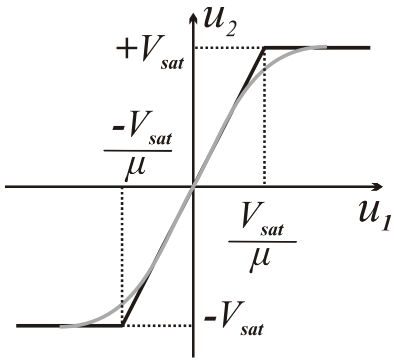
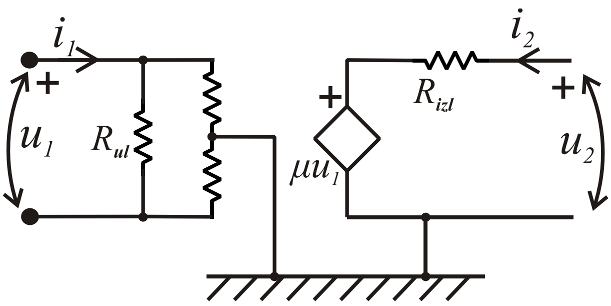
Realni operacioni pojačavač

Kod realnih OP-a, s obzirom na veliko pojacanje ($\mu > 10^4$) ulazni napon je *blizak* vrednosti nula u aktivnoj radnoj oblasti.



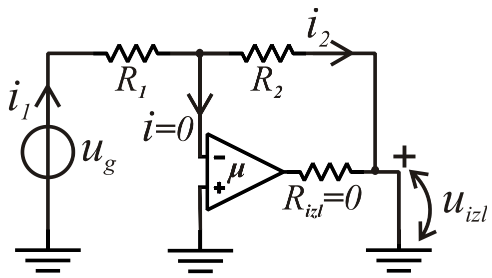
Pri veoma malim vrednostima ulaznog napona (oko nule) karakteristika je linearna sa nagibom μ. Pri većim vrednostima ulaznog napona karakteristika smanjuje nagib - pojačanje μ opada. Pri vrednostima ulaznog napona $u_1 > u_{1g}$ i $u_1 < u_{1d}$ nastaje zasićenje (saturacija) pojačavača, što znači da je izlazni napon jednak (približno) naponu saturacije V_{satg} odnosno $-V_{satd}$, a pojačanje opada na nulu. Zaključujemo da se realan OP ponaša kao linearan element u veoma uskoj oblsti ulaznih napona – $\frac{V_{satd}}{\mu} < u_1 < \frac{V_{satg}}{\mu}$, dok se za ulazne napone van ovog opsega na izlazu ponaša kao idealan naponski generator sa vrednostima napona V_{satg}, odnosno $-V_{satd}$.



Kola sa *idealnim* operacionim pojačavačima

Negativna povratna sprega

Proširenje linearne oblasti rada OP-a se ostvaruje primenom negativne povratne sprege.



Karakteristike idealnog OP-a

$$i_- = i_+ = 0 \Longrightarrow i_2 = i_1$$
$$u_1 = 0 \Longrightarrow v_A = 0$$

jednačine kola su:

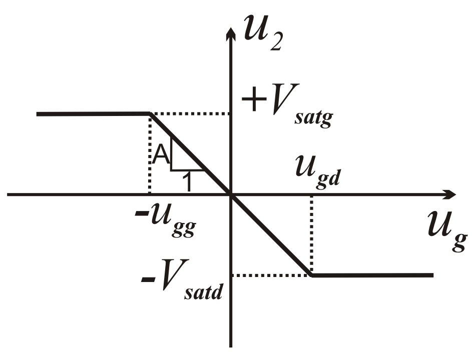
$$u_g = R_1 i_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{u_g}{R_1} \quad (\mathbf{1})$$
$$u_{izl} = -i_2 R_2 = -i_1 R_1 \quad (\mathbf{2})$$

Uvrštavanjem $(\mathbf{1})$ u $(\mathbf{2})$ dobijamo

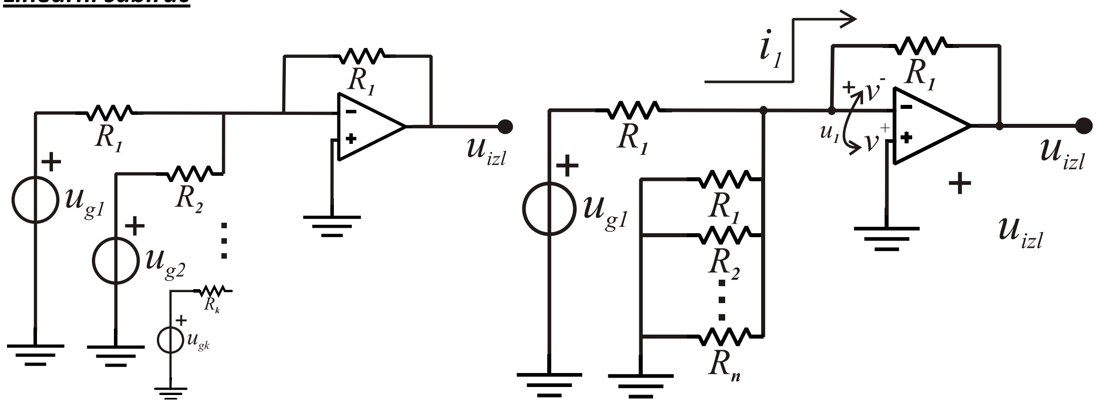
$$u_{izl} = -\frac{R_2}{R_1} u_g, \qquad A = -\frac{R_2}{R_1}$$

Ovim smo linearnu oblast ulazno-izlazne naponske karateristike proširili. Sada zasićenje nastupa pri vrednostima generatora:

$$u_{gg} = \frac{V_{satg}}{A}$$
$$u_{gd} = \frac{V_{satd}}{A}$$



Linearni sabirač



Kolo rešavamo superpozicijom.

$$v_+ = 0$$
$$u_1 = v_+ - v_- = 0$$

Pa sledi:

$$v_- = 0,$$

što znači da je mreža otpornika kratko spojena.

