



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2011/2012.*



-VI-

Slučajni signali, šum

Slučajni signali

* Do sada izložena harmonijska analiza bavila se određivanjem spektra determinističkih signala

- Da bi se odredili odgovarajući integrali (Furijeova transformacija) bilo je neophodno poznavati vremenski oblik signala $x(t)$ čiji se spektar određuje.
- Takvi signali su bili opisani nekim egzaktnim matematičkim izrazom - funkcijom vremena - i zato su nazivani determinističkim.
- Deterministički signali u telekomunikacionim sistemima imaju veliki značaj ali oni ne nose informaciju!

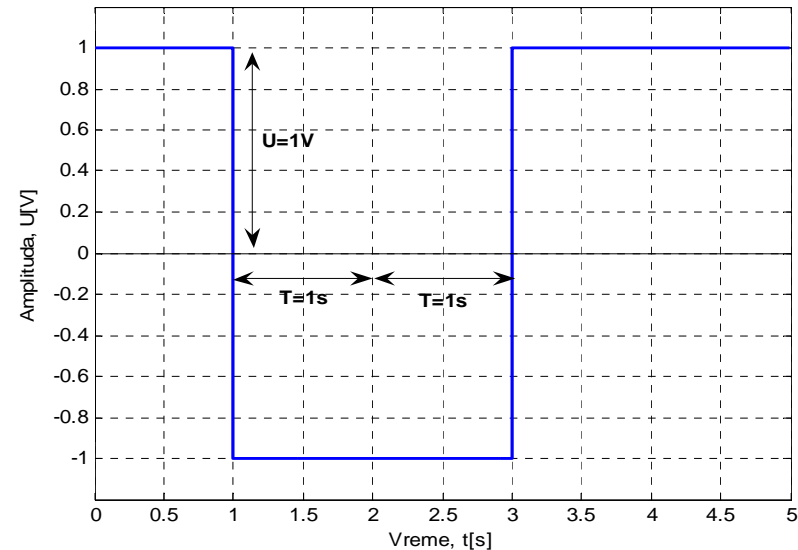
* Signali koji nose informaciju su po pravilu **slučajni**!

- Kada bi znali šta će izvor da emituje u budućnosti, ne bi ni bilo potrebe za prenosom signala!
- Izvor u opštem slučaju može da emituje jedan od mogućih signala iz nekog skupa (konačnog ili beskonačnog).
- Vremenski oblik slučajnog signala ne može se potpuno tačno opisati egzaktnom funkcijom na proizvoljno dugom vremenskom intervalu.
- Moguće je poznavati samo neke osobine (parametre) slučajnog signala!

Primer – digitalni signal

* Izvor emituje povorku pravougaonih impulsa trajanja T .

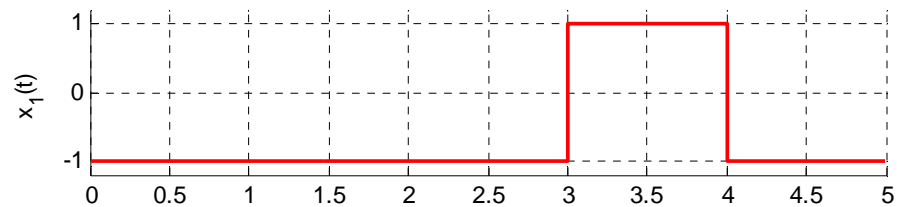
- Povorka nije periodična (T ovde označava trajanje impulsa a ne periodu)!
- Oblik impulsa tokom svakog intervala dužine T oblika je usamljenog pravougaonog impulsa (analiziran na prethodnim časovima).
 - Tada se kaže da je elementarni impuls oblika usamljenog pravougaonog impulsa amplitude U .
 - Interval T se naziva signalizacionim intervalom.
- Povorci impulsa je moguće pridružiti sekvencu bita pri čemu svaka binarna nula određuje negativni a svaka jedinica pozitivni polaritet impulsa u posmatranom signalizacionom intervalu.
 - Tada se kaže da je signalu pridružena binarna informaciona sekvenca.
 - Signal koji emituje izvor je binarni polarni digitalni signal.
 - Primer za:
 - $U=1V$, $T=1s$,
 - $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=1$, $a_5=1$



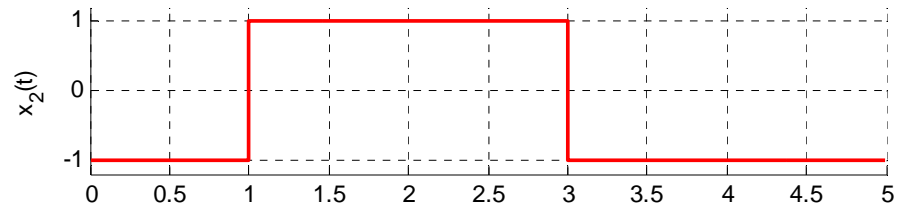
Primer – polarni binarni digitalni signal

- * **Ansambl mogućih funkcija polarnog binarnog digitalnog signala:**
 - U pet sukcesivnih signalizacionih intervala može da se pojavi $2^5=32$ različitih talasnih oblika digitalnog signala jer toliko ima različitih binarnih kombinacija informacionog sadržaja.
 - Što je vreme posmatranja duže, broj kombinacija raste eksponencijalno ali svi ovi signali imaju neke zajedničke osobine!

