M. Stević – S. Popović – M. Jovanović

TEK skripta

Za drugu godinu Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Verzija 0.1

Sadržaj

Pitanje 1 i 2. Pojam električnog kola i mreže. Modelovanje kola. 5
Pitanje 3. Elementi električnih kola. Podela elemenata. 5
Pitanje 4. Ulazna snaga elementa. Opšti uslov pasivnosti. 7
Pitanje 5. Rezistivni elementi sa jednim pristupom. 9
Pitanje 6. Pasivnost rezistivnih elemenata sa jednim pristupom. 11
Pitanje 7. Kapacitivni element sa jednim pristupom. 12
Pitanje 8. Akumulirana energija kondenzatora. 14
Pitanje 9. Uložena energija u kondenzator. 16
Pitanje 10. Pasivnost kondenzatora. 17
Pitanje 11. Induktivni elementi sa jednim pristupom. 19
Pitanje 12. Akumulirana energija kalema. 21
Pitanje 13. Uložena energija u kalem. 23
Pitanje 14. Pasivnost kalema. 24
Pitanje 15. Gubici kalema i faktor dobrote. 26
Pitanje 16. Neprekidnost napona kondenzatora. 28
Napon kondenzatora 28
Pitanje 17. Memorisanje napona kondenzatora 30
Pitanje 18. Neprekidnost struje kalema 30
Struja kalema. 31
Pitanje 19. Memorisanje struje kalema. 32
Pitanje 20. Elementi sa više pristupa. Opšta svojstva. 33
Pitanje 21. Rezistivni elementi sa dva pristupa. 34
Pitanje 22. Linearni rezistivni elementi sa dva pristupa. 35
Pitanje 23. Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{r}$-parametrima. 39
Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo 39
Pitanje 24. Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{g}$-parametrima. 42
Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo 42
Pitanje 25. Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{h}$-parametrima. 44
Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo 44
Pitanje 26. Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{k}$-parametrima. 45
Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo 45
Pitanje 27. Recipročnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa izražena $\boldsymbol{a}$-parametrima. 47
Teorema recipročnosti za linearno i vremenski nepromenljivo kolo 47
Pitanje 28. Simetrični rezistivni elementi sa dva pristupa. 48
Pitanje 29. Pasivnost rezistivnih elemenata sa dva pristupa. 49
Pitanje 30. Kontrolisani generator. 51
Naponski generator kontrolisan strujom (transrezistansni pojačavač). 52
Strujni generator kontrolisan naponom (transkonduktansni pojačavač) 52
Strujni generator kontrolisan strujom (strujni pojačavač) 53
Naponski generator kontrolisan naponom(naponski pojačavač) 54
Pitanje 31. Operacioni pojačavač i osnovna kola sa operacionim pojačavačima. 54
Realni operacioni pojačavač. 55
Kola sa *idealnim* operacionim pojačavačima 56
Pitanje 32. Idealni transformator. Svojstvo konvertovanja impedanse. 59
Pitanje 33. Idealni žirator. Svojstvo invertovanja impedanse. 61
Pitanje 34. Negativni impedansni konvertor i invertor. 63
Pitanje 35. Realizacije rezistivnih elemenata sa dva pristupa u opštem slučaju. 65

36. Realizacije idealnog transformatora pomoću kontrolisanih generatora 67
Pitanje 37. Realizacija idealnog žiratora pomoću kontrolisanih generatora. 68
Pitanje 38. Induktivni elementi sa dva pristupa - osnovne jednačine 69
Pitanje 39. Linearan transformator 71
Pitanje 40. Energija i pasivnost linearnog transformatora. 73
Pitanje 41. Transformator sa savršenom spregom. 75
Pitanje 42. Ekvivalentna $\boldsymbol{T}$-šema linearnog transformatora. 76
Pitanje 43. Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi savršeni transformator. 77
Pitanje 44. Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi idealan transformator. 79
Pitanje 45. Transformator sa više namotaja. 81
Pitanje 46. Formiranje osnovnih jednačina linearnih električnih kola. 82
Pitanje 47. Svođenje jednačina kola na jednu diferencijalnu jednačinu odziva. 83
Pitanje 48. Svođenje jednačina kola na sistem jednačina stanja. 83
Pitanje 49. Kako se određuje red sistema jednačina kola. 84
Pitanje 50. Šta su kalemski preseci, a šta kondenzatorske petlje? 84
Pitanje 51. Osnovna svojstva diferencijalne jednačine odziva. Ilustracija kroz primere. 85
Pitanje 52. Određivanje sopstvenog odziva. 89
Pitanje 53. Sopstveni odziv u kolima prvog reda. 90
Analiza RC-kola 90
Pitanje 54. Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Aperiodični režim. 92
Aperiodični režim $(\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\omega 0})$ 94
Pitanje 55. Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Kritičan režim. 95
Kritičan režim $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega 0}$ 97
Pitanje 56. Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Pseudoperiodičan režim. 98
Pseudoperiodičan režim $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\omega 0}$ 100
Pitanje 57. Sopstveni odziv u kolima višeg reda. 102
Pitanje 58. Osnovni vremenski oblici ekscitacija. 104
Konstantna funkcija 104
Heaviside-ova (odskočna) funkcija 104
Funkcija $\mathbf{sgn}(\boldsymbol{t})$ 105
Usponska funkcija 106
Eksponencijalna funkcija 106
Prostoperiodična funkcija 107
Složenoperiodična funkcija 108
Pravougaoni impuls. 108
Pseudoperiodična funkcija sa negativnim eksponentom. 108
Pitanje 59. Svojstvo odabiranja impulsne ekscitacije. 109
Svojstvo odabiranja 110
Pitanje 60. Određivanje odziva na delovanje ekscitacije. 110
Pitanje 61. Odziv na *Heaviside*-ovu pobudu. Indiciona funkcija. 111
Pitanje 62. Regularna i neregularna komutacija. 114
Regularna komutacija 114
Neregularna komutacija 114
Pitanje 63. Određivanje odziva na *Heaviside*-ovu pobudu „balansiranjem“ diferencijalne jednačine odziva 117
Pitanje 64. Odziv na impulsnu pobudu. *Green*-ova funkcija. 118
Posredno rešavanje 119
Direktno rešavanje 120
Pitanje 65. Odziv na usponsku i stepene funkcije vremena. 120