$$i_- = i_+ = 0 \Longrightarrow i_2 = i_1$$
$$u_{g1} = R_1 i_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{u_{g1}}{R_1}$$
$$u_{izl}^{(1)} = -i_1 R$$

uvrštavanjem i_1 u poslednju jednačinu dobijamo

$$u_{izl}^{(1)} = -\frac{R}{R_1} u_{g1}$$

Konačno, primenom superpozicije dobijamo

$$u_{izl} = \sum_{i=1}^{n} k_i u_{gi}\,, \qquad k_i = -R/R_i$$

Integrator

$$
\begin{aligned}
i_{-} &= i_{+} = 0 \Rightarrow i_2 = i_1 \\
u_1 &= 0 \Rightarrow v_A = 0 \\
u_g &= R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u_g}{R_1} \\
i_1 &= i_2 = C_2 D^1 u_c \Rightarrow u_C = \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau \\
u_{izl} &= -u_C = -\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem i_1 u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$u_{izl} = -\frac{1}{C_2 R_1}\int_{-\infty}^{t} i_g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Kolo za diferenciranje

$$
\begin{aligned}
i_{-} &= i_{+} = 0 => i_2 = i_1 \\
u_1 &= 0 => v_A = 0 \\
u_g &= u_c \\
i_1 &= C_1 D u_c = C_1 D u_g \\
u_{izl} &= -R_2 i_2 = -R_2 i_1
\end{aligned}
$$

uvrštavanjem i_1 u prethodnu jednačinu dobijamo:

$$u_{izl} = -R_2 C_1 D u_g \ .$$

[1] Operator D označava diferenciranje po vremenu, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

Pitanje 32.
Idealni transformator. Svojstvo konvertovanja impedanse.

Idealni transformator ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara.

Postoje dva tipa idealnog transformatora.

Karakteristika idealnog transformatora opisana je relacijama:

Tip I

$$u_1 = mu_2$$
$$i_1 = -\frac{i_2}{m}$$
$$[a] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

Tip II

$$u_1 = -mu_2$$
$$i_1 = i_2/\,m$$
$$[a] = \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -1/m \end{bmatrix}$$

Bezdimenzioni broj $m > 0$ naziva se prenosni broj idealnog transformatora (odnos transformacije).

Pored a-parametara, idealan transformator ima jos i b-, h- i k-parametre. Nema r- i g- parametre jer se ne može predstaviti u strujno kontrolisanom niti naponsko kontrolisanom obliku.

Ovo je u suštini rezitivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0\,.$$

Pošto je $p(t) = 0$ za svako u_1, i_1, u_2, i_2 sledi da je element pasivan, tačnije bez gubitaka. Otuda i naziv idealni jer on ukazuje da element ne troši nikakvu energiju već se energija uložena na jednom pristupu bez ikakvih gubitaka predaje mreži vezanoj za drugi pristup elementa.

Na osnovu matrice a-parametara uslov recipročnosti je det $[a] = 1$ pa zaključujemo da je ovaj element recipročan.

Uslov simetričnosti izražen a-parametrima glasi:

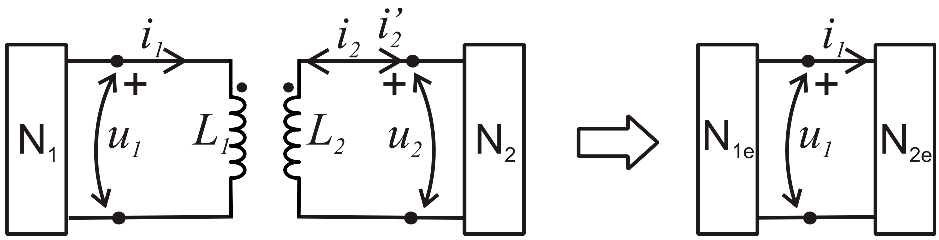
$$a_{11} = a_{22}$$

a u ovom slučaju se on svodi na

$$m = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1\,.$$

Naziv transformator se ovde koristi iz dva osnovna razloga. Prvi je taj što se ovim elementom vrši transformacija otpornosti (u opštem slučaju impedanse), a drugi je taj što se ovim elementom pri izvesnim aproksimacijama i uslovima može opisati induktivni transformator.

Osobina konvertovanja impedanse jeste jedna od osnovnih osobina koja se koristi u primeni idealnog transformatora. Neka je dato kolo sa dve mreže sa jednim pristupom N_1 i N_2 i idealnim transformatorom prenosnog broja m.



Neka je mreža N_2 linearna[2], dobro definisana[3] i strujno kontrolisana. Za pristup te mreže važi $u_2 = f(i_2')$, gde $f(i_2')$ predstavlja funkcionalnu zavisnost napona u_2 od struje i_2' te mreže.

Karakteristike idealnog transformatora su:

$$u_1 = m u_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2 = \frac{1}{m} i_2'$$

$$u_1 = m\, f(i_2') = -m\, f(i_2) = m\, f(m\, i_1) = m_2 f(i_1)$$

Veza napon-struja na ulazu $u_1 - i_1$ je isto oblika $u_1 = f(i_1)$, izuzev linearnog koeficijenta koji iznosi m^2.

Iz ovoga sledi da mreža N_1, vezana za pristup 1 idealnog transformatora "vidi" ekvivalentnu mrežu N_{2e}, koja je istog sastava (topologije) kao mreza N_2, uz napomenu da je izvršena tranformacija impedansi. Svaki otpornik otpornosti R_i mreže N_2 "preslikan" je na primarnu stranu u vidu otpornosti $R_{ie} = m^2 R_i$, svaki induktivni kalem L_j "preslikava se" u $L_{je} = m^2 L_j$, a svaki kondenzator elastanse $S_k = 1/C_k$ u

[2] *Mreža je linearna ako se sastoji od linearnih elemenata. Veza između napona i struje na pristupu toj mreži ne mora biti linearna.*
[3] *Nemamo pojma šta ovo znači*

$S_{ke} = m^2 S_k$, što znači da je izvršena transformacija impedansi i to sa istim značenjem (jer se kao skala faktor javlja poztivna vrednost m^2). Idealan transformator se zbog toga naziva i *pozitivni impedansni konvertor*.