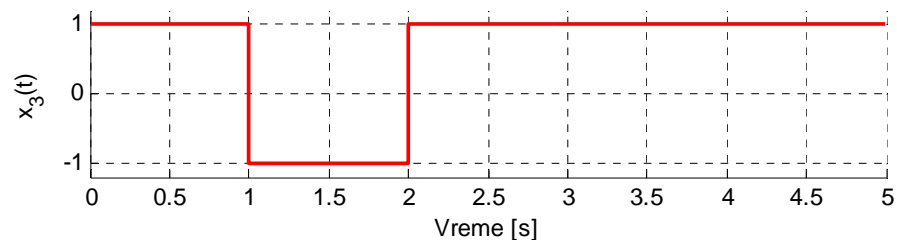
$$a^{(1)}=[0, 0, 0, 1, 0] \rightarrow$$



$$a^{(2)}=[0, 1, 1, 0, 0] \rightarrow$$

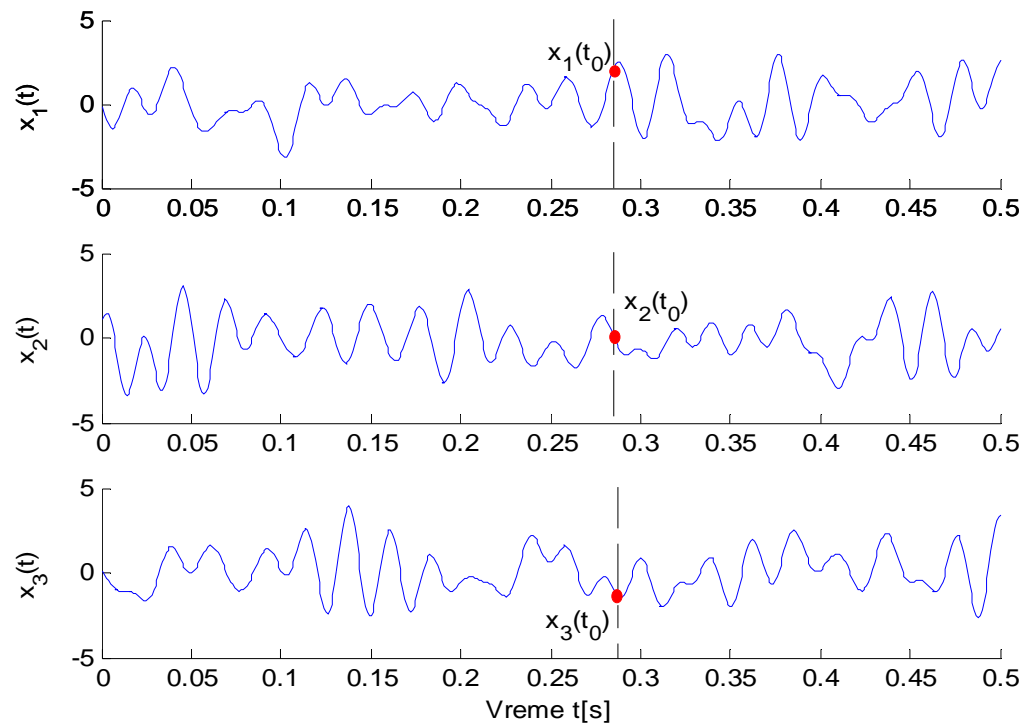


$$a^{(3)}=[1, 0, 1, 1, 1] \rightarrow$$



Slučajni procesi i slučajne promenljive

- * Izvor generiše jednu od mogućih realizacija slučajnog procesa, tj funkciju vremena koja pripada ansamblu funkcija koje imaju neke zajedničke karakteristike.
 - Slučajni proces može imati više realizacija - mogućih vremenskih funkcija $x_i(t)$;
 - Slučajna promenljiva ima vrednosti iz nekog skupa – njene realizacije nisu funkcije vremena već brojevi (odgovaraju mogućim vrednostima slučajnog procesa u nekom fiksiranom trenutku $x_i(t_0)$).



Parametri slučajne promenljive

* Veličine kojima se opisuje slučajna promenljiva x :

- **Matematičko očekivanje** (označava se sa $E[x]$), koje odgovara srednjoj vrednosti odgovarajućeg slučajnog procesa po ansamblu, u nekom trenutku t_0 ;
 - Usrednjavanje se može raditi i po jednoj realizaciji slučajnog procesa i tako se dobija srednja vrednost po vremenu:
$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt,$$
 - Ako je $E[x] = \langle x(t) \rangle$ proces je ergodičan po srednjoj vrednosti. U ovom kursu će biti posmatrani uglavnom ergodični procesi.
- **Srednja kvadratna vrednost** (označava se sa $E[x^2]$) odgovara srednjoj kvadratnoj vrednosti odgovarajućeg slučajnog procesa po ansamblu, u nekom trenutku t_0 ;
 - Usrednjavanje se može raditi i po jednoj realizaciji slučajnog procesa i tako se dobija srednja vrednost po vremenu:
$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt,$$
- **Varijansa** (označava se sa σ^2) određuje odstupanje od srednje vrednosti slučajnog procesa
 - Obično se računa pomoću formule $\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$.
 - Na osnovu vremenskog oblika signala

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x^2(t) - (x(t))^2] dt,$$

Funkcija gustine raspodele

- **Raspodela** slučajne promenljive x :

