



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2011/2012.*

Prenos binarnih signala u osnovnom opsegu učestanosti (1)

*,

*Na slici je prikazana blok šema za prenos polarnih binarnih signala u OOU.

Ukoliko je na predaji poslat binarni simbol logička 1, signal na ulazu u prijemnik ima vrednost $+U$ (u trenutku odabiranja $t=kT$); ukoliko je na predaji poslat binarni simbol logička 0, signal na ulazu u prijemnik ima vrednost $-U$ (u trenutku odabiranja kT).

Na ulazu u prijemnik deluje i aditivni beli Gausov šum, čija je funkcija gustine verovatnoće amplituda data izrazom

gde je σ efektivna vrednost napona šuma.
$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u_N^2}{2\sigma^2}}$$

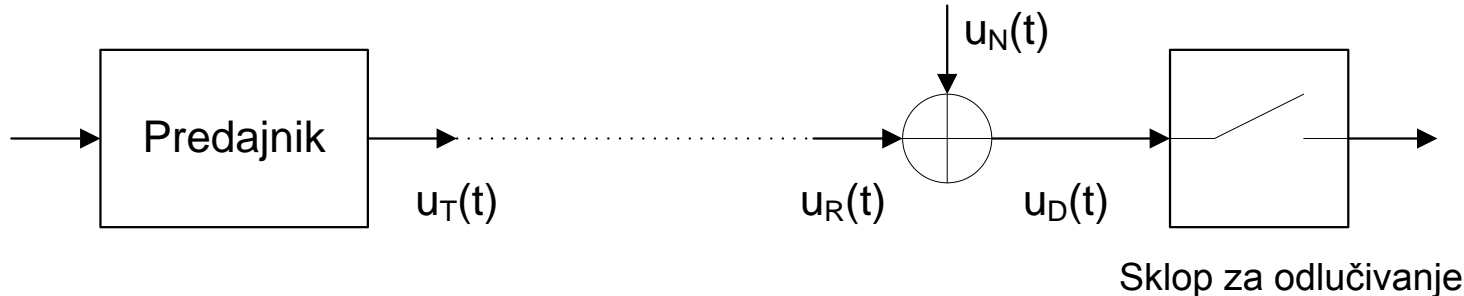
*Vrednost naponskog nivoa $U=2V$, standardna devijacija šuma je $\sigma=0.4$.

Odrediti verovatnoću greške za vrednost kada je napon praga $U_p=0$, kao i za optimalnu vrednost praga odlučivanja, u sledećim slučajevima:

a) Verovatnoća slanja binarne nule $P(-U)=0.5$, binarne jedinice $P(U)=0.5$;

b) Verovatnoća slanja binarne nule $P(-U)=0.8$, binarne jedinice $P(U)=0.2$;

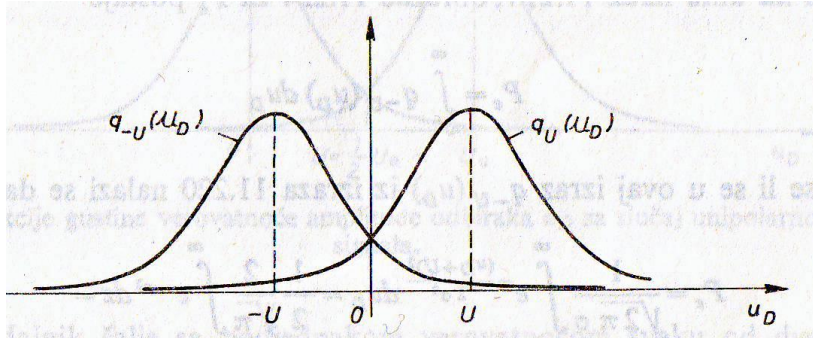
c) Verovatnoća slanja binarne nule $P(-U)=0.2$, binarne jedinice $P(U)=0.8$.