Na isti način za naponsko kontrolisanu mrežu N_2, opisanu vezom $i_2' = g(u)$ na primarnoj strani bi se dobila veza u-i oblika: $i_1 = 1/m^2\, g(u_1)$. To znači da se svaki otpornik provodnosti G_i mreže N_2, preslikava na primarnu stranu u otpornik provodnosti: $G_{ie} = G_i/m^2$, svaki kalem recipročne induktivnosti $\Gamma_j = 1/L_j$ preslikava se u $\Gamma_{je} = \Gamma_j/m^2$, a svaki kondenzator kapacitivnosti C_k se preslikava u $C_{ke} = C_k/m^2$, pri čemu je topologija mreze N_{2e} ista kao i mreze N_2.

Pitanje 33.
Idealni žirator. Svojstvo invertovanja impedanse.

Idealni žirator ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara.

Postoje dva tipa idealnog žiratora.

Karakteristika idealnog žiratora opisana je relacijama:

<u>Tip I</u>

$$u_1 = -ri_2$$
$$u_2 = ri_1$$
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Tip II</u>

$$u_1 = ri_2$$
$$u_2 = -ri_1$$
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$$

Bezdimenzioni broj $r > 0$ naziva se žiratorska otpornost.

Pored r-parametara, idealan transformator ima jos i g-, a- i b-parametre. Nema h- i k- parametre.

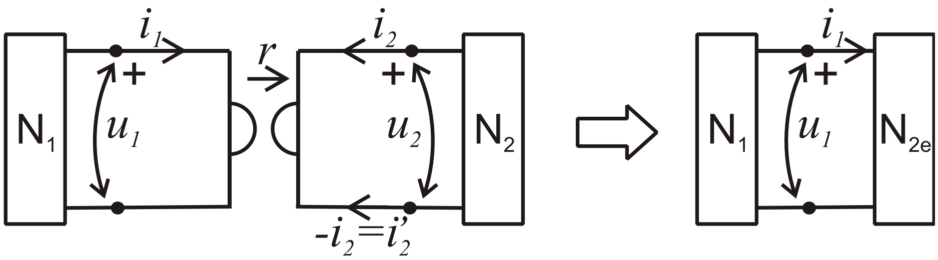
Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 0$ za svako u_1, i_1, u_2, i_2 sledi da je element pasivan, tačnije bez gubitaka. Otuda i naziv idealni jer on ukazuje da element ne troši nikakvu energiju već se energija uložena na jednom pristupu bez ikakvih gubitaka predaje mreži vezanoj za drugi pristup elementa.

Na osnovu matrice r-parametara uslov recipročnosti je $r_{12} = r_{21}$. Ovde važi da je $r_{12} = -r_{21}$, pa je idealni žirator antirecipročan.

Osobina invertovanja impedanse jeste jedna od osnovnih osobina koja se koristi u primeni idealnog žiratora. Neka je dato kolo sa dve mreže sa jednim pristupom N_1 i N_2 i idealnim žiratorom žiratorske otpornosti r.



Neka je mreža N_2 linearna, dobro definisana i strujno kontrolisana. Za pristup te mreže važi $u_2 = f(i_2')$, gde $f(i_2')$ predstavlja funkcionalnu zavisnost napona u_2 od struje i_2' te mreže.

Karakteristike idealnog žiratora su:

$$u_1 = -ri_2 = ri_2'$$
$$u_2 = ri_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{u_2}{r}$$
$$i_1 = \frac{1}{r}f(i_2') = \frac{1}{r}f\left(\frac{u_1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}f(u_1)$$

Veza napon-struja na ulazu u_1-i_1 je: $i_1 = \frac{1}{r^2}f(u_1)$, što znači da se strujno kontrolisana mreža N_2 vezana za izlaz žiratora preslikava u ekvivalentnu naponsko kontrolisanu mrežu N_{2e}, sa skala faktorom $\frac{1}{r^2}$. Mreža N_{2e} je dualna mreži N_2 u smislu da svakom otporniku otpornosti R_i mreže N_2 odgovara provodnost $G_{ie} = \frac{R_i}{r^2}$ u mreži N_{2e}, svakom kalemu induktivnosti L_j odgovara kondenzator kapacitivnosti $C_{je} = \frac{L_j}{r^2}$, a svakom kondenzatoru elastanse $S_k = \frac{1}{C_k}$ odgovara kalem induktivnosti $L_{ke} = r^2/S_k$. Topologija mreze N_{2e} dualna je topologiji mreže N_2 u smislu da rednoj vezi elemenata odgovara paralelna veza i obrnuto.

Pitanje 34.
Negativni impedansni konvertor i invertor.

Negativni impedansni konvertor ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara

Postoje dva tipa negativnog impedansnog konvertora.

Karakteristika negativnog impedansnog konvertora opisana je relacijama:

Tip I

$$u_1 = ku_2$$
$$i_1 = i_2/k$$
$$[a] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1/k \end{bmatrix}$$

Tip II

$$u1 = -ku_2$$
$$i1 = -i_2/k.$$
$$[a] = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$$

Pored a-parametara, negativni impedansni konvertor ima još i b-, h- i k-parametre. Nema r- i g-parametre jer se ne može predstaviti u strujno kontrolisanom niti naponsko kontrolisanom obliku.

Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 2u_2 i_2$, a u_2 i i_2 međusobno nezavisne veličine, $p(t)$ može biti negativna veličina, pa je negativni impedansni konvertor aktivan element.

Na osnovu matrice a-parametara uslov recipročnosti je det $[a] = 1$, a pošto je det $[a] = 1$ zaključujemo da je ovaj element antirecipročan.

Sličnim postupkom kao kod transformatora (pozitivni impedansni konvertor) zaključujemo da negativni impedansni konvertor vrši konverziju impedanse ali sa negativnim predzankom. Ako se za izlazne krajeve spoji pasivni otpornik otpornosti $R_i > 0$ element se, gledano sa ulaznih krajeva ponaša kao otpornik negativne otpornosti: $R_{ie} = -k^2 R_i$. Na isti način se i induktivnost L_j, vezana za izlaz preslikava u $L_{je} = -k^2 L_j$, a kapacitivnost C_k, u negativnu kapacitivnost $C_{ke} = -C_k/k^2$, odnosno proizvoljna mreža

N_2 spojena za pristup 2 preslikava se u mrezu N_{2e} iste topologije, ali sa elementima navedenih negativnih vrednosti.