Pitanje 66. Veza indicione i *Green*-ove funkcije..121
Pitanje 67. Odziv na eksponencijalnu i periodičnu pobudu..122
Eksponencijalna ekscitacija 122
Prostoperiodična ekscitacija. 122
Pitanje 68. Određivanje potpunog odziva. 125
Direktno rešavanje 125
Rešavanje superpozicijom 126
Pitanje 69. Ustaljen prostoperiodičan režim. Kompleksan domen. 127
Direktno određivanje 127
Posredno određivanje 128
Pitanje 70. Funkcije mreže u ustaljenom prostoperiodičnom režimu. 129
Pitanje 71. Linearni transformator u ustaljenom prostoperiodičnom režimu. 131
Redna veza spregnutih kalemova..134
Paralelna veza spregnutih kalemova..134
Pitanje 72. Snage u ustaljenom prostoperiodicnom rezimu. 135
Čisto rezistivna mreža sa jednim pristupom (otpornik) 137
Čisto induktivna mreža sa jednim pristupom (kalem)..138
Čisto kapacitivna mreža sa jednim pristupom (kondenzator)...138
Opšti slučaj 139
Kompleksan domen..139
Pitanje 73. Faktor snage i njegova popravka. 140
Pitanje 74. Ustaljen složenoperiodičan režim. 142
Pitanje 75. Razvoj periodične funkcije u *Fourier*-ov red. 144
Pitanje 76. Kompleksan oblik *Fourier*-ovog reda. 147
Pitanje 77. Snage u ustaljenom složenoperiodičnom režimu. 148
Trenutna ulazna snaga 149
Trenutna ulazna snaga n-tog harmonika 149
Fluktuirajuća snaga..149
Srednja (aktivna) snaga 150
Prividna snaga 150
Pitanje 78. Ustaljen pseudoperiodicni rezim. 151
Pitanje 79. Rezonancija u opštem slučaju sistema koji se opisuje linearnom diferencijalnom jednačinom. 153
Pitanje 80. Idealna rezonancija u električnim kolima. 155
Pitanje 81. Rezonancija pri pobudi prostoperiodičnim generatorom. 156
Kolo bez gubitaka 157
Kolo sa gubicima..157
Pitanje 82. Idealna antirezonancija u električnim kolima. 158
Pitanje 83. Antirezonancija pri pobudi prostoperiodičnim generatorom. 160
Kolo bez gubitaka 160
Kolo sa gubicima..160
Pitanje 84. Prelaz sa *Fourier*-ovog reda na *Fourier*-ovu transformaciju. 162
Pitanje 85. Jednačine kola u domenu *Fourier*-ove transformacije. 165

Pitanje 1 i 2.

Pojam električnog kola i mreže. Modelovanje kola.

Električno kolo predstavlja skup povezanih električnih elemenata koji nema nikakvu vezu sa okolinom (autonomni sistem). Ako su elementi tako povezani da se ne može formirati zatvoren put duž elemenata, takva konfiguracija predstavlja električnu mrežu u užem smislu. U takvoj konfiguraciji se ne može uspostaviti struja u elementima osim ako na neki način ne povežemo krajeve. U širem smislu električna mreža predstavlja skup električnih elemenata koji su tako povezani da obrazuju zatvorene puteve duž njih, ali postoje i izvučeni krajevi preko kojih se može izvršiti povezivanje sa drugim elementima ili mrežama.

Razlika između električne mreže i električnog kola je u tome što električna mreža ima pristupe, za razliku od električnog kola koje predstavlja autonomni skup elemenata. Strogo govoreći, električno kolo se nikada ne može formirati jer interakcija sa okolinom uvek postoji, ali se taj uticaj moze načiniti zanemarljivo malim u odnosu na pojave koje se dešavaju unutar samog kola. Umesto toga se formira model kojim se aproksimira ponašanje tog sistema. Osnovni razlog za formiranje modela je taj da je fizički sistem obično veoma složen i nepraktičan za analizu. U većini slučajeva je složenost sistema izazvana raznim nedominantnim faktorima. Prvenstveni cilj modelovanja jeste da se zadrže samo osnovni faktori koji opisuju, sa zadovoljavajućom tačnošću, suštinu pojava u sistemu.

Pitanje 3.

Elementi električnih kola. Podela elemenata.

Element električnog kola jeste osnovni deo kola koji vrši određenu funkciju. On može biti prost (iz jednog sastavnog dela) ili složen (iz više sastavnih delova) ali takav da se ne može razložiti a da pri tom ne izgubi svoju osnovnu funkciju. Element ima izvučene krajeve (priključke) preko kojih se vezuje za druge elemente u kolu. Krajevi elemenata se nazivaju i čvorovima.

Svaki od krajeva elementa se nalazi na određenom potencijalu (V_1, V_2).

Napon između krajeva elementa (potencijalna razlika krajeva) jeste napon elementa:

$$u_{12} = v_1 - v_2 = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

Struja elementa predstavlja brzinu proticanja naelektrisanja kroz njegove priključne krajeve:

$$i_{12} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Usaglašeni smerovi: smer struje je od tačke višeg potencijala ka tački nižeg potencijala.

