Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu — 21. sept. 2008.

Teorija električnih kola — Odsek: **IR**

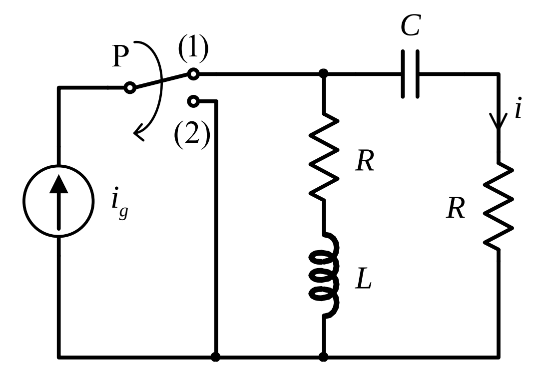
ISPIT (oktobarski rok) — **Ispit traje 3 h**

Predmetni nastavnik: *Dr Branimir D. Reljin*, red. prof.

Zadatke započinjati na novoj stranici uz jasnu numeraciju. Nečitki radovi nose negativne poene. Na koricama vežbanke precrtati zadatke koji nisu rađeni.

Zadatak 1: U kolu poznatih parametara (slika 1) deluje generator konstantne struje $i_g(t)=I$. U trenutku t=0 prekidač P se prebacuje iz položaja (1) u položaj (2).

a) [30] Odrediti prirodne početne uslove u trenutku $t=0^-$,
b) [30] Odrediti diferencijalnu jednačinu odziva struje $i(t)$ za t>0.
c) [40] Odrediti struju $i(t)$ za t>0, diferencijalne jednačine u vremenskom domenu. Smatrati da vrednosti elemenata zadovoljavaju relaciju $C=\dfrac{L}{5R^2}$.

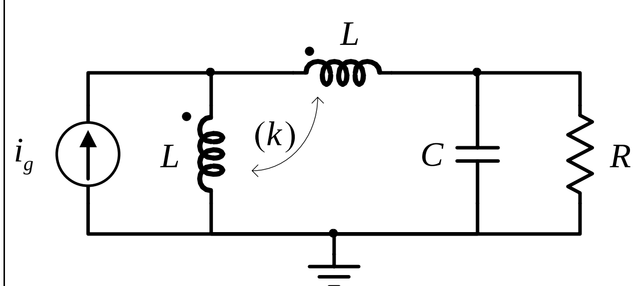


Slika 1

Zadatak 2 Složenoperiodičan strujni generator $i_g(t)=I+I\cdot\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$. deluje u kolu na slici 2.

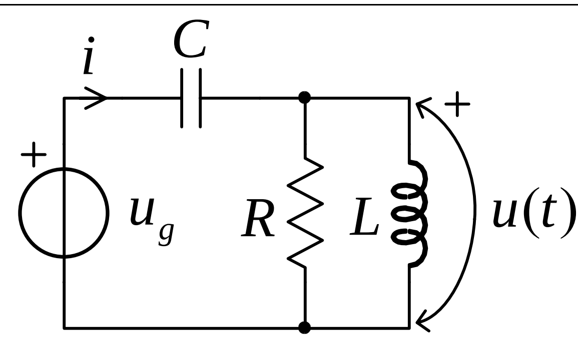
Režim rada je ustaljen, a parametri kola $R,L,C,k=\dfrac{1}{2}$ su poznati. Odrediti:

a) [40] Ulaznu impedansu mreže koju vidi strujni generator,
b) [40] Srednju snagu otpornika R.
c) [20] Da li je i napon generatora složenoperiodičan? Obrazložiti odgovor.



Slika 2

Zadatak 3: [20+30+50] U kolu poznatih parametara L,C i $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ deluje generator napona $u_g(t)=Uh(t)$. Odrediti napon $u(t)$ za $t\geq 0$ rešavanjem kola u domenu Laplace-ove transformacije. Smatrati da u početnom trenutku nema akumulisane energije.

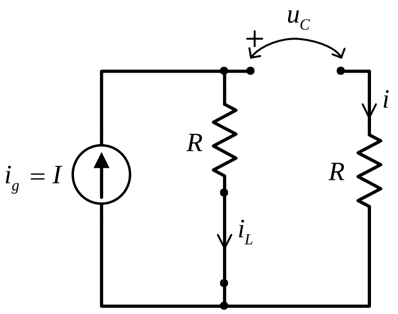


Slika 3

Teorijska pitanja

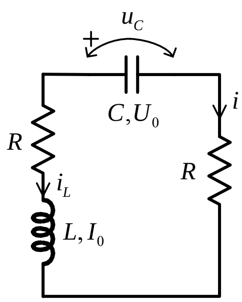
1. Definisati recipročnost grana kola/mreže u opštem slučaju. Primeniti definiciju na rezistivnu mrežu sa dva pristupa koja je naponski kontrolisana.
2. Šta je savršen transformator? U kakvoj je vezi sa idealnim transformatorom?
3. Razvoj periodične funkcije u Furijeov red.

