79. Bilateralna i unilateralna Laplasova transformacija

Laplasova transformacija jednobrazno resava probleme Furijeove transformacije:

- kola sa akumulisanom energijom
- uska klasa funkcija koja zadovoljava Dirihleove uslove

Posmatrajmo funkciju f(t) koja nema konvergentan Furijeov integral. Transformisemo je tako da izvrsimo kompresiju u vremenu, i zbog toga formiramo pomocnu funkciju:

$v(t) = f(t) * e^{-\sigma t}$

biramo konstantu sigma tako da obezbedimo Furijeovu konvergenciju integrala funckije v(t)

$$F\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) * e^{-jwt} dt = \underline{V}(jw) = F\{f(t) * e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-(\sigma + jw)t} dt \quad (1)$$

$$\underline{s} = \sigma + jw \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-\underline{s}t} dt = \underline{F_b}(\underline{s}) \quad (*)$. Ovaj izraz je poznat kao Bilateralna(obostrana) Laplasova transformacija.

Bilateralna Laplasova transformacija polazne funckije f(t) jednaka je Furijeovoj transformaciji pomocne funckije v(t).

Definisemo inverznu Laplasovu transformaciju:

$$L^{-1}\{\underline{F_b}(\underline{s})\} \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - jw}^{\sigma + jw} \underline{F_b}(\underline{s}) * e^{\underline{s}t} ds = f(t) \quad (**)$$

Jednacine (*) i (**) cine Laplasov transformacioni par.

Bilateralna Laplasova transformacija nije pogodna za direktno resavanje kola sa akumulisanom energijom, jer je donja granica integrala minus beskonacno. Ovaj problem se resava uvodjenjem Unilaterarne Laplasove transformacije:

- funkciju vremena f(t) mozemo ucitini kauzalnom ako je pomnozimo Heavisideovom funkcijom

  w(t)=f(t)*h(t)=$\begin{cases} f(t), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

Bilateralna Laplasova transformacija kauzalne funkcije vremena w(t) jednaka je Unilaterarnoj Laplasovoj transformaciji funckije f(t):

$$L_b\{w(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) * e^{-\underline{s}t} dt = \int_{0}^{\infty} f(t) * e^{-\underline{s}t} dt \triangleq L\{f(t)\} = \underline{F}(\underline{s})$$

80. Pravila Laplasove transformacije

1. Jednistvenost

Ako funkcija f(t) zadovoljava uslov konvergencije: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) * e^{-\underline{s}t}| dt \leq N$, onda ima Laplasovu transformaciju odredjenu relacijom:

$$\underline{F}(\underline{s}) = L\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} f(t) * e^{-\underline{s}t} dt$$

Obrnuto ne mora da vazi.

2. Linearnost

Laplasova tr. linearne kombinacije funkcija jednaka je odgovarajucoj linearnoj kombinaciji njihovih Laplasovih tr. $L\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 \underline{F_1}(\underline{s}) + k_2 \underline{F_2}(\underline{s})$

3. Pomeraj

a) u vremenu:

ako je L{f(t)}=F(s), tada je $L\{f(t \pm t_0)\} = \underline{F}(\underline{s}) * e^{\pm \underline{s} t_0}$

b) frekvencijski pomeraj

ako je F(s)=L{f(t)}, tada je $\underline{F}(\underline{s} \pm a) = L\{f(t) * e^{\mp at}\}$

4. Skaliranje vremena/frekvencije

ako je L{f(t)}=F(s), tada je:

$$L\{f(at) = \frac{1}{a} \underline{F}(\frac{\underline{s}}{a})$$

$$L\{f\left(\frac{t}{b}\right) = b * \underline{F}(b\underline{s})$$

5. Pocetna i krajnja vrednost

a) pocetna: $f(0+) = \lim_{\underline{s} \to \infty} \underline{s} * \underline{F}(\underline{s})$, ukoliko ovaj limes postoji

b) krajnja: $f(+\infty) = \lim_{\underline{s} \to 0} \underline{s} * \underline{F}(\underline{s})$