- Pokazuje sa kojom verovatnoćom slučajna promenljiva uzima vrednosti iz skupa/opsega mogućih vrednosti
- U slučaju da slučajna promenljiva može da uzme vrednosti iz konačnog skupa od N vrednosti a_1, a_2, \dots, a_N , definiše se **zakon raspodele** koji je zadat mogućim vrednostima slučajne promenljive i verovatnoćama pojave tih vrednosti

$$P(x=a_i), i=1,2,\dots,N$$

- U slučaju da slučajna promenljiva može da uzme vrednosti iz beskonačnog skupa od pri čemu njene vrednosti mogu biti iz intervala $[x_{\min}, x_{\max}]$, definiše se **funkcija gustine raspodele** slučajne promenljive x . Ona se označava sa $f_x(x)$ ili $\text{pdf}(x)$ i za nju važi:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_x(x) dx = 1$$

- **Procena funkcije gustine raspodele** obavlja se tako što se interval $[x_{\min}, x_{\max}]$ izdeli na N_0 podintervala i odredi se sa kojom verovatnoćom slučajna promenljiva može uzeti vrednosti iz pojedinog podintervala.
 - Ove verovatnoće u stvari pokazuju koliko često amplitude jedne realizacije signala $x(t)$ uzimaju vrednosti iz ovako određenih podintervala.
 - Ako je broj podintervala dovoljno veliki ($N_0 \rightarrow \infty$) zakon raspodele postaje definisan za sve moguće vrednosti slučajne promenljive i polako se pretvara u funkciju gustine raspodele koja je kontinualna funkcija.

Parametri slučajne promenljive

- Parametri slučajnog signala se mogu proceniti i direktno iz raspodele:

- Srednja vrednost:

$$E[x] = \sum_i a_i P(x = a_i) \qquad E[x] = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x f_x(x) dx$$

- Srednja kvadratna vrednost (srednja snaga signala)

$$E[x^2] = \sum_i (a_i)^2 P(x = a_i) \qquad E[x^2] = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f_x(x) dx$$

- Varijansa

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

- Ako je funkcija gustine raspodele parna funkcija od x , srednja vrednost slučajnog procesa je jednaka nuli a varijansa je jednaka srednjoj kvadratnoj vrednosti (srednjoj snazi) signala.

Autokorelaciona funkcija

- **Autokorelacija** – pokazuje da koliko se signal $x(t)$ brzo menja, tj. kolika je zavisnost između vrednosti signala u trenucima t i $t+\tau$.

- Usrednjavanje se može vršiti po članovima ansambla, za fiksirano t_0

$$R_x(\tau) = E[x(t_0) x(t_0 + \tau)]$$

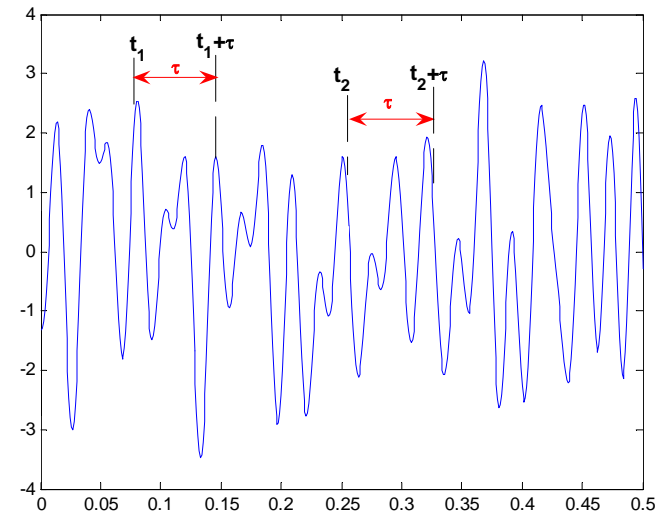
- Usrednjavanje se može vršiti po vremenu, za jednu realizaciju slučajnog procesa (a približno i na osnovu N nezavisnih diskretnih trenutaka t_1-t_N)

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)x(t_i + \tau),$$

- Ako se u oba slučaja dobija ista vrednost, slučajni proces je ergodičan po pitanju autokorelacije, tj. $R_x(\tau) = R_t(\tau)$. U ovom kursu će biti posmatrani takvi procesi.

- **Određivanje autokorelacije:**

- Odrede se vrednosti signala u nekom trenutku t_1 i trenutku pomerenom za τ , pa se pomnože.
- Postupak se ponovi za drugi trenutak t_2 pa zatim t_3, \dots (klizeći prozor).
- Izvrši se usrednjavanje po svim trenucima t_i .



Viner-Hinčinova teorema

- * **Viner-Hinčinova (*Wiener-Khinchine*) teorema:** autokorelacija i spektralna gustina srednje snage čine Furijeov transformacioni par:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$
$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