*Pri određivanju verovatnoće greške koristiti aproksimativnu formulu
$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Prenos binarnih signala u OOU (2)

Rešenje:



***U slučaju kada je poslat binarni simbol 1 (naponski nivo +U), raspodela odbiraka slučajne promenljive u_D opisuje se funkcijom gustine verovatnoće $q_U(u_D)$**

$$q_{+U}(u_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D - U)^2}{2\sigma^2}}$$

***U slučaju kada je poslat binarni simbol 0, raspodela odbiraka slučajne promenljive u_D opisuje se funkcijom gustine verovatnoće $q_{-U}(u_D)$**

$$q_{-U}(u_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D + U)^2}{2\sigma^2}}$$

***Za vrednost praga odlučivanja jednaku U_p , na prijemu se na osnovu prijemnih odbiraka vrši odluka o poslatim simbolima**

***Za odbirak čija je amplituda $u_D > U_p$, odluka je da je poslat signal +U (logička jedinica)**

***Za odbirak čija je amplituda $u_D < U_p$, odluka je da je poslat signal -U (logička nula)**

Prenos binarnih signala u OOU (3)

***U toku prenosa binarnog signala može doći do dve vrste grešaka.**

Prva je greška kada je poslat signal amplitude +U (binarna jedinica), a amplituda odbirka na prijemu je manja od praga prijema $u_D < U_p$.

$$P(-U | U) = P(u_D < 0 | U) = \int_{-\infty}^{U_p} q_U(u_D) du_D = \int_{-\infty}^{U_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D - U)^2}{2\sigma^2}} du_D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

***Druga vrsta greške je kada je poslat signal amplitude -U (binarna nula), amplituda odbirka na prijemu je veća od napona praga $u_D > U_p$**

$$P(U | -U) = P(u_D > 0 | -U) = \int_{U_p}^{+\infty} q_{-U}(u_D) du_D = \int_{U_p}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D + U)^2}{2\sigma^2}} du_D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

***Ukupna vrednost verovanoće greške određena je sledećom formulom:**

$$P_e = P(U)P(-U | U) + P(-U)P(U | -U) = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Prenos binarnih signala u OOU (4)

U slučaju kada je vrednost praga odlučivanja $U_p=0$, ukupna verovatnoća greške u sva tri slučaja je jednaka i iznosi

a) $P(+U)=0.5$, $P(-U)=0.5$,

$$P_e = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 0.5 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) + 0.5 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2+0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) = 2.86 \cdot 10^{-7}$$

b) $P(+U)=0.2$, $P(-U)=0.8$,

$$P_e = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 0.2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) + 0.8 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2+0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) = 2.86 \cdot 10^{-7}$$

c) $P(+U)=0.8$, $P(-U)=0.2$,

$$P_e = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 0.8 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2-0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) + 0.2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2+0}{\sqrt{2} \cdot 0.4}\right) = 2.86 \cdot 10^{-7}$$

Optimalna vrednost praga odlučivanja data je sledećom formulom:

$$U_{p,opt} = \frac{\sigma^2}{2U} \ln\left(\frac{P(-U)}{P(+U)}\right)$$

Prenos binarnih signala u OOU (5)

a) U slučaju kada je $P(+U)=0.5$, $P(-U)=0.5$, optimalna vrednost praga odlučivanja je

$$U_{p,opt} = \frac{\sigma^2}{2U} \ln \left(\frac{P(-U)}{P(+U)} \right) = 0$$

b) U slučaju kada je $P(+U)=0.2$, $P(-U)=0.8$, optimalna vrednost praga odlučivanja je

$$U_{p,opt} = \frac{\sigma^2}{2U} \ln \left(\frac{P(-U)}{P(+U)} \right) = \frac{0.4^2}{2 \cdot 2} \ln \left(\frac{0.8}{0.2} \right) = 0.0555$$

Minimalna vrednost verovatnoće greške (za optimalnu vrednost praga prijema)

$$P_e = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 0.2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 - 0.0555}{\sqrt{2} \cdot 0.4} \right) + 0.8 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 + 0.0555}{\sqrt{2} \cdot 0.4} \right) = 2.273 \cdot 10^{-7}$$

c) U slučaju kada je $P(+U)=0.8$, $P(-U)=0.2$, optimalna vrednost praga odlučivanja je

$$U_{p,opt} = \frac{\sigma^2}{2U} \ln \left(\frac{P(-U)}{P(+U)} \right) = \frac{0.4^2}{2 \cdot 2} \ln \left(\frac{0.2}{0.8} \right) = -0.0555$$

Minimalna vrednost verovatnoće greške (za optimalnu vrednost praga prijema)

$$P_e = P(U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U - U_p}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(-U) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U + U_p}{\sqrt{2}\sigma} \right) = 0.2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 - 0.0555}{\sqrt{2} \cdot 0.4} \right) + 0.8 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 + 0.0555}{\sqrt{2} \cdot 0.4} \right) = 2.273 \cdot 10^{-7}$$

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (1)

*Posmatra se sistem za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti (OOU). Prenos binarnih signala obavlja se polarnim impulsima. Linija veze je podeljena na m deonica. Dužina svake od deonica je L .

