Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu 24. Avgust 2008.

Teorija električnih kola Odsek: **IR**

ISPIT **Ispit traje 3 h**

predmetni nastavnik: *Dr Branimir D. Reljin*, red. prof.

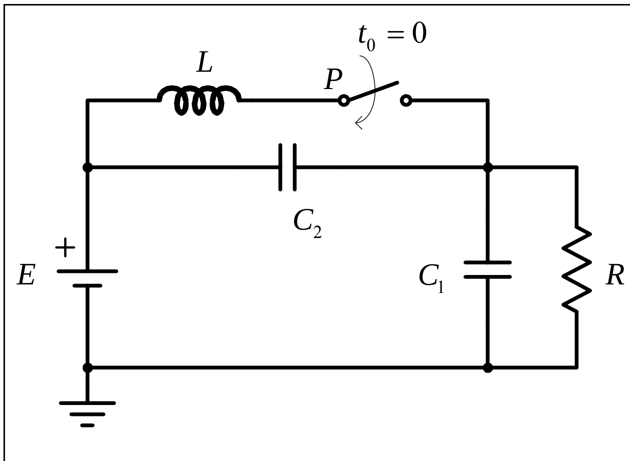
Zadatke započinjati na novoj stranici uz jasnu numeraciju. Nečitki radovi nose negativne poene. Na koricama vežbanke precrtati zadatke koji nisu rađeni.

Zadatak 1: Parametri kola sa slike 1 su poznati i pozitivni. R, $C_1=C$, $C_2=3C$, $L=R^2C$. Pri otvorenom prekidaču P u kolu je ustaljen režim. U trenutku $t=0$, prekidač se zatvara. Odrediti:

a)[20] Prirodne početne uslove u trenutku $t=0^-$ i u $t=0^+$.

b)[40] Diferencijalnu jednačinu odziva $i_L(t)$ za $t \geq 0$.

c)[40] Trenutnu vrednost struje $i_L(t)$ za $t \geq 0$, rešavanjem diferencijalne jednačine u vremenskom domenu.

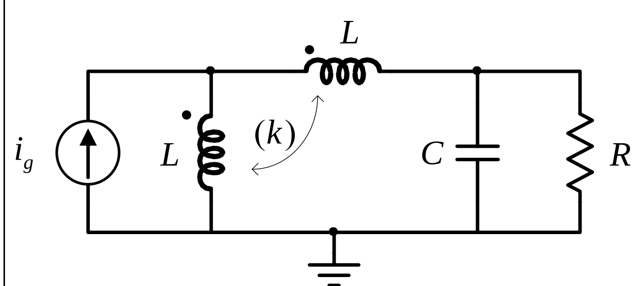


Slika 1

Zadatak 2 Složenoperiodičan strujni generator deluje u kolu na slici 2 Režim rada je ustaljen a parametri kola $R, L, C, k = \dfrac{1}{2}$ su poznati. $i_g(t) = I + I \cdot \cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$.

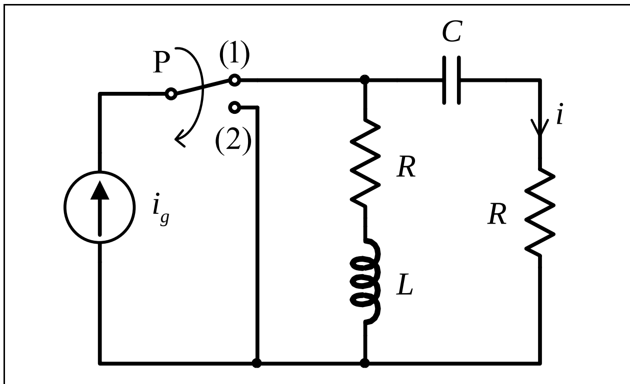
Odrediti:

a) aktivnu i reaktivnu snagu koju generator ulaže u kolo,
b) srednju snagu otpornika R.
c) Da li je i napon generatora složenoperiodičan, obrazložiti odgovor.



Slika 2

Zadatak 3: [20+40+40] U kolu poznatih parametara deluje generator konstantne struje $i_g(t) = I$. U trenutku t=0 prekidač P se prebacuje iz položaja (1) u položaj (2).
Odrediti struju *i(t)* za t>0. primenom Laplace-ove transformacije. Smatrati da vrednosti elemenata zadovljavaju relaciju $C = \dfrac{L}{5R^2}$.



Slika 3

Teorijska pitanja

1. Recipročnost rezistivnih elemenata sa 2 pristupa izražena h-parametrima. Dokazati.
2. Sopstveni odziv u kolima drugog reda. Pseudoperiodičan režim.
3. Pravilo o izvodu po vremenu u Laplasovoj transformaciji. Dokazati.