<u>Negativni impedansni invertor</u> ima tačno dva nenulta elementa u matricama parametara

Postoje dva tipa negativnog impedansnog invertora

Karakteristika negativnog impedansnog invertora opisana je relacijama:

<u>Tip I</u>

$$u_1 = -ri_2$$

$$u_2 = -r\, i_1$$

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Tip II</u>

$$u_1 = ri_2$$

$$u_2 = ri_1$$

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

Pored r-parametara, negativni impedansni invertor ima još i g-, a- i b-parametre. Nema h- i k-parametre.

Ovo je u suštini rezistivan element, pa se njegov uslov pasivnosti svodi na

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \geq 0$$

Pošto je $p(t) = 2u_2i_2$, a u_2 i i_2 međusobno nezavisne veličine, $p(t)$ može biti negativna veličina, pa je negativni impedansni invertor aktivan element.

Na osnovu matrice r-parametara uslov recipročnosti je $r_{12} = r_{21}$, što jeste tačno, tako da zaključujemo da je ovaj element recipročan.

Uslov simetričnosti izražen r-parametrima je $r_{11} = r_{22}$, što jeste tačno, tako da zaključujemo da je ovaj element simetričan.

Element se ponaša slično žiratoru - vrši invertovanje impedanse vezane za izlazni pristup, ali sa negativnim predzankom. Svakom otporniku, kalemu i kondenzatoru iz mreže N_2, sa vrednostima R_i, L_j, C_k, odgovaraju elementi vrednosti: $R_{ie} = -\frac{r^2}{R_i}$, $C_{je} = -L_j/r^2$, $L_{ke} = -r^2 C_k$ ekvivalentne mreže N_{2e}, gledano sa ulaznog pristupa. Topologija preslikane mreže se menja na isti način kao i u slučaju žiratora. Topologija mreže N_{2e} dualna je topologiji mreže N_2: rednoj vezi elemenata odgovara paralelna veza i obrnuto.

Pitanje 35.
Realizacije rezistivnih elemenata sa dva pristupa u opštem slučaju.

Svaki rezistivni element sa dva pristupa može se realizovati pomoću kontrolisanih generatora i linearnih otpornika.

<u>Element opisan r-parametrima</u>

$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$

može se realizovati mrežom sa dva otpornika i dva transrezistansna pojačavača.

<u>Element opisan g-parametrima</u>

$$i_1 = g_{11} u_1 + g_{12} u_2$$
$$i_2 = g_{21} u_1 + g_{22} u_2$$

može se realizovati mrežom sa dva otpornika i dva transkonduktansna pojačavača.

Element opisan h-parametrima

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$

može se realizovati pomoću dva otpornika, jednog naponskog pojačavača i jednog strujnog pojačavača.

Element opisan k-parametrima

$$i_1 = k_{11}u_1 + k_{12}i_2$$
$$u_2 = k_{21}u_1 + k_{22}i_2$$

može se realizovati pomoću dva otpornika, jednog naponskog pojačavača i jednog strujnog pojačavača

Realizacija T-mreže

Sledećim postupkom nalazimo parametre T-mreže. Element opisan r-parametrima

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

Transformišimo jednačine na sledeći način:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{12}i_1 - r_{12}i_1 = \underbrace{(r_{11} - r_{12})}_{r_a} i_1 + \underbrace{r_{12}}_{r_b} (i_2 + i_1) \\ &= r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{12}i_2 - r_{12}i_2 \\ u_2 &= r_{21}i_1 + (r_{22} - r_{12})i_2 + r_{12}i_2 + r_{12}i_1 - r_{12}i_1 \\ &= \underbrace{(r_{22} - r_{12})}_{r_c} \mathrm{i}_2 + \underbrace{r_{12}}_{r_b} (i_2 + i_1) + i_1 \underbrace{(r_{21} - r_{12})}_{r_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_a &= r_{11} - r_{12} \\ r_b &= r_{12} \\ r_c &= r_{22} - r_{12} \\ r_m &= r_{21} - r_{12} \end{aligned}$$

36. Realizacije idealnog transformatora pomoću kontrolisanih generatora

Jednačine idealnog transformatora za *Tip I:*

$$u_1 = mu_2$$

$$i_1 = -\frac{i_2}{m}$$

Možemo ih predstaviti h-parametrima:

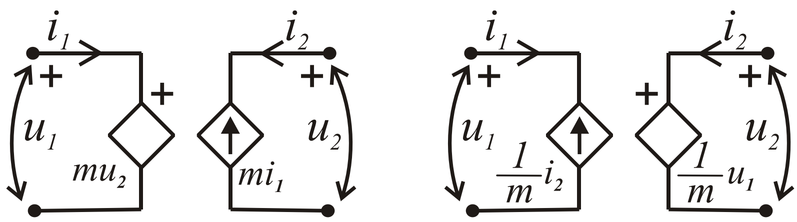
$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću jednog naponskog i jednog strujnog generatora

Ako ih predstavimo k-parametrima:

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & -1/m \\ 1/m & 0 \end{bmatrix}$$

transformator realizujemo na sledeći način:



Slično se realizuje i idealni transformator *Tipa II.*

U praksi bi se strujni pojačavač realizovao bipolarnim tranzistorom, a naponski pojačavač pomoću OP-a sa negativnom povratnom spregom, s tim što ovakvi pojačavači nisu idealni: imali bi parazitne efekte (pre svega konačnu ulaznu i izlaznu otpornost), pa bi se i realizovani element razlikovao od idealnog transformatora.

Pitanje 37.
Realizacija idealnog žiratora pomoću kontrolisanih generatora.