Klasifikacija se može vršiti na razne načine. Na osnovu broja priključaka, odnosno na osnovu broja pristupa, elementi mogu biti sa *dva* kraja (jedan pristup), sa *tri* kraja (najviše dva nezavisna pristupa) itd.

Na osnovu dominantnih fizičkih procesa koji se odvijaju u elementu oni mogu biti:

1) **Rezistivni elementi**
   Opisani su algebarskim vezama napona u_i i struja i_i na pristupima. Za element sa jednim pristupom karakteristika je oblika:
   $$F(u, i, t) = 0$$
   Ako karakteristika ne zavisi od vremena imamo:
   $$F(u, i) = 0$$
   Rezistivni elementi nemaju sposobnost akumulisanja energije. Zovu se još i nedinamički elementi ili elementi bez memorije.

2) **Induktivni elementi**
   Opisani su algebarskim vezama između struja i_j i magnetskih flukseva Φ_j. Za element sa jednim pristupom karakteristika je oblika
   $$F(\Phi, i, t) = 0$$
   Kako je
   $$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$
   to je napon na pristupu induktivnog elementa određen izvodom struje pristupa po vremenu.

   Ako karakteristika ne zavisi od vremena imamo:
   $$F(\Phi, \mathrm{i}) = 0$$
   Induktivni elementi su dinamički elementi (elementi sa memorijom) jer imaju sposobnost akumulisanja magnetne energije i stvaranja magnetnog polja.

3) Kapacitivni elementi

Opisani su algebarskim vezama između napona u_k i količina naelektrisanja q_k. Za element sa jednim pristupom relacija je

$$F(q, u, t) = 0$$

Kako je $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, to znači da će struja kapacitivnog elementa zavisiti od izvoda napona elementa po vremenu.

Kapacitivni elementi su dinamički elementi (elementi sa memorijom) jer imaju sposobnost akumulisanja električne energije i stvaranja električnog polja.

Karakteristika elementa može biti promenljiva sa vremenom. Takvi elementi se zovu vremenski promenljivi. U suprotnom oni su vremenski nepromenljivi.

Algebarske relacije koje opisuju element mogu biti linearne funkcije ili ne, na osnovu čega vršimo podelu elemenata na linearne i nelinearne.

Podela elemenata može se vršiti i na osnovu pasivnosti, recipročnosti i sl.

Pitanje 4.
Ulazna snaga elementa. Opšti uslov pasivnosti.

Snaga predstavlja brzinu promene energije elementa.

Trenutna ulazna snaga (definiše se za usaglašene referentne smerove), jednaka je proizvodu napona i struje na pristupu elementa

$$p = ui\,,$$

a za element sa n pristupa

$$p = \sum_{j=1}^{n} p_j\;, \quad p_j = u_j i_j\,.$$

Trenutna izlazna snaga definiše se za neusaglašene referentne smerove.

Za element sa jednim pristupom:

$$p_{ulE} = u_{12} i_{12}$$
$$p_{izE} = u_{12} i_{21} = -p_{ulE}$$
$$p_{ulE} + p_{izE} = 0$$
$$p_{ulN} = u_{12} i' = u_{12}(-i_{12}) = -p_{ulE} = p_{izE}$$
$$p_{ulE} + p_{ulN} = 0$$

Ulazna snaga elementa se definiše preko energije koju ostatak kola uloži u element.

Izlazna snaga se definiše preko energije koju element preda ostatku kola.

Ako je trenutna ulazna snaga elementa pozitivna tada element prima energiju od ostatka kola, a kada je trenutna ulazna snaga elementa negativna element predaje energiju ostatku kola.

Ako je trenutna ulazna snaga elementa uvek jednaka nuli, tada je element bez gubitaka.

Energija (rad) koja se spolja ulaže u element od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ predstavlja sumu elementarnih radova u tom intervalu

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}a(\tau) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = W(t) - W(t_0) + a_m(t_0, t)$$

gde je a_m mehanički rad.

Ako se do trenutka t_0 sva uložena energija akumulisala ($a_m(-\infty, t_0) = 0$) tada akumulisanu energiju u trenutku t_0 određujemo kao

$$W(t_0) = a(-\infty, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(\tau)\mathrm{d}(\tau)$$

pri čemu se podrazumeva da je $W(-\infty) = 0$.

Pasivnost elementa se određuje na osnovu uloženog rada i akumulisane energije u elementu.

Element je pasivan ako je za bilo koji trenutak t_0 i $t > t_0$ suma akumulirane energije i uloženog rada nenegativna

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Ako se sav uloženi rad akumuliše u vidu neke druge energije (magnetske ili električne), tada je uslov pasivnosti

$$w(t) \geq 0$$

$$P = \frac{a(t_0, t)}{t - t_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau, T = t - t_0$$

Pitanje 5.

Rezistivni elementi sa jednim pristupom.

Pod rezistivnim elementom sa jednim pristupom podrazumeva se idealizovan (čist) element koji je opisan samo algebarskom relacijom između napona i struje na pristupu. Ta relacija naziva se karakteristika rezistivnog elementa i za elemente sa jednim pristupom je oblika

$$F(u, i, t) = 0,$$

a ako se karakteristika ne menja sa vremenom onda je oblika

$$F(u, i) = 0.$$

Rezistivni elementi sa jednim pristupom nazivaju se *otpornici*. Kod njih se vrši nereverzibilan proces pretvaranja uložene električne energije u drugi vid energije, pa se elementi sa ovim svojstvom nazivaju i elementi sa gubicima.

Neki rezistivni elementi imaju mogućnost da duže vreme predaju energiju drugim elementima u kolu i oni se nazivaju *generatori*.

Rezistivni elementi su:

1) ***Strujno kontrolisani*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $u = f(i, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti struje odgovara samo jedna vrednost napona, ali obrnuto ne mora da važi.

