee^{at}h(t)$, a ako je $t_0 > 0$, onda je: $e_2(t) = Ee^{a(t-t_0)}h(t - t_0) = e_1(t - t_0)$. Naponski i strujni generator sa ekscitacijama u vidu eksponencijalnih funkcija opisani su sa: $u_g(t) = Ue^{at}$, $i_g(t) = Ie^{at}$.



Prostoperiodična funkcija

Ekscitacija oblika prostoperiodične funkcije opisana je sa: $e(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma)$. Reč je o funkciji sa amplitudom E_m, kružnom frekvencijom ω, odnosno periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$, trenutnom fazom $(\omega t + \gamma)$ i početnom fazom γ, odnosno trenutkom prvog maksimuma $t_1 = -\frac{\gamma}{w}$. Naponski i strujni generator sa ekscitacijama u vidu prostoperiodičnih funkcija opisani su sa:

$$u_g(t) = U_m \cos(wt + \theta)$$
$$i_g(t) = I_m \cos(wt + \psi).$$

Ako se ekscitacija uključuje u trenutku $t_0 = 0$, ona je opisana izrazom:

$$e_1(t) = E_m \cos(\omega t + \gamma)\, h(t)\ ,$$

a ako se uključuje u trenutku $t_0 \neq 0$, onda je:

$$e_2(t) = E_m \cos[\omega(t - t_0) + \gamma]\, h(t - t_0) = e_1(t - t_0).$$

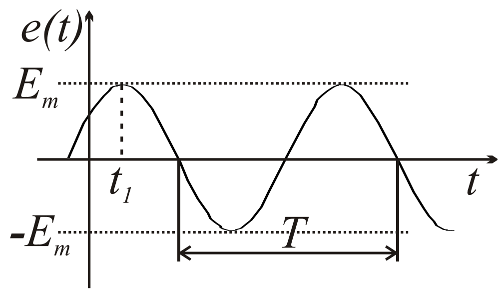
Efektivna vrednost ekscitacije je data sa:

$$E = \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Srednja (apsolutna) vrednost je

$$E_{sr} = \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} |e(t)|\mathrm{d}t = \frac{2E_m}{\pi}$$

koja je poznata i pod nazivom srednja poluperiodna vrednost.



Složenoperiodična funkcija

Funkcija koja se periodično ponavlja sa periodom T: $e(t+nT)=e(t)$, $n=1,2,\dots$ ali nije prostoperiodična naziva se složenoperiodičnom funkcijom. S obzirom da se prema *Fourier*-ovoj analizi može predstaviti sumom prostoperiodičnih funkcija u obliku *Fourier*-ovog reda:

$$e(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}E_m^{(n)}\cos\left(n\omega_0 t+\gamma^{(n)}\right)$$

gde je: $E_0=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}e(t)\mathrm{d}t$ srednja vrednost funkcije za vreme jedne periode, dok se prostoperiodične funkcije: $e^{(n)}(t)=E_m^{(n)}\cos\left(n\omega_0 t+\gamma^{(n)}\right)$ nazivaju harmonicnim komponentama (harmonicima) slozenoperiodicne funkcije. Naziv potice od toga sto su frevencije ovih clanova jednake celobrojnom umnosku frekvencije ponavljanja funkcije: $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ koja se naziva i kružnom učestanošću osnovnog harmonika. Broj harmonika može biti konačan ukoliko je funkcija $e(t)$ trigonometriski polinom.

Pravougaoni impuls.

Konstantni signal koji se ukljucuje u trenutku t_1, a iskljucuje u trenutku $t_2>t_1$, može se analitički predstaviti pomoću dve *Heaviside*-ove funkcije:

$$u_g(t)=Uh(t-t_1)-Uh(t-t_2)=u_{g1}(t)+u_{g2}(t)\,.$$

Pseudoperiodična funkcija sa negativnim eksponentom.

Analitički izraz ove funkcije je:

$$e(t)=E_m e^{at}\cos(\omega_1 t+\theta)h(t)$$

sa $U_0+u_g(0^+)=U_m\cos\theta$, $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$.

Unutar obvojnice koju čine funkcije $U_m e^{at}$ i $-U_m e^{at}$ nalazi se ukupna funkcija sa pseudoperiodom T_1 koja odgovara periodi kosinusne funkcije.

Pitanje 59.
Svojstvo odabiranja impulsne ekscitacije.

Pod pojmom impulsa podrazumeva se pojava (signal) koji naglo nastaje u trenutku t_0, traje određeno vreme ε i potom iščezava. Za vreme svog trajanja impuls je opisan nekom funkcijom vremena, označenoj na primer sa $s(t)$, tako da se može predstaviti analitičkim izrazom:

$$e_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ s(t) & 0 \le t < \varepsilon \\ 0, & t \ge \varepsilon \end{cases}$$

-SLIKA-

Funkcije ovakvog oblika nazivaju se i udarnim funkcijama. Smatraćemo da su to ograničene funkcije, odnosno da je ispunjeno: $\int_{-\infty}^{+\infty} e_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon s(t)\mathrm{d}t = F$

Za vreme svog trajanja impuls deluje u kolu i izaziva efekt koji je srazmeran površini ispod krive $s(t)$, označenoj sa F koja predstavlja jačinu udara posmatrane funkcije. Kada se funkcija $e_\varepsilon(t)$ normalizuje (deljenjem sa jačinom udara F) dobija se funkcija: $\delta_\varepsilon(t) = \frac{e_\varepsilon(t)}{F}$, koja je definisana:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{s(t)}{F}, & 0 \le t < \varepsilon \\ 0, & t \ge \varepsilon \end{cases}$$

koja ima isti oblik kao $e_\varepsilon(t)$ sa skaliranim ordinatama za faktor F i sa jediničnom površinom. U graničnom slučaju, kada $\varepsilon \to 0$, dobija se *Dirac*-ova funkcija (impuls), $\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)$, koja je definisana sa:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t \ge 0^+ \end{cases},$$

i važi još i:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \int_0^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

Impulsna funkcija se grafički prikazuje u vidu zadebljane strelice, pored koje se ispisuje vrednost jačine udara koja odgovara površini ispod krive dobijene graničnim procesom.