Jednačine idealnog žiratora za *Tip I:*

$$u_1 = -ri_2$$
$$u_2 = ri_1$$

Možemo ih predstaviti h-parametrima:

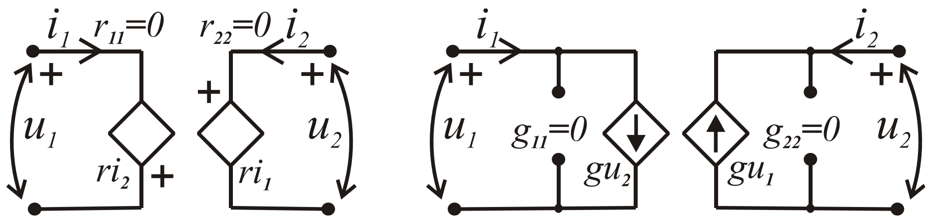
$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću dva idealna naponska generatora kontrolisana strujom (transrezistansnim pojačavačima).

Ako ih predstavimo g-parametrima:

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da se ovaj element može realizovati pomoću dva idealna strujna generatora kontrolisana naponom (transkonduktansnim pojačavačima).



Slično se realizuje i idealni žirator tipa II.

Realizacija pomoću dva kontrolisana naponska generatora je naročito pogodna, jer se operacionim pojačavačima mogu ostvariti kvalitetni kontrolisani generatori tog tipa.

Pitanje 38.
Induktivni elementi sa dva pristupa - osnovne jednačine

Ovi elementi su poznatiji pod nazivm induktivni transformatori i opisanu su relacijama:

$$F_1(\Phi_1, \Phi_2, i_1, i_2, t) = 0$$
$$F_2(\Phi_1, \Phi_2, i_1, i_2, t) = 0$$

gde su Φ_1, Φ_2, i_1, i_2 – fluksevi i struje na pristupima elementa.

Ako se karakterstika elementa može iskazati relacijama

$$\Phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$
$$\Phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

tada je element strujno kontrolisan.

Ako se karakterstika elementa može iskazati relacijama

$$i_1 = f1(\Phi_1, \Phi_2)$$
$$i_2 = f2(\Phi_1, \Phi_2)$$

tada je element kontrolisan fluksom.

Pristup 1 nazivamo primar, a pristup 2 sekundar.

Struja i_1 u primarnom namotaju sa N_1 zavojaka stvara magnetsko polje $\overrightarrow{H_1}$, koje će delom postojati u sekundarnom namotaju, a struja i_2 u sekundarnom namotaju sa N_2 zavojaka stvara magnetsko polje $\overrightarrow{H_2}$, koje će delom postojati u primarnom namotaju, što znači da je fluks jednog namotaja određen sopstvenom strujom, ali i strujom drugog namotaja (pristupa):

Φ_1 - Ukupan fluks primara.

Φ_2 - Ukupan fluks sekundara.

Φ_{11} - Sopstveni fluks primara izazvan sopstvenom strujom

Ako sopstveni fluks razdvojimo na deo fluksa koji ne sudeluje u sprezi kalemova ($\Phi_{\sigma 1}$) i na deo fluksa koji sudeluje ($\Phi_{\mathrm{M}1}$) možemo pisati $\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1}$

Odnosno, za jedan navojak:

$\Phi_{11}^{(1)} = \frac{\Phi_{11}}{N_1}$ – Sopstveni fluks *jednog navojka* primara izazvan sopstvenom strujom

$\Phi_{11}^{(1)} = \Phi_{\sigma 1}^{(1)} + \Phi_{M1}^{(1)}$

Φ_{22} – Sopstveni fluks sekundara izazvan sopstvenom strujom.

Ako sopstveni fluks razdvojimo na deo fluksa koji ne sudeluje u sprezi kalemova ($\Phi_{\sigma 2}$) i na deo fluksa koji sudeluje (Φ_{M2}) možemo pisati $\Phi_{22} = \Phi_{\sigma 2} + \Phi_{M2}$

Odnosno, za jedan navojak:

$\Phi_{22}^{(1)} = \frac{\Phi_{22}}{N_2}$ – Sopstveni fluks *jednog navojka* sekundara izazvan sopstvenom strujom

$\Phi_{22}^{(1)} = \Phi_{\sigma 2}^{(1)} + \Phi_{M2}^{(1)}$

Φ_{12} – Fluks primara izazvan strujom sekundara.

$$\Phi_{12} = N_1 {\Phi^{(1)}}_{M2} = N_1 \frac{\Phi_{M2}}{N_2}$$

Φ_{21} – Fluks sekundara izazvan strujom primara.

$$\Phi_{21} = N_2 {\Phi^{(1)}}_{M1} = N_2 \frac{\Phi_{M1}}{N_1}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}$$

Znaci $\pm$ uz međusobne flukseve označavaju da se oni sabiraju ili oduzimaju od sopstvenog fluksa, zavisno od načina motanja kalemova i orjentacije struje u njima.

Kod transformatora postoji zajedničko magnetsko polje primara i sekundara, tj. kalemovi su induktivno spregnuti.

Konvencija o tačkama: Ako struje primara i sekundara imaju orijentacije ka (ili od) označenih krajeva, tada se međusobni fluks sabira sa sopstvenim. Ako je jedna struja orijentisana ka, a druga od označenog kraja, tada se sopstveni i međusobni fluksevi oduzimaju.

Pitanje 39.

Linearan transformator

Linearan transformator je element koji ima samo induktivna svojstva i koji je linearan, odnosno fluksevi su direktno srazmerni strujama koje ih izazivaju. Koeficijent srazmernosti je induktivnost i za model fizičkog transformatora uvek ćemo smatarti da je on pozitivan. Posmatraćemo samo vremenski nepromenljiv transformator.

$$\Phi_{11} = L_{11} i_1$$
$$\Phi_{12} = L_{12} i_2$$
$$\Phi_{21} = L_{21} i_1$$
$$\Phi_{22} = L_{22} i_2$$

L_{11}, L_{22} - sopstvene induktivnosti, L_{12}, L_{21} - međusobne induktivnosti.