Analiziraju se sledeća dva slučaja:

- a) Signal se prenosi sistemom sa pojačavačima, gde se na kraju svake deonice nalazi pojačavač čije je pojačanje jednako slabljenju deonice.
- b) Signal se prenosi sistemom sa regeneratorima, gde se na kraju svake deonice nalazi regenerator koji detektuje dolazne oslabljene i izobličene impulse, ponovo ih generiše i šalje na narednu deonicu.

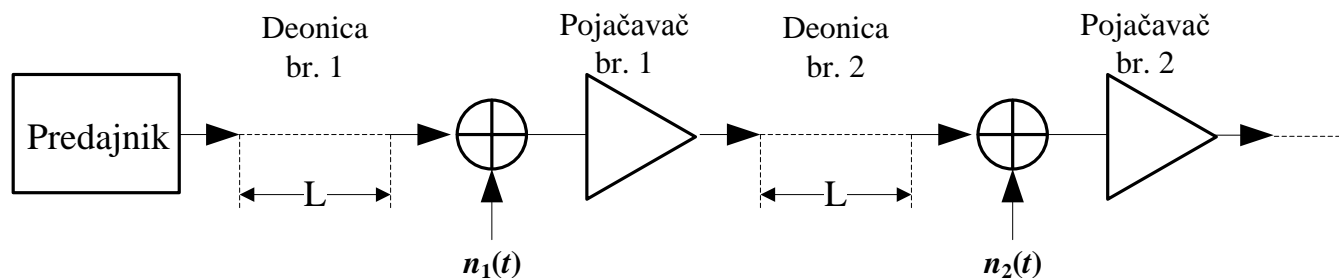
Vrednosti binarnih polarnih impulsa jednake su $\pm U$ na ulazu u pojačavač, odnosno regenerator. Na ulazu u svaki pojačavač i regenerator postoji i dejstvo slučajnih šumova $n_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$, pod čijim uticajem može doći do grešaka u odlučivanju. Ovi šumovi predstavljaju nezavisne Gausove slučajne procese, jednakih srednjih kvadratnih vrednosti $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i=1,2,\dots,m$.

Odrediti i uporediti verovatnoće greške pri prenosu binarnih polarnih signala u sledećim slučajevima:

- 1) $m=100$, $U/\sigma=5$; 2) $m=15$, $U/\sigma=3$; 3) $m=3$, $U/\sigma=2$.

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (2)

* Blok šema sistema za prenos signala sa pojačavačima



* Vrednosti binarnih polarnih impulsa jednake su $\pm U$ na ulazu u prvi pojačavač, pa je ukupan signal na ulazu u drugi pojačavač

*
$$u_2(t) = \pm U + n_1(t) + n_2(t)$$

* Pojaćanje svakog pojačavaća jednako je slabljenju jedne deonice, pa su amplitude binarnog polarnog signala jednake $\pm U$ na ulazu u svaki pojačavać. Komponente šuma $n_1(t)$ nakon pojaćanja u pojačavaću br. 1, ponovo oslabe, tako da su na ulazu u pojačavać br. 2 srednje kvadratne vrednosti komponenata koje potiću od šumova $n_1(t)$ i $n_2(t)$ međusobno jednake.

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (3)

*Ukupan signal na ulazu u m -ti pojačavač je

$$u_m(t) = \pm U + n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_m(t)$$

*Komponente šumova $n_1(t)$, $n_2(t)$, ..., $n_m(t)$ na ulazu u m -ti pojačavač, su međusobno jednakih srednjih kvadratnih vrednosti. Kako je reč o nezavisnim slučajnim procesima, ukupna srednja kvadratna vrednost šuma na ulazu u prijemnik jednaka je zbiru srednjih kvadratnih vrednosti šumova. Ovaj efekat naziva se “kumulativni efekat” šuma.