6. Izvod u vremenskom domenu

a) prvog reda

ako je L{f(t)}=F(s), tada je $L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \underline{s} * \underline{F}(\underline{s}) - f(0)$

dokaz preko parcijalne integracije, smena $u = e^{-\underline{s}t}$

b) viseg reda

$L\{D^n f(t)\} = \underline{s^n} * \underline{F}(\underline{s}) - \underline{s^{n-1}} * f(0) - \underline{s^{n-2}} * Df(0) - \cdots - \underline{s^1} * D^{n-2} f(0) - D^{n-1} f(0)$

81. Laplasova transformacija Heavisideove funkcije
ili Lapl. tr. konstanke K

$$L\{f(t)\} = L\{K\} = \frac{K}{\underline{s}}$$

$$K * h(t) = \left\{\begin{matrix} K, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{matrix}\right\}$$

Bilaterarna tr. u ovom slucaju nema smisla, jer bi rezultat bio 0.

$$L\{Kh(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Kh(t) * e^{-\underline{s}t} dt = \int_{0}^{\infty} K * e^{-\underline{s}t} dt = K \int_{0}^{\infty} e^{-\underline{s}t} dt = \frac{K}{\underline{s}}$$

82. Laplasova transformacija Diracove funkcije

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t) * e^{-\underline{s}t} dt = e^{-\underline{s}*0} \int_{0}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

izvod za kauzalnu funkciju (t>=0), za nekauzalnu (-besk do +besk) je skoro identican.

83. Veza Laplasove transformacije, indicione i Grinove funkcije

Posmatramo funkciju mreze u vremenskom domenu: $e(t) = F * \delta(t)$, a odziv u kolu bez akumulisane energije je y(t): $y(t) = F * g(t)$, gde je g(t) Grinova funkcija.

Posmatrajmo sada iste relacije u domenu Laplasove transformacije:

$$L\{e(t)\} = L\{\, F * \delta(t)\} => \underline{E(s)} = F$$

$$L\{y(t)\} = L\{\, F * g(t)\} => \underline{Y(s)} = F * \underline{G(s)}$$

Funkcija mreze je:

$$\underline{T(s)} = \frac{\underline{Y(s)}}{\underline{E(s)}} = \frac{F * \underline{G(s)}}{F} = \underline{G(s)}$$

Odavde zakljucujemo da je Grinova funkcija jednaka inverznoj Laplasovoj transformaciji uopstene funkcije mreze:

$$g(t) = L^{-1}\{\underline{T(s)}\}$$

Ako u kolu bez akumulisane energije deluje Heavisideov generator: e(t)=E*h(t), odziv ce biti y(t)=E*f(t).

$$L\{e(t)\} = L\{E * h(t)\} => \underline{E(s)} = \frac{E}{\underline{s}}$$

$$L\{y(t)\} = L\{E * f(t)\} => \underline{Y(s)} = E * \underline{F(s)}$$

$$\underline{T(s)} = \frac{\underline{Y(s)}}{\underline{E(s)}} = \frac{E * \underline{F(s)}}{\frac{E}{\underline{s}}} = \frac{\underline{F(s)}}{\underline{s}}$$

Odavde zakljucujemo da je indiciona funkcija jednaka inverznoj Laplasovoj transformaciji uopstene funkcije mreze podeljene sa s̲.

$$f(t) = L^{-1}\left\{\underline{F(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\underline{I(s)}}{\underline{s}}\right\}$$

84. Jednacine kola u Laplasovoj transformaciji, kolo bez pocetne energije
primer sa odredjivanjem inverzne Laplasove transformacije

Posmatramo elektricno kolo, koje sadrzi linearnu, vremenski invarijantnu mrezu N, koja se pobudjuje sa g ekscitacija es , s=1,…,g.
Jednacine ovog kola su, u vremenskom domenu:

KZS: $\sum_{l=1}^{b} a_{uc} * i_c(t) = 0,\ \ k = 1,2, \dots$

KZN: $\sum_{l=1}^{b} b_{uc} * u_c(t) = 0$

KE: $F_c\big(u_c(t), i_c(t)\big) = 0$

$$u_{Ri} = R_i * i_{Ri}$$
$$u_{Lj} = L_j * \frac{di_{Lj}}{dt}$$
$$i_{Ck} = C_k * \frac{du_{Ck}}{dt}$$

Poslednje 3 jednacine su karakteristike linearnog elementa sa jednim pristupom.