Uslov recipročnosti za induktivne transformatore je

$$L_{12} = L_{21}$$

Bezdimenzioni broj $m = \frac{N_1}{N_2}$ nazivamo odnos tranformacije (prenosni broj transformatora). Tada je:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12} = L_{11} i_1 \pm L_{12} i_2$$
$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21} = L_{22} i_2 \pm L_{21} i_1$$
$$\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{11} i_1$$
$$\Phi_{21} = N_2 \Phi^{(1)}{}_{\mathrm{M}1} = \mathrm{N}_2 \frac{\Phi_{\mathrm{M}1}}{N_1} = L_{21} i_1 \Longrightarrow$$
$$\Phi_{\mathrm{M}1} = \frac{N_1}{N_2} L_{21} i_1 = m L_{21} i_1$$

$$\left.\begin{array}{r} \Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{11} i_1 \\ \Phi_{\mathrm{M}1} = m L_{21} i_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow L_{11} = L_{\sigma 1} + m L_{21}$$

Slično,

$$L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}$$

$L_{\sigma 1}$ i $L_{\sigma 2}$ nazivaju se rasipna induktivnost.

Sledeće oznake se ravnopravno koriste

$$L_1 \equiv L_{11}, \qquad L_2 \equiv L_{22}\,.$$

Napon na krajevima transformatora:

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Koeficienti lineranog transformatora.

Koeficijent rasipanja iskazuje koji deo sopstvenih flukseva ne sudeluje u sprezi kalemova. Za primar

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{\sigma 1}}{\Phi_{11}},$$

gde je $\Phi_{\sigma 1}$ rasipni fluks primarnog namotaja. Za sekundar

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{\sigma 2}}{\Phi_{22}},$$

gde je $\Phi_{\sigma 2}$ rasipni fluks sekundarnog namotaja.

Koeficijent zajedničkih flukseva iskazuje koji deo sopstvenih flukseva sudeluje u sprezi kalemova. Za primar

$$k_1 = \frac{\Phi_{M1}}{\Phi_{11}} = \frac{mL_{21}}{L_1},$$

gde je Φ_{M1} zajednički fluks primarnog namotaja. Za primar

$$k_2 = \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_{22}} = \frac{1}{m} \frac{L_{12}}{L_2},$$

gde je Φ_{M2} zajednički fluks primarnog namotaja.

Koeficient rasipanja i zajednickih flukseva su komplementarni:

$$k_1 + \sigma_1 = 1$$
$$k_2 + \sigma_2 = 1\,.$$

Koeficijent sprege transformatora je

$$k = \sqrt{k_1 k_2}\,,$$

za njega uvek važi:

$$0 \leq k \leq 1\,,$$

a za recipročne elemente važi i

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

tj.

$$L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Za $k = 0$ – nema sprege, kalemovi su usamljeni.

Za $k = 1$ – nema gubitaka, kalemovi su savršeno spregnuti.

Pitanje 40.

Energija i pasivnost linearnog transformatora.

Neka su parametri recipročnog, vremenski nepromenljivog linearnog transformatora L_1 - sopstvena induktivnost primara, L_2 - sopstvena induktivnost sekundara, k - koeficijent sprege. Važi $L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}$.

Opšti uslov pasivnosti

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0$$

$W(t_0)$ – akumulirana energija u trenutku t_0,

$a(t_0, t)$ – rad koji se ulaže u transformator u periodu od t_0 do $t > t_0$.

$$a(t_0, t) = W(t) - W(t_0) + a_m(t_0, t)$$

Za vremenski nepromenljiv linearni transformator važi $a_m(t_0, t) = 0$, pa je

$$a(t_0, t) = W(t) - W(t_0)$$

Pa se uslov pasivnosti svodi na

$$W(t) \geq 0$$

$W(t)$ – akumulirana energija u trenutku t.

Uloženi rad možemo predstaviti i na sledeći način:

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau) \mathrm{d}\tau$$

gde

$$p(t) = u_1(t) i_1(t) + u_2(t) i_2(t)$$

predstavlja ulaznu snagu elementa.

Napon na krajevima transformatora:

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \pm L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= (L_1 D i_1 \pm L_{12} D i_2) i_1 + (L_2 D i_2 \pm L_{12} D i_1) i_2 \\ &= Da(t_0, t) \\ &= DW(t) - \underbrace{DW(t_0)}_{=0, jer\ je\ W(t_0)=const} \\ &= \frac{dW(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = L_1 i_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\left(i_1\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right) + L_2 i_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2\right]}_{W(t)}$$

$$W(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2$$

Dakle, linearan transformator je pasivan ako:

$$W(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \geq 0$$

Odnosno:

$$\frac{1}{2}L_1 i_2^2 \left[x^2 \pm 2\frac{L_{12}}{L_1}x + \frac{L_2}{L_1}\right] \geq 0,$$

gde je $x = \frac{i_1}{i_2}$.

Neka je

$$f(x) = x^2 \pm 2\frac{L_{12}}{L_1}x + \frac{L_2}{L_1}.$$

Uslov pasivnosti je zadovoljen u dva slučaja:

Slučaj 1.

$$L_1 \geq 0 \text{ i } f(x) \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; D \leq 0 \;\; \Rightarrow \;\; 4\frac{L_{12}^2}{L_1^2} - 4\frac{L_2}{L_1} \leq 0$$

Zaključujemo da mora važiti:

$$L_{12}^2 \leq L_1 L_2$$

Odnosno,

$$0 < L_{12} \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

pa sledi

$$0 < k \leq 1\,.$$

Slučaj 2.

$$L_1 \leq 0 \text{ i } f(x) \leq 0$$

Ovo ne može biti zadovoljeno jer je koeficijent uz x^2 pozitivan, a i L_1 je uvek pozitivno.

Ako posmatramo matricu

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & \pm L_{12} \\ \pm L_{12} & L_2 \end{bmatrix}$$

uslov pasivnosti je

$$\det[L] \geq 0.$$

Podrazumeva se da su induktivnosti pozitivne vrednosti.

Pitanje 41.
Transformator sa savršenom spregom.

Za savršen transformator ($k = 1$) važi da nema rasipanja fluksa, pa sledi

$$\Phi_{\sigma 1} = 0 \Rightarrow L_{\sigma 1} = 0$$
$$\Phi_{\sigma 2} = 0 \Rightarrow L_{\sigma 2} = 0$$

$$L_1 = L_{11} = L_{\sigma 1} + mL_{21} = mL_{21}$$
$$L_2 = L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m}L_{12} = \frac{1}{m}L_{12}$$

Za recipriočan element $L_{12} = L_{21}$, pa je $L_1 L_2 = L_{12}^2$. Sledi $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$.