Rešenja
1.
a) Za t<0:



$$i_L = i_g = I$$
$$u_c = Ri_g = RI$$
$$i = 0$$

b) Za t>0:



$$2Ri(t) + LDi(t) + u_c(t) = 0 \big/ \cdot CD; \qquad \Rightarrow \left(D^2 + \frac{2R}{L} + \frac{1}{LC} \right) i(t) = 0;$$
$$i = CDu_c(t);$$

c) Radi se o linearnoj homogenoj diferencijalnoj jednačini drugog reda i onda su sopstvene učestanosti:
$$\underline{s}_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{5R^2}{L^2}} = -\alpha \pm j2\alpha, \alpha = \frac{R}{L};$$
Pošto su rešenja sopstvene jednačine konjugovano kompleksna onda je rešenje linearne homogene diferencijalne jednačine oblika:
$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos 2\alpha t + B\sin 2\alpha t \right) h(t);$$
Na osnovu prirodnih početnih uslova dobijamo:
$$i(0^+) = A = -i_L(0^+) = -I;$$
$$Di(0^+) = -Di_L(0^+) = \frac{u_L(0^+)}{L} = \frac{u_c(0^+) + u_R(0^+) - u_R(0^+)}{L} = -\alpha I =$$
$$= -\alpha A + 2\alpha B = \alpha I + 2\alpha B \Rightarrow B = 0;$$

$$\boxed{i(t) = -Ie^{-\frac{R}{L}t} \cos 2\frac{R}{L}t}, \text{ t>0}$$

2. a) Prvo ćemo odrediti funkciju eksitacije u kompleksnom domenu:
$$\underline{I}_g^{(0)} = I, \underline{I}_g^{(1)} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$
Ako iskoristimo jednačinu ulazne impedanse transformatora:
$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{12}}; \text{gde su: } \underline{Z}_1 = \underline{s}L \text{ - impedansa primara}$$
$$\underline{Z}_2 = \underline{s}L + \frac{\frac{1}{\underline{s}C}R}{R + \frac{1}{\underline{s}C}} \text{ - impedansa sekundara}$$

$\underline{Z}_{12} = \underline{s}L_{12} = \frac{\underline{s}L}{2}$ - impedansa primara

$\underline{Z}_{ul} = \frac{L\underline{s}}{4}\frac{4R + 3L\underline{s} + 3RLC\underline{s}^2}{R + L\underline{s} + RLC\underline{s}^2}$; pri čemu je $\underline{s} = jn\omega, n = 0,1;$

$\underline{Z}_{ul}^{(0)} = 0 \Rightarrow U^{(0)} = 0;\ \underline{Z}_{ul}^{(1)} = \frac{R}{4} + j\frac{3}{4}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \underline{U}_g^{(1)} = \underline{Z}_{ul}^{(1)}\underline{I}_g^{(1)} = \frac{R}{4\sqrt{2}}I^{(1)} + j\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}}I^{(1)};$

b) Pošto je otpornik jedini rezistivni element u mreži, sva aktivna snaga se troši na njemu, tako da je srednja snaga otpornika jednaka aktivnoj snazi generatora.

$\underline{Z}_{ul}^{(0)} = 0 \Rightarrow P^{(0)} = 0;\ \underline{Z}_{ul}^{(1)} = \frac{R}{4} + j\frac{3}{4}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \underline{S}_g^{(1)} = \underline{Z}_{ul}^{(1)}\underline{I}^{(1)^2} = P_g^{(1)} + jQ_g^{(1)} = \frac{RI^2}{8} + j\frac{3I^2}{8}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow P_R = \frac{RI^2}{8}.$

c) Odziv je očito prostoperiodičan jer postoji samo prvi harmonik u naponu generatora.

3.

$\underline{U}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}U_0}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_0}$; gde su $\alpha = \frac{1}{2RC}$ i $\omega_0 = \sqrt{7}\frac{1}{2RC}.$

$u(t) = U_0 e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\omega_0 t)\right)h(t).$