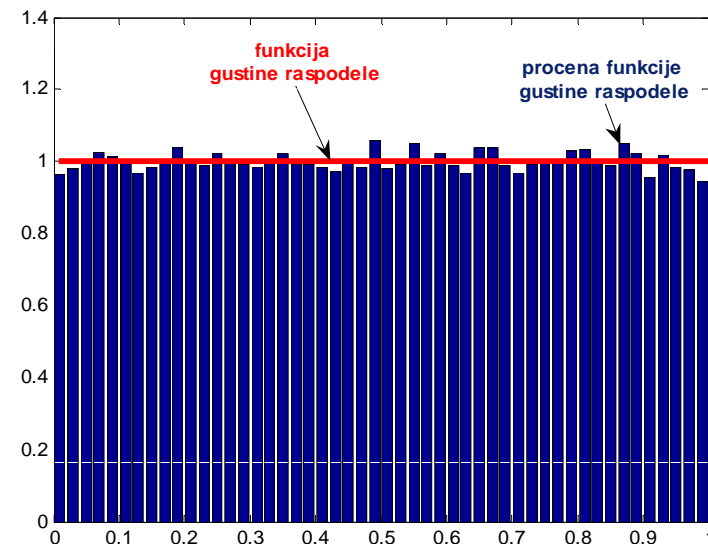
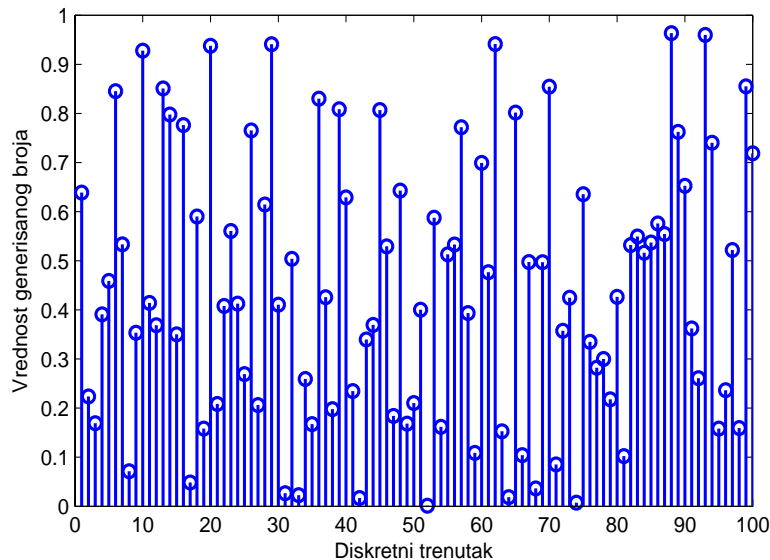
- * Pomoću ovih izraza može se odrediti spektar bilo kog slučajnog signala.
 - Autokorelacija slučajnog procesa nekad može da se odredi matematički a uvek eksperimentalno na osnovu vremenskog oblika bilo koje njegove realizacije.
 - Kada je određena autokorelacija, može se (egzaktnim rešavanjem prvog integrala ili numerički) odrediti spektralna gustina srednje snage (SGSS) slučajnog signala.
 - SGSS je realna i kontinualna funkcija, njen integral po svim učestanostima jednak je srednjoj snazi signala.
 - Autokorelacija u nuli (za pomeraj $\tau=0$) određuje srednju snagu signala.

$$P_{sr} = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

Generator slučajnih brojeva

* Generator slučajnih brojeva

- Generiše nasumično sve moguće brojeve između 0 i 1 (to je opseg vrednosti slučajne promenljive);
- Sve vrednosti su jednako verovatne - uniformna raspodela na intervalu $[0,1]$.
 - Srednja vrednost?
 - Srednja kvadratna vrednost?
 - Autokorelacija? SGSS?
- Proces je diskretan (u vremenu) a funkcija gustine raspodele (*probability density function* - *PDF*) je kontinualna – u ovom slučaju uniformna, ima istu (jediničnu) vrednost za sve vrednosti slučajne promenljive x .



Parametri uniformnog generatora slučajnih brojeva

- Parametri generatora, imajući u vidu da je $f(x)=1$ za svaku vrednost x :

- Srednja vrednost:

$$E[x] = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5$$

- Srednja kvadratna vrednost (srednja snaga signala)

$$E[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 0.33$$

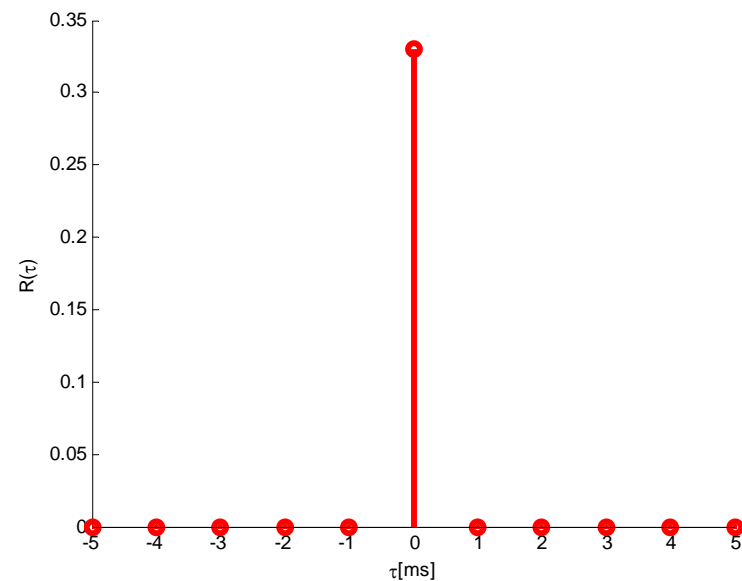
- Varijansa

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = 0.33 - (0.5)^2 = 0.08$$

- Vrednost u jednom trenutku ni na koji način ne utiče na vrednost generisanog broja u nekom narednom trenutku (signal je potpuno nekorelisan) pa je:

$$R(\tau) = \begin{cases} E[x^2] = 0.33, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{sr}}{\infty} d\tau = \text{const} \rightarrow 0, \quad \forall f$$



Parametri binarnog polarnog signala

- Binarni polarni signal – povorka polarnih pravougaonih impulsa fiksnog trajanja čiji se polaritet slučajno smenjuje tokom vremena.