2) ***Naponski kontrolisani*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $i = g(u)$. U tom slučaju svakoj vrednosti napona odgovara samo jedna vrednost struje, ali obrnuto ne mora da važi.

3) ***Kontrolisani i strujom i naponom*** i njihova karakteristika je striktno monotona, a može biti rastuća ili opadajuća.

Rezistivni elementi su *linearni* ukoliko je $u = ki$, a u suprotnom su *nelinearni*.

Rezistivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.

2) ***Unilateralni*** ukoliko karakteristika rezistivnog elementa nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva. Ovakvi elementi su uvek nelinearni.

Rezistivni elementi su *vremenski promenljivi* ukoliko im karakteristika zavisi od vremena, a u suprotnom su *vremenski nepromenljivi*.

Otpornost je osnovni parametar kojim je karakterisan otpornik.

Dinamička otpornost se definiše nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$R = \left.\frac{\partial u}{\partial i}\right|_M = \tan\alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti napona i struje na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je $R = R(u, i, t)$.

Statička otpornost je količnik napona i struje koji definišu radnu tačku, označava se sa R_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke otpornosti

$$R_0 = \frac{U}{I} = \tan\alpha_0 = R_0(u, i, t) \neq R(u, i, t).$$

Dinamička provodnost:

$$G = \left.\frac{\partial i}{\partial u}\right|_M = \tan\beta = G(u, i, t) = R^{-1}$$

Statička provodnost:

$$G_0 = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_0}$$

U slučaju linearnog otpornika dinamička i statička otpornost su jednake u svakoj tački karakteristike *u posmatranom trenutku* jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je on potpuno definisan vrednošću statičke otpornosti (provodnosti) jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije:

$$R = \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial i} = \frac{U}{I} = \tan\alpha_0 = R_0$$

odnosno,

$$u = Ri = R_0 i$$
$$i = Gu = G_0 u$$

pri čemu je $G = R^{-1}$.

Ako je otpornik i vremenski nepromenljiv onda važi i

$$(\forall t) R = R(t) = R_0 = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju otpornika.

Pitanje 6.
Pasivnost rezistivnih elemenata sa jednim pristupom.

Trenutna ulazna snaga otpornika sa jednim pristupom određena je opštom relacijom:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

kao za bilo koji element sa jednim pristupom. Smerovi napona i struje na pristupu su usaglašeni.

Za naponsko kontrolisan otpornik:

$$p(t) = u(t)g[u(t)]\,,$$

a za strujno kontrolisan otpornik:

$$p(t) = i(t)f[i(t)]\,.$$

Uložena energija u otpornik od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određena je opštom relacijom:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{\mathrm{t}} u(\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Pasivnost otpornika je definisana opštim uslovom pasivnosti:

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako je otpornik element bez memorije (ne akumuliše energiju) imamo da je

$$W(t_0) = 0\,,$$

pa se pasivnost otpornika svodi na uslov

$$a(t_0, t) \geq 0$$

za bilo koje t_0 i $t > t_0$ i za sve moguće vrednosti napona i struje na pristupu.

Vidimo da mora da važi:

$$p(t) = u(t)i(t) \geq 0,$$

što znači da struja i napon pasivnog otpornika uvek moraju biti istog znaka (karakteristika prolazi samo kroz I i III kvadrant u $u - i$ ravni). Otpornik koji ne zadovoljava ovaj uslov je aktivan. Ovim je definisana *globalna pasivnost (aktivnost) otpornika*.

Definise se još i *lokalna pasivnost (aktivnost) otpornika*. Otpornik je lokalno pasivan u radnoj tački M ako je priraštaj uložene snage u otpornik u okolini radne tačke nenegativan:

$$\Delta p \;=\; \Delta u \Delta i \;\geq\; 0$$

što praktično znači da je njegova dinamička otpornost (nagib tangente na karakteristiku $u{\sim}i$) nenegativna u toj tacki, a ukoliko je ona negativna otpornik je *lokalno aktivan*.

Ako je $p(t) = u(t)i(t) = 0$ za svako t, otpornik je bez gubitaka.

Pitanje 7.
Kapacitivni element sa jednim pristupom.

Kapacitivni element sa jednim pristupom se nazivaju kondenzatori. Oni su opisani algebarskom relacijom između količine naelektrisanja i napona na pristupu

$$F(q, u, t) = 0$$

a imaju i sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije. Ako se karakteristika ne menja sa vremenom ona je oblika

$$F(q, u).$$

Kapacitivnost pločastog kondenzatora je

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

gde je ε - dielektrična konstanta, S – površina obloga, d - debljina dielektrika.

Struja kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Kapacitivni elementi su:

1) ***Naponski kontrolisani*** ukoliko je karakteristika kapacitivnog elementa oblika $q = f(u, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti napona odgovara samo jedna vrednost opterećenja, ali obrnuto ne mora da važi.

2) ***Kontrolisani opterećenjem*** ukoliko je njegova karakteristika oblika $u = g(q, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti opterećenja odgovara samo jedna vrednost napona, ali obrnuto ne mora da važi.

3) ***Kontrolisani i opterećenjem i naponom*** i tada je njihova karakteristika strogo monotona, a može biti i rastuća i opadajuća.

Kapacitivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ako je karakteristika kondenzatora simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.
2) ***Unilateralni*** ako karakteristika kondenzatora nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva u kolo.

Kapacitivnost je osnovni parametar kojim je okarakterisan kondenzator.