Napon na krajevima savršenog transformatora je

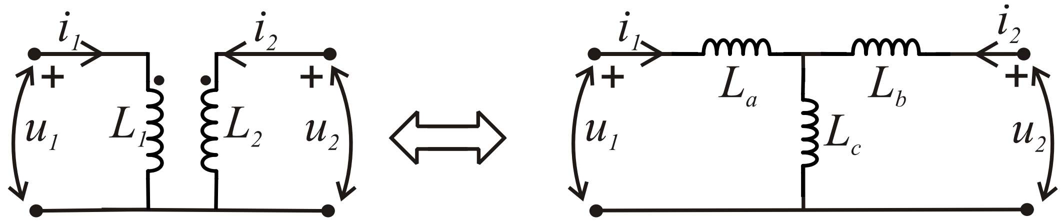
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1\left(Di_1 \pm \frac{1}{m}Di_2\right) \\ u_2 &= \frac{L_1}{m}\left(\frac{1}{m}Di_2 \pm Di_1\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = \pm m u_2$$

Savršeni transformator je induktivni element. Da bi postojao napon (različit od nule) na njegovim pristupima, potrebno je da se fluks menja sa vremenom t. Zato linearni transformator, a time i savršeni transformator kao specijalni slučaj linearnog transformatora ne prenose konstantne signale. Nasuprot tome, idealan transformator je rezistivan element i kod njega nema tih ograničenja.

Pitanje 42.

Ekvivalentna T-šema linearnog transformatora.

Posmatajmo recipročan, vremenski nepromenljiv linearni transformator



Obratiti pažnju da su donji krajevi transformatora kratko spojeni

Linearni transformator se može predstaviti ekvivalentnom T mrežom čiji parametri L_a, L_b, L_c nisu u međusobnoj sprezi.

Do ekvivalentne šeme dolazi se na sledeći način.

Polazimo od jedačina transformatora:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Znak „+“ odgovara oznakama na slici.

Ako prvu jednačinu proširimo dodavanjem i oduzimanem člana $L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, a drugu sa $L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$, dobijaju se jednačine:

$$\begin{aligned} u_1 &= (L_1 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1+i_2)}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= (L_2 - L_{12})\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}(i_1+i_2)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Odgovarajuce relacije mreže T su:

$$u_1 = L_a \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_c \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = L_b \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_c \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t}$$

pa da bi mreže bile ekvivalntne potrebno je da je:

$$L_a = L_1 - L_{12}, \qquad L_b = L_2 - L_{12}, \qquad L_c = L_{12}$$

kada se fluksevi sabiraju, odnosno:

$$L_a = L_1 + L_{12}, \qquad L_b = L_2 + L_{12}, \qquad L_c = -L_{12}$$

kada se fluksevi oduzimaju.

Pitanje 43.

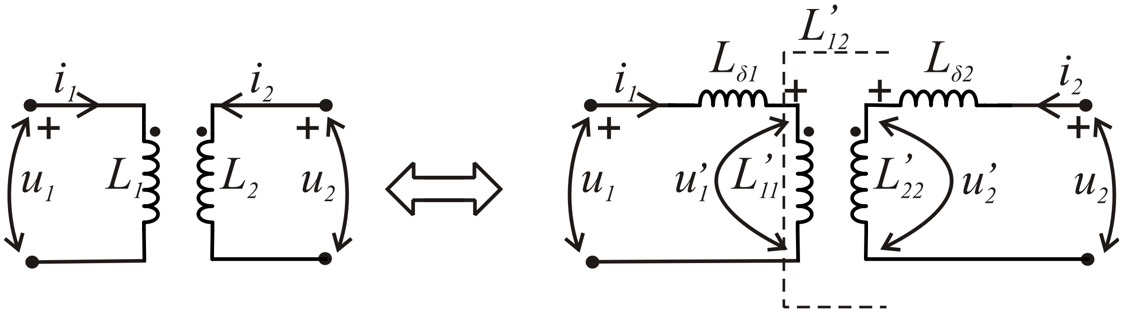
Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi savršeni transformator.

Za dobijanje ove ekvivalentne mreže potrebno je posmatrati sopstvene flukseve rastavljene na rasipne flukseve i flukseve koji su zajednički za oba namotaja:

$$\Phi_{11} = \Phi_{\sigma 1} + \Phi_{\mathrm{M}1} = L_{\sigma 1} i_1 + m L_{21} i_1$$
$$\Phi_{22} = \Phi_{\sigma 2} + \Phi_{\mathrm{M}2} = L_{\sigma 2} i_2 + \frac{1}{m} L_{21} i_2$$

$$L_1 = L_{11} = L_{\sigma 1} + m L_{21}$$
$$L_2 = L_{22} = L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}$$

Za recipročan element važi $L_{12} = L_{21}$.



Jednačine linearnog transformatora se mogu predstaviti u obliku:

$$u_1 = (L_{\sigma 1} + m L_{12}) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \left(L_{\sigma 2} + \frac{1}{m} L_{12}\right) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Znak „+“ odgovara oznakama na slici.

Jednačine linearnog transformatora se mogu predstaviti kao:

$$u_1 = (L_{\delta 1} + mL_{12})\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = \left(L_{\delta 2} + \frac{1}{m}L_{12}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}$$

Sledi da se fluksevi sabiraju.