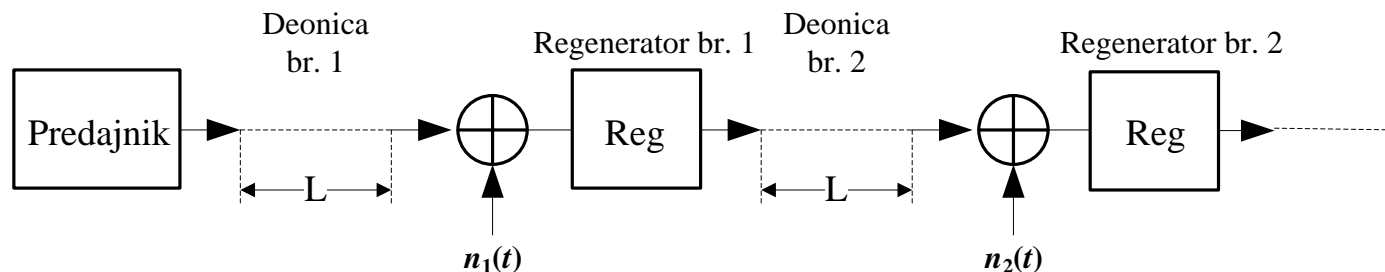
$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 = m\sigma^2$$

*Ukupna verovatnoća greške za prenos binarnim polarnim impulsima u slučaju prenosa sa pojačavačima jednaka je

$$P_{e,tot} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma_e} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2m}\sigma} \right)$$

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (4)

*Blok šema sistema za prenos signala sa regeneratorima



*Regeneratori se primenjuju da bi se smanjio efekat šuma. Pri ovom načinu prenosa ne dolazi do pojave “kumulativnog efekta” šuma. Vrednost binarnog polarnog signala na ulazu u svaki regenerator je $\pm U$, a srednja kvadratna vrednost šuma σ^2 .

*Verovatnoća greške u odlučivanju u svakom od regeneratora iznosi

$$P_{e,reg} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (5)

*Do greške pri prenosu signala korišćenjem m regeneratora dolazi kada se greška u odlučivanju javi na neparnom broju regeneratora (ako se za određen bit pojavi paran broj grešaka, taj bit je na kraju linije veze ispravno prenet!).

* Za određivanje ukupne verovatnoće greške pri prenosu signala sa regeneratorima potrebno je uzeti u obzir sve moguće načine na koje može doći do greške na neparnom broju regeneratora.

*Ukupna verovatnoća greške za prenos binarnim polarnim impulsima u slučaju prenosa sa regeneratorima jednaka je

$$P_{e,tot} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ neparno}}}^m \binom{m}{i} P_{e,reg}^i (1 - P_{e,reg})^{m-i}$$

*U slučaju kada je verovatnoća greške na jednom regeneratoru dovoljno mala ($P_{e,reg} \ll 1$) važi aproksimacija

$$P_{e,tot} = mP_{e,reg}$$

Sistem za prenos signala sa pojačavačima i regeneratorima (6)

a) Slučaj sa pojačavačima

1) $m=100, U/\sigma=8;$ $P_{e,tot} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2m}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{8}{\sqrt{200}}\right) = 0.212$

2) $m=15, U/\sigma=4;$ $P_{e,tot} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2m}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{4}{\sqrt{30}}\right) = 0.151$

3) $m=4, U/\sigma=1.$ $P_{e,tot} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2m}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = 0.309$

a) Slučaj sa regeneratorima

1) $m=100, U/\sigma=8;$ $P_{e,reg} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) = 1.35 \cdot 10^{-15} \Rightarrow P_{e,tot} = 0.135 \cdot 10^{-12}$

2) $m=15, U/\sigma=4;$ $P_{e,reg} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = 6.27 \cdot 10^{-5} \Rightarrow P_{e,tot} = 0.94 \cdot 10^{-3} =$

3) $m=4, U/\sigma=1.$ $P_{e,reg} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.317 \Rightarrow$

$$P_{e,tot} = 4 \cdot 0.317^1 (1 - 0.317)^{4-1} + 4 \cdot 0.317^3 (1 - 0.317)^{4-3} = 0.49$$

Literatura



- [1] Dukić M., *Principi telekomunikacija*, Akademska misao, 2008, Beograd.
- [2] Haykin S., *Communication Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1998, New York.
- [3] Dukić M., Marković G., Vujić D., *Principi telekomunikacija – Zbornik rešenih zadataka*, Akademska misao, 2009, Beograd.
- [4] Praktikum za laboratorijske vežbe.

*Zadaci urađeni po uzoru na 7.13 i 7.21 iz [3].