Dinamička kapacitivnost definiše se nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$C = \left.\frac{\partial q}{\partial u}\right|_M = \tan\alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti opterećenja i napona na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je

$$C = C(q, u, t).$$

Statička kapacitivnost je količnik opterećenja i napona koji definišu radnu tačku, označava se sa C_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke kapacitivnosti:

$$C_0 = \frac{Q}{U} = \tan\alpha_0 = C_0(q, u, t) \neq C(q, u, t)$$

U slučaju linearnog kondenzatora dinamička i statčka kapacitivnost su jednake u svakoj tački karakteristike *u posmatranom trenutku* jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je on potpunosti definisan vrednošću statičke kapacitivnosti jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije:

$$C = \tan\alpha = \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{Q}{U} = C_0.$$

Ako je kondenzator i *vremenski nepromenljiv* važi

$$(\forall t)C = C(t) = Co = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju kondenzatora.

Struja *linearnog* kondenzatora je

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[C(t)u(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}u(t) + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t},$$

a ako je i *vremenski nepromenljiv* onda je

$$i(t) = C_0 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Elastansa (recipročna kapacitivnost) se određuje kao nagib tangente na krivu

$$u = g(q)$$

$$S = \left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_M = \tan\beta.$$

Pitanje 8.
Akumulirana energija kondenzatora.

Kondenzatori imaju sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije. Akumulirana energija kondenzatora u nekom trenutku t može se odrediti eksperimentalno, na nekom konkretnom primeru, npr. na sledeći način.

Za krajeve kondenzatora, čija se akumulirana energija određuje, veže se, u trenutku t, linearan vremenski nepromenljiv i pasivan otpornik otpornosti R.

Ako je kolo autonomno tada će energija koja se u otporniku nepovratno pretvori u toplotu, od trenutka t do $+\infty$ biti jednaka akumulisanoj energiji kondenzatora u početnom trenutku t

$$a_R(t,\infty) = \int_t^{\infty} u_R(\tau)i_R(\tau)\mathrm{d}\tau = W_C(t)$$

Kako je

$$i_R = -i$$
$$u_R = u$$
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

sledi da je

$$W_C(t) = -\int_t^{\infty} u(\tau)\frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\,.$$

Ako je karakteristika kondenzatora q – *kontrolisana*, tada je napon na njegovim krajevima

$$u(\tau) = g[q(\tau), t],$$

Napomenimo da smo karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

Dalje je:

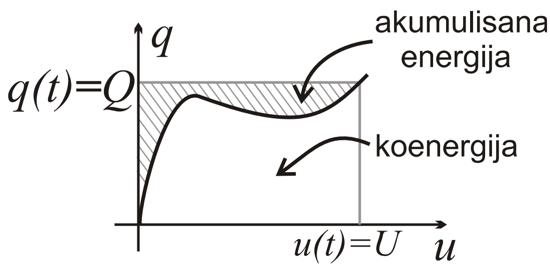
$$W_C(t) = -\int_t^{\infty} g[q(\tau), t] \frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau = \int_{q(\infty)}^{q(t)} g[q(\tau), t] \,\mathrm{d}q(\tau)$$

Otpornik je po pretpostavci pasivan, što znači da on samo prima energiju od ostatka kola, odnosno kondenzatora, tako da će se kondenzator posle dovoljno dugo vremena isprazniti, tj. $q(\infty) = 0$.

Dakle, akumulirana energija kondenzatora je

$$W_C(t) = \int_0^{q(t)} g[q(\tau), t] \mathrm{d}q(\tau)$$

Akumulirana energija kondenzatora u nekom trenutku *t* određena je opterećenjem u tom trenutku, ali i karakteristikom u tom trenutku. Početni uslovi nisu jedine veličine koje određuju akumuliranu energiju kondenzatora, već na nju utiče i oblik karakteristike.



Nekad je teško izračunati akumuliranu energiju, naročito kada karakteristika kondenzatora nije q-kontrolisana. Tada je lakše izračunati komplement akumulisane energije koji nazivamo koenergija.

Ako je kondenzator *kontrolisan naponom*, tada imamo

$$q(\tau) = f(u_c(\tau), t)$$

Napomenimo da smo i ovde karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

$$W_{KOC}(t) = \int_0^{u(t)} f[u(\tau), t] \mathrm{d}u(\tau)$$

$$W_{tot}(t) = W_C(t) + W_{KOC}(t) = QU$$

$$W_C(t) = QU - W_{KOC}(t)$$

Samo za linearan kondenzator određujemo akumuliranu energiju na osnovu početnog uslova kao:

$$W_C(t) = \int_{q(\tau)=q(\infty)=0}^{q(t)} \frac{q(\tau)}{C(t)} \mathrm{d}q(\tau) = \frac{1}{C(t)}\frac{1}{2}[q^2(\tau)]_{\tau=0}^{q(t)} = \frac{1}{2C(t)}q^2(t) = \frac{1}{2C(t)}u^2(t)C^2(t)$$

Pitanje 9.

Uložena energija u kondenzator.

Rad koji se ulaže u kondenzator od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određen je opštom relacijom

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u_C(\tau)i_C(\tau)\mathrm{d}\tau \,,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga u kondenzator.

Poznato je da važi

$$i_C(\tau) = \frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}.$$

za q-*kontrolisan* kondenzator je $u_c(\tau) = g(q(\tau), t)$, gde je t fiksirano.

Dalje je:

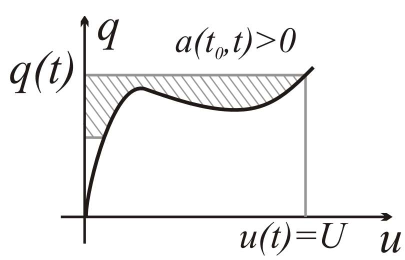
$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} g(q(\tau), t) \, \frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} g(q(\tau), t) \, \mathrm{d}q(\tau).$$

Ako je kondenzator *vremenski nepromenljiv* onda važi:

$$a(t_0, t) = \int_{0}^{q(t)} g(q)\mathrm{d}q - \int_{0}^{q(t_0)} g(q)\mathrm{d}q$$

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) = \Delta W_C$$

Sledi da je uloženi rad jednak priraštaju akumulirane energije od t_0 do $t > t_0$.