-SLIKA-

Veza između *Dirac*-ove i *Heaviside*-ove funkcije je: $\delta(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$. *Dirac*-ova funkcija koja nastaje u trenutku $t_0 \neq 0$ naziva se pomerena *Dirac*-ova funkcija.

Dirac-ova funkcija ima dimenziju frekvencije, pa jačina udara imulsne funkcije ima prirodu fluksa za $u_g(t)$, odnosno količine naelektrisanja za $i_g(t)$: $u_g(t) = \Phi\delta(t)$, $i_g(t) = Q\delta(t)$.

Svojstvo odabiranja

Ovo svojstvo je veoma značajno za impulsnu funkciju i koristi se dosta u raznim digitalnim kolima posebno za digitalni prenos informacija. Bilo koji kontinualni signal možemo diskretizovati u vremenu primenom svojstva o odabiranju.

Posmatrajmo proizvod proizvoljne neprekidne i ograničene funkcije f(t) i *Dirac*-ove funkcije $\delta(t - t_0)$. Taj proizvod je jednak:

$$f(t)\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ f(t)\delta(t-t_0) = \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

i važi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0^+)$. Formiranjem proizvoda date funkcije $f(t)$ i *Dirac*-ove funkcije postavljene u željeni trenutak t_0 i integraljenjem tog proizvoda dobija se samo uzorak funkcije u željenom trenutku t_0, $f(t_0)$. Na taj način može se izvršiti diskretizacija proizvoljne funkcije u vremenu.

Blok šema uređaja za odabiranje:

-SLIKA-

Pitanje 60.

Određivanje odziva na delovanje ekscitacije.

Smatraćemo da u kolu nema akumulirane energije odnosno

$$u_{C_k}(0^-) = 0,\ \ i_{L_j}(0^-) = 0, \text{nema početnih uslova.}$$

Neka u kolu deluj jedan nezavisan generator, $e(t) \in \{u_g, i_g\}$. Neka je red kola r. U slučaju delovanja više generatora ili generatora sa složenijim funkcijama ekscitacije primenjujemo princip superpozicije. Nalazimo diferencijalnu jednačinu po bilo kojoj promenljivoj $y(t)$, $y(t) \in \{u_l, i_l\}$

$$A(D)y(t) = F_{y,e}(t) = B(D)e(t)$$

sa rešenjem

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Rešenje homogenog dela $y_h(t)$ nalazimo iz homogene diferencijalne jednačine $A(D)y(t) = 0$

$$y_h(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \neq \underline{s}_2 \neq \cdots \neq \underline{s}_r) \\ \displaystyle\left(\sum_{l=1}^{p} t^{l-1}\underline{K}_l\right) e^{\underline{s}_l t} + \sum_{l=p+1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \text{ je reda } p) \end{cases}$$

Partikularno rešenje je dato funkcijom istog oblika kao nehomogeni deo $F_{y,e}(t)$ koje je određeno ekscitacijom. Pa je partikularno rešenje opisano funkcijom vremena iste klase kao što je funkcija ekscitacije $y_p(t) \sim F_{y,e}(t) \sim e(t)$. Odziv može sadržati još i članove koji ne postoje u obliku funkcije ekscitacije u nekim specijalnim slučajevima.

Pitanje 61.

Odziv na *Heaviside*-ovu pobudu. Indiciona funkcija.

Neka u proizvoljnom linearnom i vremenski nepromenljivom kolu bez početne energije deluje jedan nezavisan generator sa *Heaviside*-ovom ekscitacijom:

$$e(t) = Eh(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E, & t \geq 0 \end{cases}$$

i neka je $y(t)$ odziv kola. Neka je red kola r. Pošto u kolu nema akumulirane energije, početni uslovi su

$$u_{C_k}(0^-) = 0,\ i_{L_j}(0^-) = 0.$$

Tada je odgovarajuća diferencijalna jednačina:

$$A(D)y(t) = B(D)e(t)$$

Neka je red polinoma $B(D)$ manji od reda polina $A(D)$. Neka je na primer diferencijalna jednačina odziva oblika

$$A(D)y(t) = b_0 e(t) = b_0 Eh(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ b_0 E = const. & t \geq 0 \end{cases}.$$

Kolo je bez energije, pa su svi odzivi kola za $t < 0$ jednaki nula. Dok će za $t \geq 0$ odziv biti opisan nekom funkcijom vremena $z(t)$ koju određujemo iz diferencijalne jednačine odziva. Opšte rešenje se može napisati u vidu

$$y(t) = z(t)h(t), \qquad \forall t\,.$$

Rešenje homogenog dela je oblika:

$$y_h(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \neq \underline{s}_2 \neq \cdots \neq \underline{s}_r) \\ \displaystyle\left(\sum_{l=1}^{p} t^{l-1} \underline{K}_l\right) e^{\underline{s}_l t} + \sum_{l=p+1}^{r} \underline{K}_l e^{\underline{s}_l t} & (\underline{s}_1 \text{ je reda } p) \end{cases}$$

Partikularno rešenje je u vidu konstante jer je pobuda konstantna:

$$y_p(t) = Y_p = const.$$

Zamenom $y_p(t)$ u diferencijalnu jednačinu odziva dobija se