- U trenutku t_0 signal može da ima vrednost U ili $-U$ sa verovatnoćama $P(U)$ i $P(-U)$.

- Parametri signala $x(t)$:

- Srednja vrednost:

$$E[x] = U * P(U) + (-U)P(-U)$$

- Srednja kvadratna vrednost:

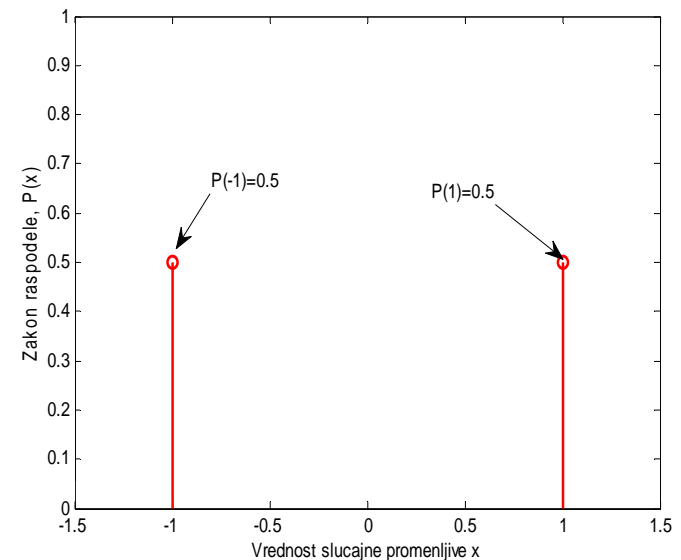
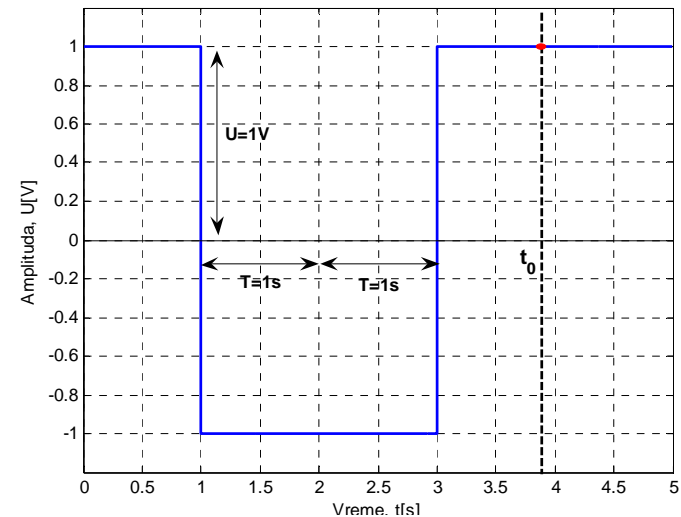
$$E[x^2] = U^2 * P(U) + (-U)^2 P(-U) = U^2$$

- Varijansa:

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = U^2 - U[P(U) - P(-U)]$$

- Ako su oba naponska nivoa jednako verovatna, srednja vrednost je jednaka nuli a srednja kvadratna vrednost varijansi.

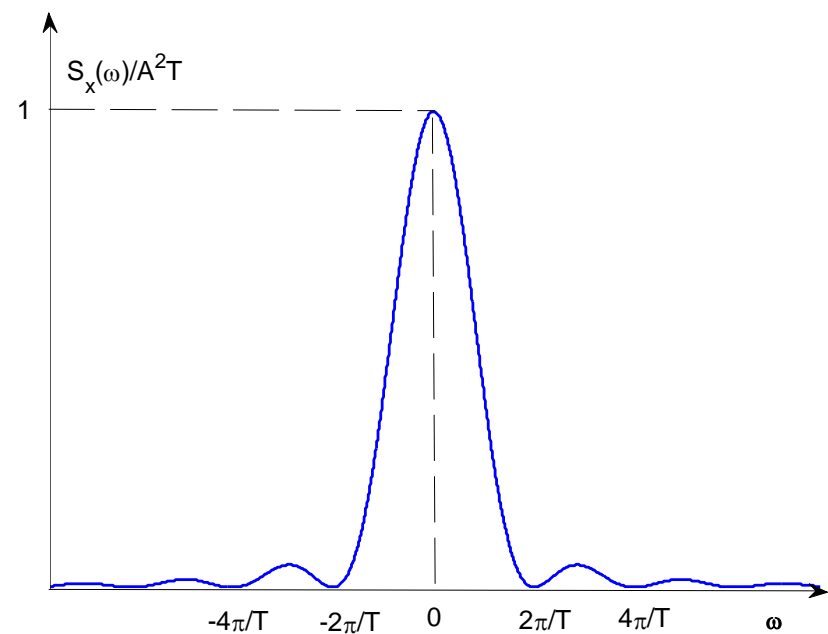
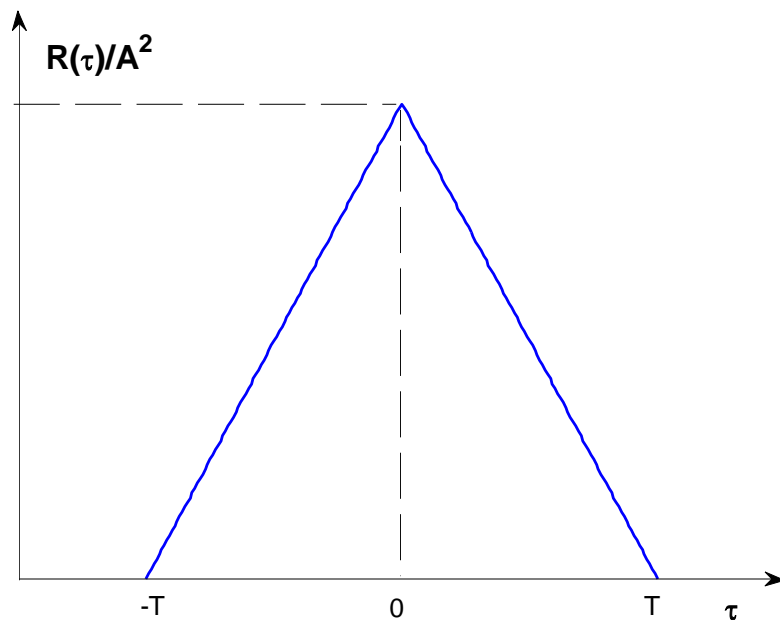
- $E[x]=0$ ali $\langle x(t) \rangle = 0.2$ (ergodičnost?)