Za vremenski promenljive kondenzatore važi

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) + a_m(t_0, t) \ ,$$

gde je $a_m(t_0, t)$ mehanički rad koji izvrše elektrostatičke sile pri promeni konfiguracije kondenzatora.

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_C}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau$$

Ako je $a(t_0, t) < 0$ kondenzator *predaje energiju* ostatku kola, a ako je $a(t_0, t) > 0$ kondenzator *prima energiju* od ostatka kola.

Pitanje 10.

Pasivnost kondenzatora.

Polazeći od opšteg uslova pasivnosti dobijamo da je kondenzator pasivan ako je za proizvoljan trenutak t_0 i $t > t_0$, suma akumulirane energije u trenutku t_0, $w_C(t_0)$, i uložene energije od t_0 do t, $a(t_0, t)$ nenegativna

$$W_C(t_0) + a(t_0, t) \geq \ 0$$

Kako opštem slučaju važi

$$a(t_0, t) = W_C(t) - W_C(t_0) + a_m(t_0, t)$$

uslov pasivnosti se svodi na

$$w_C(t) \ + \ a_m(t_0, t) \ \geq \ 0,$$

gde je

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_C}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau \ .$$

Dobijamo da moraju da važe uslovi:

$$W_C(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\partial W_C}{\partial t} \leq 0$$

Za *vremenski nepromenljive* kondenzatore mehanički rad je jednak nuli pa se uslov pasivnosti svodi na:

$$w_C(t) \ \geq \ 0$$

što mora biti ispunjeno za svako t i za sve moguće varijacije napona na pristupu kondenzatora.

Za *linearne* kondenzatore uslov pasivnosti se svodi na uslove:

$$C(t) \ \geq \ 0 \text{ i } \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} \geq \ 0.$$

Dokaz:
Izvod snage koja se ulaže u kondenzator po vremenu je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = p(t) = \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_C(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} + 0 + p_m(t)$$

gde je

$$p(t) = u(t)i(t) = u(t)\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

pa iz linearnosti kondenzatora sledi

$$p(t) = u(t)\frac{\mathrm{d}\big(C(t)u(t)\big)}{\mathrm{d}t} = u(t)\left[u(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} + C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right].$$

Iz linearnosti kondenzatora takođe sledi i:

$$\frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}C(t)u^2(t)\right] = \frac{1}{2}u^2(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} + C(t)u(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Dalje je:

$$p_m(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} = p(t) - \frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}u^2(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$a_m(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} u^2(\tau)\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Sledi da je uslov pasivnosti:

$$w_C(t) \ + \ a_m(t_0, t) \ \geq \ 0,$$

za *linearne* kondenzatore ekvivalentan uslovu:

$$\frac{1}{2}C(t)u^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} u^2(\tau)\frac{\mathrm{d}C(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \geq 0$$

što je ispunjeno za $C(t) > 0$ i $\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} > 0$.

Pitanje 11.
Induktivni elementi sa jednim pristupom.

Induktivni elementi sa jednim pristupom naziva se kalem. Najčešće se realizuje kao određen broj zavojaka žice namotan na telo (jezgro) pogodnog oblika.

U tim zavojcima pod dejstvom promenljive struje stvara se fluks magnetske indukcije. Stoga u električnom pogledu kalem je opisan algebarskom relacijom između magnetnog fluksa i struje na pristupu elemnta. Ta relacija naziva se karakteristika induktivnog elementa i za elemente sa jednim pristupom je oblika

$$F(\Phi, i, t) = 0$$

a ako se karakteristika ne menja sa vremenom onda je oblika

$$F(\Phi, i) = 0.$$

Induktivni elementi imaju sposobnost akumulisanja magnetske energije. Kod ovih elemenata su jako (jače nego kod otpornika i kondenzatora) prisutni parazitni efekti.

Napon kalema definišemo na sledeći način

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

Induktivni elementi su:

1) ***strujno kontrolisani*** ukoliko je karakteristika induktivnog elementa oblika $\Phi(t) = f(i, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti struje odgovara samo jedna vrednost fluksa, ali obrnuto ne mora da važi.

2) ***kontrolisani fluksom*** ukoliko je karakteristika rezistivnog elementa oblika $i = g(\Phi, t)$. U tom slučaju svakoj vrednosti fluksa odgovara samo jedna vrednost struje, ali obrnuto ne mora da važi.

3) ***Kontrolisani i strujom i fluksom*** i njihova karakteristika je striktno monotona, a može biti rastuća ili opadajuća.

Induktivni elementi su ***linearni*** ukoliko je $\Phi = ki$, a u suprotnom – ***nelinearni***.

Induktivni elementi su:

1) ***Bilateralni*** ukoliko je karakteristika induktivnog elementa simetrična u odnosu na koordinatni početak. Za ovakve elemente nije bitno kako su vezani u kolo.

2) ***Unilateralni*** ukoliko karakteristika induktivnog elementa nije simetrična u odnosu na koordinatni početak. Kod ovakvih elemenata treba voditi računa o redosledu vezivanja krajeva. Ovakvi elementi su uvek nelinearni.

Induktivni elementi su *vremenski promenljivi* ukloiko im karakteristika zavisi od vremena, a u suprotnom su vremenski *nepromenljivi*.

Induktivnost je osnovni parametar kojim je karakterisan kalem.

Dinamička induktivnost se definiše nagibom tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M:

$$C = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial i}\right|_M = \tan\alpha,$$

pri čemu je radna tačka određena parom vrednosti fluksa i struje na karakteristici elementa.