Prelaskom u domen Laplasove transformacije dobijamo sledeci oblik:

KZS: $\sum_{l=1}^{b} a_{kc} * \underline{I_l}(\underline{s}) = 0$

KZN: $\sum_{l=1}^{b} b_{kc} * \underline{U_l}(\underline{s}) = 0$

Sredjivanje po izlaznoj promenljivoj $\underline{Y(s)}$ se dobija odziv:

$$\underline{Y(s)} = \frac{\underline{N(s)}}{\underline{D(s)}} = \cdots = \frac{\underline{B(s)}}{\underline{A(s)}} * \underline{E(s)}$$

Ako kolo ne poseduje akumulisanu energiju, svaki element je opisan linearnom vezom napon-struja.

$$\underline{U}_{Ri} = R_i * \underline{I_{Ri}(s)},\quad \underline{U}_{Lj}(\underline{s}) = L_j * \underline{s} * \underline{I_{Lj}(s)},\quad \underline{U}_{Ck}(\underline{s}) = \frac{I_{Ck}(s)}{C_k * \underline{s}}$$

I sad se napisu dve jednacine za dve konture, u nekom prostom kolu, sa 2 kalema, jednim otpornikom, naponskim generatorom i prekidacem.

85. Jednacine kola u Laplasovoj transformaciji, kolo sa pocetnom energijom

Posmatramo elektricno kolo, koje sadrzi linearnu, vremenski invarijantnu mrezu N, koja se pobudjuje sa g ekscitacija es , s=1,…,g.
Jednacine ovog kola su, u vremenskom domenu:

KZS: $\sum_{l=1}^{b} a_{uc} * i_c(t) = 0,\ k = 1,2,\ldots$

KZN: $\sum_{l=1}^{b} b_{uc} * u_c(t) = 0$

KE: $F_c\big(u_c(t), i_c(t)\big) = 0$

$$u_{Ri} = R_i * i_{Ri}$$
$$u_{Lj} = L_j * \frac{di_{Lj}}{dt}$$
$$i_{Ck} = C_k * \frac{du_{Ck}}{dt}$$

Poslednje 3 jednacine su karakteristike linearnog elementa sa jednim pristupom.

Prelaskom u domen Laplasove transformacije dobijamo sledeci oblik:

KZS: $\sum_{l=1}^{b} a_{kc} * \underline{I_l(s)} = 0$

KZN: $\sum_{l=1}^{b} b_{kc} * \underline{U_l(s)} = 0$

Sredjivanje po izlaznoj promenljivoj $\underline{Y(s)}$ se dobija odziv:

$$\underline{Y(s)} = \frac{\underline{N(s)}}{\underline{D(s)}} = \cdots = \frac{\underline{B(s)}}{\underline{A(s)}} * \underline{E(s)}$$

Ako kolo poseduje akumulisanu energiju, jednacine elemenata su oblika:

$$\underline{U_R}(\underline{s}) = R_i * \underline{I_{Ri}(s)}$$

$$\underline{U_{Lj}}(\underline{s}) = L_j * (\underline{s} * \underline{I_{Lj}(s)} - i_{Lj}(0-))$$

$$\underline{I_{Ck}}(\underline{s}) = C_k * (\underline{s} * \underline{U_{Ck}}(\underline{s}) - u_{Ck}(0-))$$

Sad se napisu dve jednacine za dve konture, u kolu koje ima R i C paralelno vezane na L i Ig i Ug.