Parametri binarnog polarnog signala

* Autokorelacija i SGSS čine Furijeov par:

- Signal je korelisan!
- SGSS je beskonačne širine i brzo opada!



Vrste šuma



* Izvori izvan posmatranog TK sistema:

- šum ambijenta, koji se preko ulaznih pretvarača (npr. mikrofona) prenosi u sistem.
- šum atmosferskog porekla
- kosmički šum
- šum izazvan dejstvom čoveka...

* Unutar posmatranog TK sistema:

- termički šum
- šum izazvan nelinearnim izobličenjem signala
- šum nastao usled linearnog preslušavanja iz niza kanala u posmatrani kanal
- Impulsni šum – karakterističan za poluprovodničke elemente, diode i tranzistore (diskretna priroda nosilaca elektriciteta)

Termički šum

- * Uvek je prisutan u sistemima za prenos signala.
- * Predstavlja pojavu koja svojstvena svim sistemima čija je apsolutna na temperatura **T veća od 0°K** .
 - U svakom provodniku zbog termičke interakcije slobodnih elektrona i molekula provodnika u uslovima termičke ravnoteže dolazi do stalnog i neregularnog kretanja elektrona.
 - Broj elektrona koji se haotično kreću i sudaraju veoma veliki, pa oni kao nosioci elektriciteta kretanjem kroz provodnik obrazuju električnu struju.
 - Zbog prirode kretanja elektrona, na krajevima provodnika javlja se napon koji predstavlja slučajnu vremensku funkciju.

Srednja gustina srednje snage termičkog šuma

- * Elementarna raspoloživa srednja snaga termičkog šuma koju otpornik R može da oda spolnjem kolu iznosi

$$d\bar{P}_{rN} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df = p_N(f) df$$

pri čemu je

T - apsolutna temperatura [K]

h - Plankova konstanta ($h=6.62 \cdot 10^{-34}$ Js)

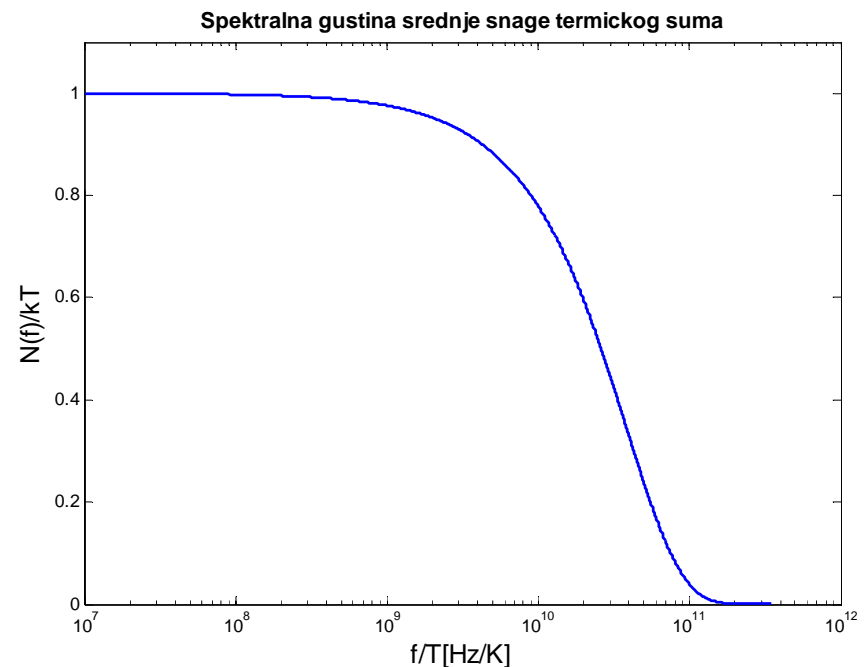
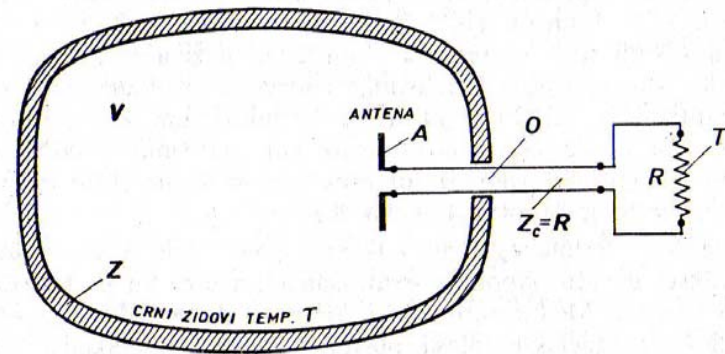
k - Boltzmannova konstanta ($1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K)