U opštem slučaju je

$$L = L(\Phi, i, t)\ .$$

Statička induktivnost je količnik fluksa i struje koji definišu radnu tačku, označava se sa L_0 i u opštem slučaju je različita od dinamičke induktivnosti

$$L_0 = \frac{\Phi}{I} = \tan\alpha_0 = L_0(\Phi, i, t) \neq L(\Phi, i, t).$$

U slučaju *linearnog kalema* dinamička i statička induktivnost su jednake u svakoj tački karakteristike u posmatranom trenutku jer se tangenta poklapa sa karakteristikom, pa je kalem potpuno definisan vrednošću statičke induktivnosti jer su na njegovom pristupu u svakom trenutku zadovoljene relacije

$$L = \tan\alpha = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} = \frac{\Phi}{I} = \alpha_0 = L_0.$$

odnosno,

$$\Phi = Li = L_0 i\ .$$

Ako je kalem i vremenski nepromenljiv važi:

$$(\forall t)\ \ L = L(t) = L_0 = const.$$

i to je parametar koji se obično navodi pri opisivanju kalema.

Napon linearnog kalema je

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[L(t)i(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}\, i(t) + \frac{L(t)\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

a ako je i vremenski nepromenljiv onda je

$$u(t) = L_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Pitanje 12.
Akumulirana energija kalema.

Kalem ima sposobnost akumulisanja magnetske energije. Akumulirana energija kalema u nekom trenutku t može se odrediti eksperimentalno, na nekom konkretnom primeru, npr. na sledeći način

Za krajeve kalema, čija se akumulisana energija određuje, veže se, u trenutku t, linearan vremenski nepromenljiv i pasivan otpornik otpornosti R.

Ako je kolo autonomno tada će energija koja se u otporniku nepovratno pretvori u toplotu, od trenutka t do $+\infty$ biti jednaka akumuliranoj energiji kalema u početnom trenutku t

$$a_R(t, \infty) = \int_t^{\infty} u_R(\tau) i_R(\tau) \mathrm{d}\tau = W_L(t)$$

Kako je

$$i_R = -i$$
$$u_R = u$$
$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

sledi da je

$$W_L(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Ako kalem *kontrolisan fluksom*, tada je struja na njegovim krajevima:

$$i(\tau) = g[\Phi(\tau), t]\,.$$

Napomenimo da smo karakteristiku kondenzatora fiksirali u trenutku t!

Dalje je:

$$W_L(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot g[\Phi(\tau), t]\mathrm{d}\tau = \int_{\Phi(\infty)}^{\Phi(t)} g[\Phi(\tau), t]\, \mathrm{d}\Phi(\tau)$$

Otpornik je po pretpostavci pasivan, što znači da on samo prima energiju od ostatka kola, odnosno kalema, tako da će se fluks kroz kalem posle dovoljno dugo vremena iščeznuti, tj. $\Phi(\infty) = 0$.

Dakle, akumulirana energija kalema je

$$W_L(t) = \int_0^{\Phi(t)} g[\Phi(\tau), t] \mathrm{d}\Phi(\tau)$$

Akumulirana energija kalema u nekom trenutku t određena je opterećenjem u tom trenutku, ali i karakteristikom u tom trenutku. Početni uslovi nisu jedine veličine koje određuju akumuliranu energiju kalema, već na nju utiče i oblik karakteristike.

Nekad je teško izračunati akumuliranu energiju, naročito kada karakteristika kalema nije Φ-kontrolisana. Tada je lakše izračunati komplement akumulisane energije koji nazivamo koenergija.

Ako je kalem *kontrolisan strujom*, tada imamo:

$$\Phi(\tau) = f(i_L(\tau), t)$$

Napomenimo da smo i ovde karakteristiku kalema fiksirali u trenutnku t!

$$W_{KOL}(t) = \int_0^{i(t)} f[i(\tau), t] \mathrm{d}i(\tau)$$

$$W_{tot}(t) = W_L(t) + W_{KOL}(t) = \Phi\, I$$

$$W_L(t) = \Phi\, I - W_{KOL}(t)$$

Samo za *linearan* kalem određujemo akumuliranu energiju na osnovu početnog uslova kao

$$W_L(t) = \int_{\Phi(\tau)=\Phi(\infty)=0}^{\Phi(t)} \frac{\Phi(\tau)}{L(t)} \mathrm{d}\Phi(\tau) = \frac{1}{L(t)} \frac{1}{2} [\Phi^2(\tau)]_{\tau=0}^{\Phi(t)} = \frac{1}{2L(t)} \Phi^2(t) = \frac{1}{2L(t)} i^2(t) L^2(t)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L(t) i^2(t) = \frac{1}{2} \Phi(t) i(t)$$

Pitanje 13.
Uložena energija u kalem.

Rad koji se ulaže u kalem od trenutka t_0 do trenutka $t > t_0$ određen je opštom relacijom

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u_L(\tau) i_L(\tau)\mathrm{d}\tau \,,$$

gde je $p(t)$ trenutna ulazna snaga u kalem.

Poznato je da važi

$$u_L(\tau) = \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$$

Za kalem *kontrolisam fluksom* $i_L(\tau) = g(\Phi(\tau), t)$, gde je t fiksirano.

Dalje je:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\Phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot g(\Phi(\tau), t)\, \mathrm{d}\tau = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} g(\Phi(\tau), t)\, \mathrm{d}\Phi(\tau)\,.$$

Ako je kalem *vremenski nepromenljiv* onda:

$$a(t_0, t) = \int_{0}^{\Phi(t)} g(\Phi)\mathrm{d}\Phi - \int_{0}^{\Phi(t_0)} g(\Phi)\mathrm{d}\Phi$$

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) = \Delta W_L$$

Sledi da je uloženi rad jednak priraštaju akumulirane energije od t_0 do $t > t_0$.