Ove relacije možemo pisati:

$$u_1 = L_{\delta 1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_1'$$
$$u_2 = L_{\delta 2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u_2'$$

gde je

$$u_1' = mL_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2' = \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm \frac{1}{m}L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Transformator sa induktivnostima

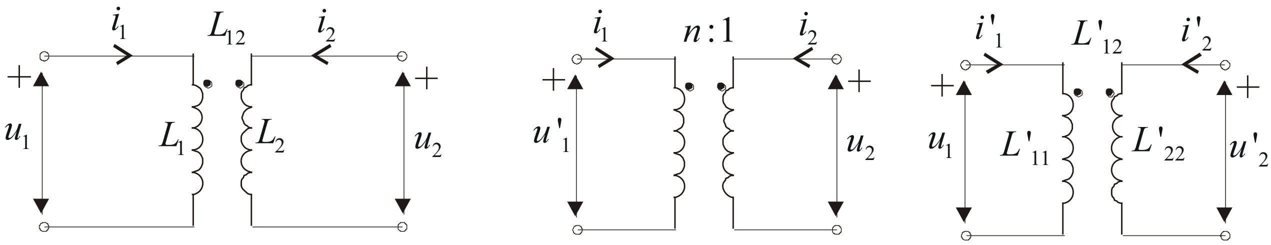
$$L_{11}' = mL_{12}$$
$$L_{22}' = \frac{1}{m}L_{12}$$
$$L_{12}' = L_{12}$$

je sa savršenom spregom – njegov koeficijent sprege je:

$$k' = \frac{L_{12}'}{\sqrt{L_{11}'L_{22}'}} = 1$$

Rasipanje smo izvodili u vidu induktivnosti $L_{\delta 1}$ i $L_{\delta 2}$.

Pitanje 44.
Ekvivalentna šema linearnog transformatora koja koristi idealan transformator.



Jednačine recipročnog linearnog transformatora sa prve slike su:

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = L_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

uvodimo smene $u_2' = nu_2$ i $i_2' = -\frac{1}{n} i_2$ koje odgovaraju transformatoru na drugoj slici.

Jednačine koje odgovaraju relacijama idealnog transformatora prenosnog broja n koji je prikazan na slici 2.

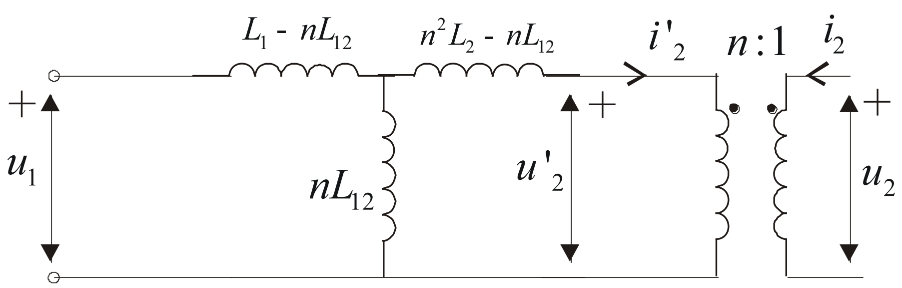
Ovim smenama jednačine postaju:

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (nL_{12}) \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$
$$u_2 = (nL_{12}) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - (n^2 L_2) \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}t}$$

Ove jednačine odgovaraju transformatoru na trećoj slici, a parametri imaju vrednost:

$$L_{11}' = L_1, \qquad L_{22}' = n^2 L_2, \qquad L_{12}' = nL_{12}$$

Treći transformator možemo prikazati i ekvivalentnom T-mrežom. Idealni transformator sprečava galvansku vezu ulaznog i izlaznog priključka.



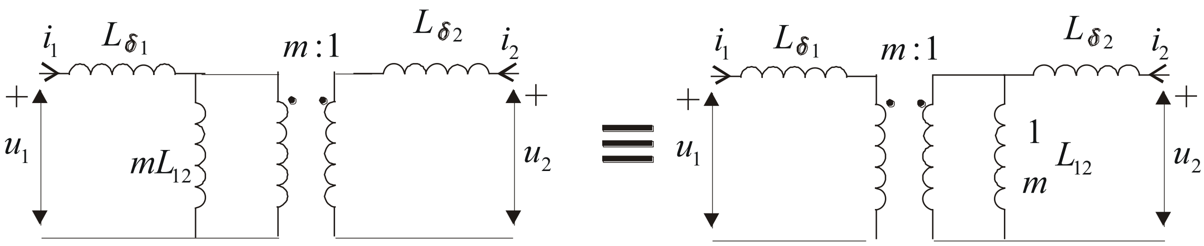
broj n može biti proizvoljan, mada je najbolje da je jednak prenosnom broju transformatora:

$$n = m = \frac{N_1}{N_2}$$

u tom slučaju je:

$$\begin{aligned} L_1 - nL_{12} &= L_1 - mL_{12} = L_{\delta 1} \\ n^2 L_2 - nL_{12} &= m^2 L_2 - mL_{12} = m^2 L_{\delta 2} \\ nL_{12} &= mL_{12} \end{aligned}$$

s obzirom na svojstvo konvertovanja idealnog transformatora šema može biti:



ako je transformator savršen tada je $L_{\delta 1} = 0,\ L_{\delta 2} = 0,\ L_1 = mL_{12} = m^2 L_2$.

Pitanje 45.

Transformator sa više namotaja.

Transformator sa više namotaja je induktivni element sa više pristupa. Induktivni element sa tri pristupa je opisan relecijama

$$F_1(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$
$$F_2(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$
$$F_3(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, i_1, i_2, i_3, t) = 0$$

Ako je element i-kontrolisan i linearan, tada se on može opisati sledećim relacijama

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3$$
$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

ili u matričnom obliku

$$[F] = [L] \cdot [i],$$

gde je $[F]$ matrica flukseva, $[L]$ matrica induktansnih parametara, a $[i]$ matrica struja. Za recipročne elemente važi $L_{ij} = L_{ji}$, za $j \neq i$.

Međusobne induktivnosti imaju algebarsko značenje (bitno je da li su pozitivne ili negativne). Induktivni element sa tri pristupa fizički se stvaruje stavljanjem tri kalema sopstvenih induktivnosti $L_i = L_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ na zajedničko jezgro. Sopstvene induktivnosti uvek smatramo pozitivnim.

Zgodno je i međusobne induktivnosti smatrati pozitivnim, a da znaci „+“ i „−“ ukazuju na međusobnu orijentaciju flukseva, koji potiču od različitih struja.

U konkretnom slučaju prilazanom na slici, smatrajući da je reč o strujno kontrolisanom, linearnom i recipročnom elementu, karakteristika elementa je

$$\Phi_1 = \ L_{11}i_1 - L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\Phi_2 = \ -L_{12}i_1 + L_{22}i_2 - L_{23}i_3$$
$$\Phi_3 = \ L_{13}i_1 - L_{23}i_2 + L_{33}i_3$$