- * Kada je $hf \ll kT$ tada važi

$$e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \approx 1 + \frac{hf}{kT} - 1 = \frac{hf}{kT} \Rightarrow d\bar{P}_{rN} \approx kT df$$

- * Jednostrana SGSS termičkog šuma:

$$p_N(f) = \frac{d\bar{P}_{rN}}{df} = kT$$



Aditivni beli Gausov šum - ABGŠ

* *Additive White Gaussian Noise – AWGN*

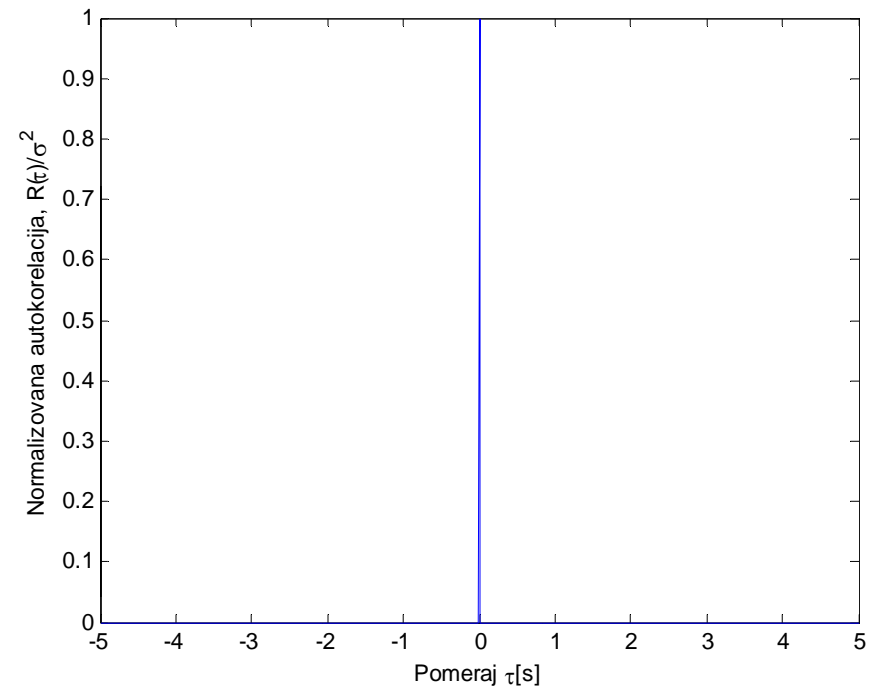
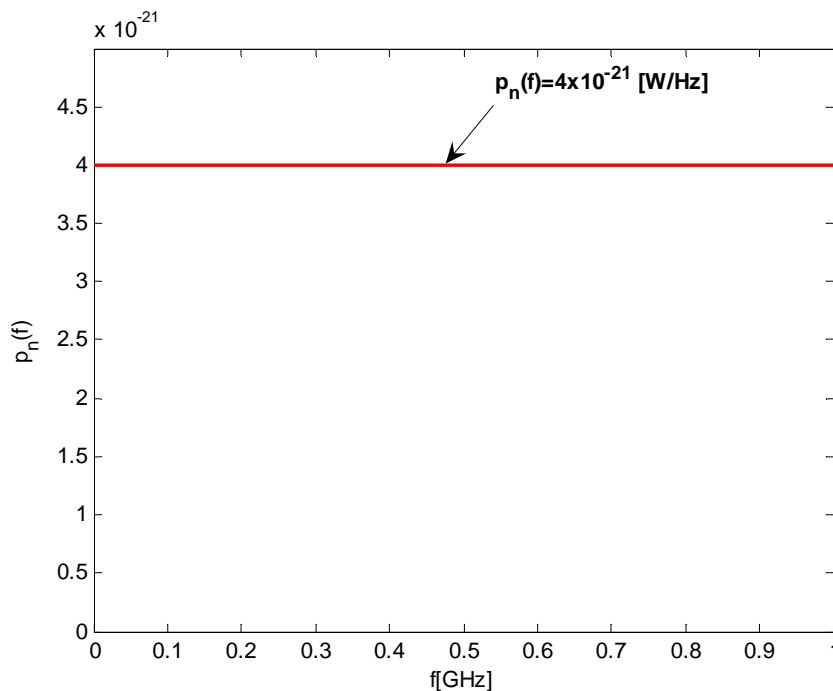
* Osobine

- SGSS je ravna za sve učestanosti i iznosi $p_n=N_0$ (jednostrano), odnosno $p_n/2=N_0/2$ (dvostrano).
- Šum je potpuno nekorelisan – ne postoji zavisnost između dva uzeta odbirka šuma, ma koliko oni bili blizu.
- Srednja snaga belog šuma je beskonačno velika.
- Šum ima Gausovu raspodelu trenutnih vrednosti.
- Srednja snaga na izlazu NF filtra granične učestanosti f_m iznosi
$$P_n=N_0f_m$$
- Šum na izlazu NF filtra jeste korelisan!