Za *vremenski promenljiv* kalem

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) + a_m(t_0, t)$$

gde je $a_m(t_0, t)$ mehanički rad koji izvrše magnetske sile pri promeni konfiguracije kalema.

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_L}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau$$

Ako je $a(t_0, t) < 0$ kalem *predaje energiju* ostatku kola, a ako je $a(t_0, t) > 0$ kalem *prima energiju* od ostatka kola.

Pitanje 14.

Pasivnost kalema.

Polazeći od opšteg uslova pasivnosti dobijamo da je kalem pasivan ako je za proizvoljan trenutak t_0 i $t > t_0$, suma akumulirane energije u trenutku t_0, $W_L(t_0)$, i uložene energije od t_0 do t, $a(t_0, t)$ nenegativna:

$$W_L(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

Kako opštem slučaju važi

$$a(t_0, t) = W_L(t) - W_L(t_0) + a_m(t_0, t)$$

uslov pasivnosti se svodi na

$$w_L(t) + a_m(t_0, t) \geq 0,$$

gde je

$$a_m(t_0, t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial W_L}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau .$$

Dobijamo da moraju da važe uslovi

$$W_L(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\partial W_L}{\partial t} \leq 0.$$

Za *vremenski nepromenljiv kalem* mehanički rad je jednak nuli pa se uslov pasivnosti svodi na

$$W_L(t) \geq 0$$

što mora biti ispunjeno za svako t i za sve moguće varijacije struje na pristupu kalema.

Za linearan kalem uslov pasivnosti se svodi na uslove

$$L(t) \geq 0 \text{ i } \frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} \geq 0.$$

Dokaz: Izvod snage koja se ulaže u kalem po vremenu je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = p(t) = \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_L(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} + 0 + p_m(t)$$

gde je

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} i(t)$$

pa iz linearnosti kalema sledi

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}\big(L(t)i(t)\big)}{\mathrm{d}t} i(t) = i(t)\left[i(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + L(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right].$$

Iz linearnosti kalema takođe sledi i

$$\frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}L(t)i^2(t)\right] = \frac{1}{2}i^2(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} + L(t)i(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dalje je:

$$p_m(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} = p(t) - \frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}i^2(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$a_m(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p_m(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{\mathrm{d}L(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Sledi da je uslov pasivnosti:

$$W_{L(t)} + a_m(t_0, t) \geq 0 \,,$$

za *linearne kondenzatore* ekvivalentan uslovu:

$$\frac{1}{2}L(t)i^2(t) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} i^2(\tau)\frac{\mathrm{d}L(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \geq 0$$

što je ispunjeno za L$(t) > 0$ i $dL(t)/dt > 0$.

Pitanje 15.
Gubici kalema i faktor dobrote.

Pod pojmom gubitak podrazumeva se nereverzibilni proces pretvaranja uložene električne energije u neki drugi vid energije. Gubici kod kalema su: gubici usled skin efekta, gubici usled efekta blizine i gubici usled vrtložnih struja.

Ako kalem poseduje jezgro od feromagnetskog materijala tada nastaju i specifični histerezisni gubici koji su srazmerni površini histerezisne petlje.

Elementarni uloženi rad je

$$\mathrm{d}a = i(\Phi)\mathrm{d}\Phi$$

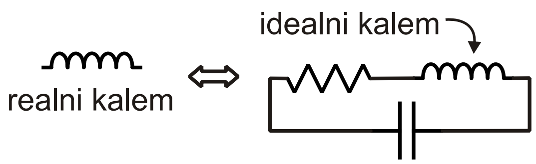
Od tačke A do tačke B rad je pozitivan – kalem prima energiju;

Od tačke B to tačke C rad je negativan – kalem daje energiju;

Od tačke C do tačke D rad je pozitivan – kalem prima energiju; itd...

Kalem od kola prima više energije nego što odaje kolu. Uočavamo da je razlika primljene i predane energije jednaka površini histerezisa. Ta razlika predstavlja gubitke energije.

Svi gubici kalema mogu se predstaviti ekvivalentnom realnom otpornošću, tj. otpornošću gubitaka.



Kalem je kvalitetniji ukoliko su njegovi gubici manji. Kao merilo kvaliteta kalema koristi se faktor dobrote, ***Q – faktor***. On predstavlja odnos maksimalne akumulirane energije kalema i rada koji se u njemu nepovratno izgubi u vidu toplote za vreme jedne periode naizmenične struje:

$$Q = 2\pi \frac{W_{Lmax}}{a_R(T)}$$

Maksimalna akumulirana energija *linearnog* kalema je

$$W_{Lmax} = \frac{1}{2} L i_{Lmax}^2$$

Rad koji se za vreme T ulaže u nepovratne procese je

$$a_R(t) = RI_L^2T,$$

gde je I_L efektivna vrednost periodične struje $i_L(t)$ sa periodom T:

$$I_L = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} i_L^2(t)\mathrm{d}t}$$

Ako je struja kalema prostoperiodična:

$$I_L(t) = I_m\cos(L\omega t + \psi)$$

maksimalna akumulirana energija će biti

$$W_{Lmax} = \frac{1}{2}LI_m^2\ ,$$

a efektivna vrednost struje je

$$I_L = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

tako da je

$$Q_L = \frac{2\pi L}{RT}\ .$$

Kako je

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ ,$$

faktor dobrote kalema je

$$Q_L = \frac{L\omega}{R}\ .$$

Značaj uvođenja Q-faktora za opisivanje kalema ogleda se u tome što je vrednost ovog parametra konstantna u relativno širokom opsegu učestanosti.

Pored induktivnosti i Q-faktora, za fizičke kalemove je potreban i podatak o maksimalnoj dozvoljenoj struji I_{max} što je određeno zagrevanjem provodnika i njegovom sposobnošću da disipira toplotu okolini.