Rešenja

1. a) $u_{c1}(0^-) = u_{c1}(0^+) = 0, u_{c2}(0^-) = u_{c2}(0^+) = E, i_l(0^-) = i_l(0^+) = 0$

b) $D^2 i_l + \frac{1}{4CR} D i_l + \frac{1}{4C^2R^2} i_l = \frac{E}{4C^2R^3}$ za $t \geq 0$

c) $i_l(t) = i_{lh}(t) + i_{lp}(t)\,, i_{lh}(t) = e^{-\alpha t}\,(A\sin(\omega\, t) + B\cos(\,\omega\, t)),\; i_{lp}(t) = C\,, A = \frac{9}{\sqrt{15}}\frac{E}{R},\; B = -\frac{E}{R},\; C = \frac{E}{R},$

$\alpha = -\frac{1}{8CR}, \omega = \frac{\sqrt{15}}{8CR}$ za $t \geq 0$

2. a) Prvo ćemo odrediti funkciju eksitacije u kompleksnom domenu:

$\underline{I}_g^{(0)} = I, \underline{I}_g^{(1)} = \frac{I}{\sqrt{2}};$

Ako iskoristimo jednačinu ulazne impedanse transformatora:

$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{12}}$; gde su: $\underline{Z}_1 = \underline{s}L$ - impedansa primara

$\underline{Z}_2 = \underline{s}L + \frac{\frac{1}{\underline{s}C}R}{R + \frac{1}{\underline{s}C}}$ - impedansa sekundara

$\underline{Z}_{12} = \underline{s}L_{12} = \frac{\underline{s}L}{2}$ - impedansa primara

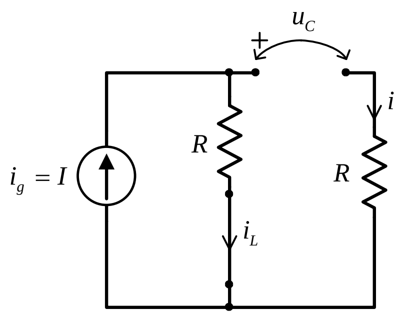
$\underline{Z}_{ul} = \frac{L\underline{s}}{4}\frac{4R + 3L\underline{s} + 3RLC\underline{s}^2}{R + L\underline{s} + RLC\underline{s}^2}$; pri čemu je $\underline{s} = jn\omega, n = 0,1;$

$\underline{Z}_{ul}^{(0)} = 0 \Rightarrow P^{(0)} = 0;\; \underline{Z}_{ul}^{(1)} = \frac{R}{4} + j\frac{3}{4}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \underline{S}_g^{(1)} = \underline{Z}_{ul}^{(1)} \underline{I}^{(1)^2} = P_g^{(1)} + jQ_g^{(1)} = \frac{RI^2}{8} + j\frac{3I^2}{8}\sqrt{\frac{L}{C}};$

b) Pošto je otpornik jedini rezistivni element u mreži, sva aktivna snaga se troši na njemu, tako da je srednja snaga otpornika jednaka aktivnoj snazi generatora.

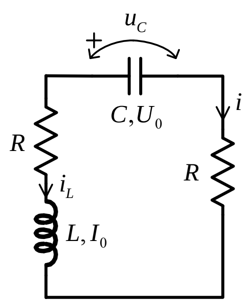
c) Odziv je očito prostoperiodičan jer postoji samo prvi harmonik u naponu generatora.

3. Za t<0:



$$i_L = i_g = I$$
$$u_c = Ri_g = RI$$
$$i = 0$$

Za t>0:



$$i(0^+) = -i_L(0^-) = -I = I_0$$
$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = RI = U_0$$

Jednačina ravnoteže u L -transformaciji:

$$2R\underline{I} + L\underline{s}\underline{I} - LI_0 + \underline{U}_c = 0$$

$$\underline{I} = C\underline{s}\underline{U}_c - CU_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{I} = \frac{\underline{s}I_0 - \dfrac{U_0}{L}}{\underline{s}^2 + 2\dfrac{R}{L}\underline{s} + \dfrac{1}{LC}}}$$

Koreni imenioca:

$$\underline{s}_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = -\frac{R}{L} \pm j2\frac{R}{L} = -\alpha + j\omega_1$$

$$\alpha = \frac{R}{L},\ \omega_1 = 2\alpha,\ \frac{1}{LC} = 5\alpha^2 \ \text{(obzirom na } C = \frac{L}{5R^2}\text{)}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{s}I_0 - \dfrac{U_0}{L}}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1} = I_0\frac{\underline{s}}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1} - \frac{U_0}{L\omega_1}\frac{\omega_1}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1}$$

$$\underline{I} = I_0\left(\frac{\underline{s}+\alpha}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1} - \frac{\alpha}{\omega_1}\frac{\omega_1}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1}\right) - \frac{U_0}{2R}\frac{\omega_1}{(\underline{s}+\alpha)^2 + \omega_1}$$

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\underline{I}(s) = I_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_1 t - \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) - \frac{U_0}{2R}e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t,\ \text{t>0}$$

$$I_0 = -I,\ U_0 = RI,\ \omega_1 = 2\alpha,\ \alpha = \frac{R}{L}$$

$$i(t) = -Ie^{-\alpha t}\cos\omega_1 t + \frac{I}{2}e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t - \frac{I}{2}e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t$$

$$\boxed{i(t) = -Ie^{-\frac{R}{L}t}\cos 2\frac{R}{L}t},\ \text{t>0}$$