Kaskadna veza linearnih sistema

* ABGŠ je savršeno “brzopromenljiv” signal koji ima:

- Srednju vrednost nula tj. $E[n]=0$,
- Gausovu (normalnu raspodelu), nulte srednje vrednosti i varijanse σ^2 .
- Autokorelaciju koja ima vrednost različitu od nule samo za vrednost $\tau=0$, i ta vrednost je jednaka srednjoj snazi signala (u ovom slučaju varijansi σ^2).



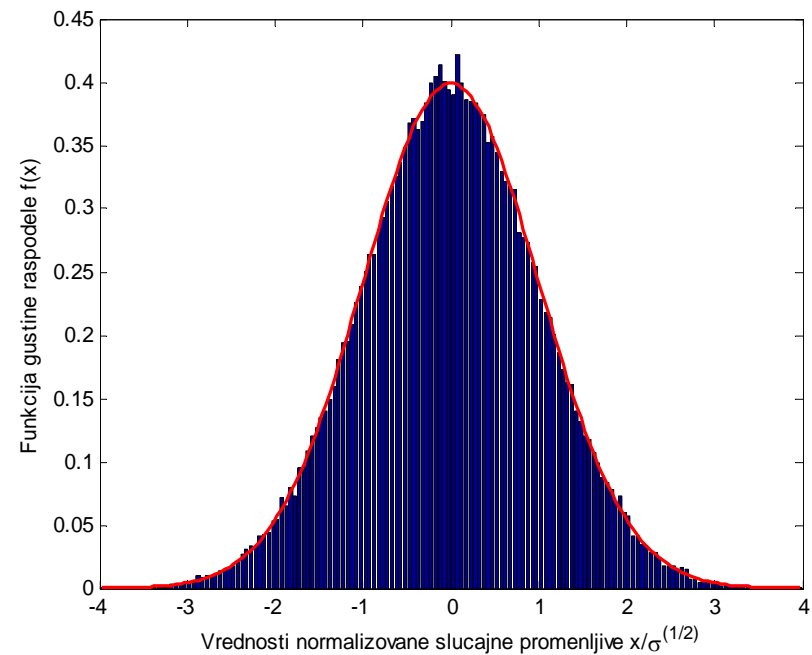
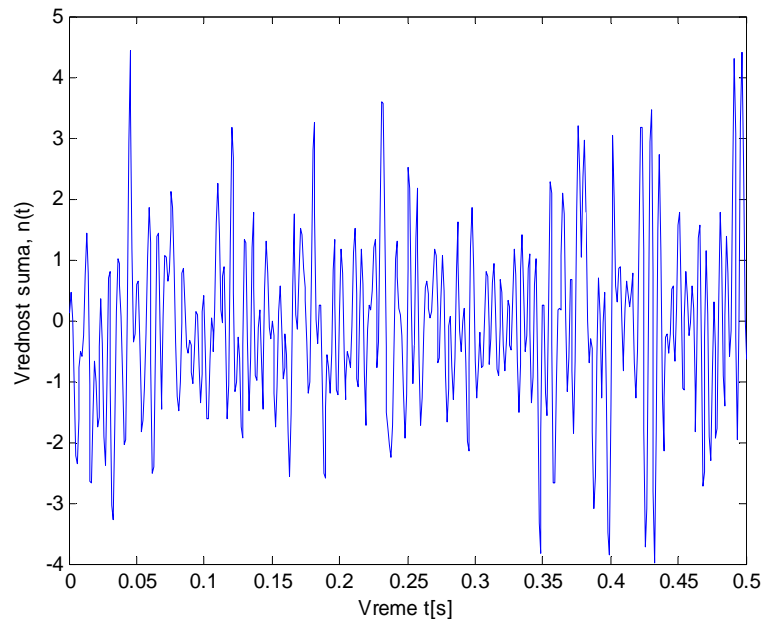
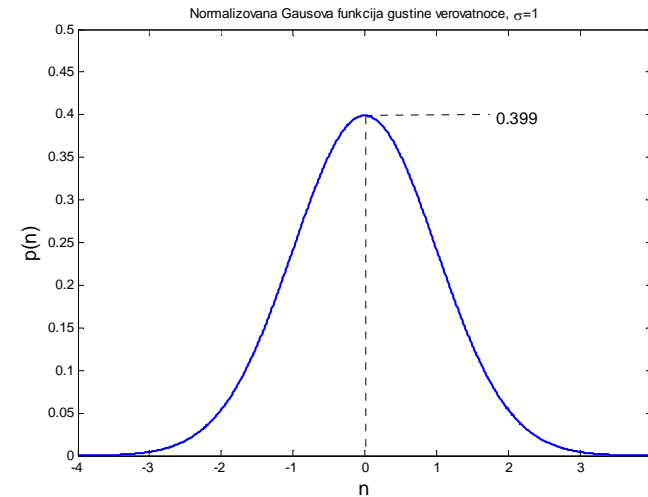
Raspodela trenutnih vrednosti šuma

* Gausova raspodela

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}, \quad n \in (-\infty, \infty)$$

$$F(n_0) = \int_{-\infty}^{n_0} f(n) dn, \quad \text{za fiksirano } n_0$$

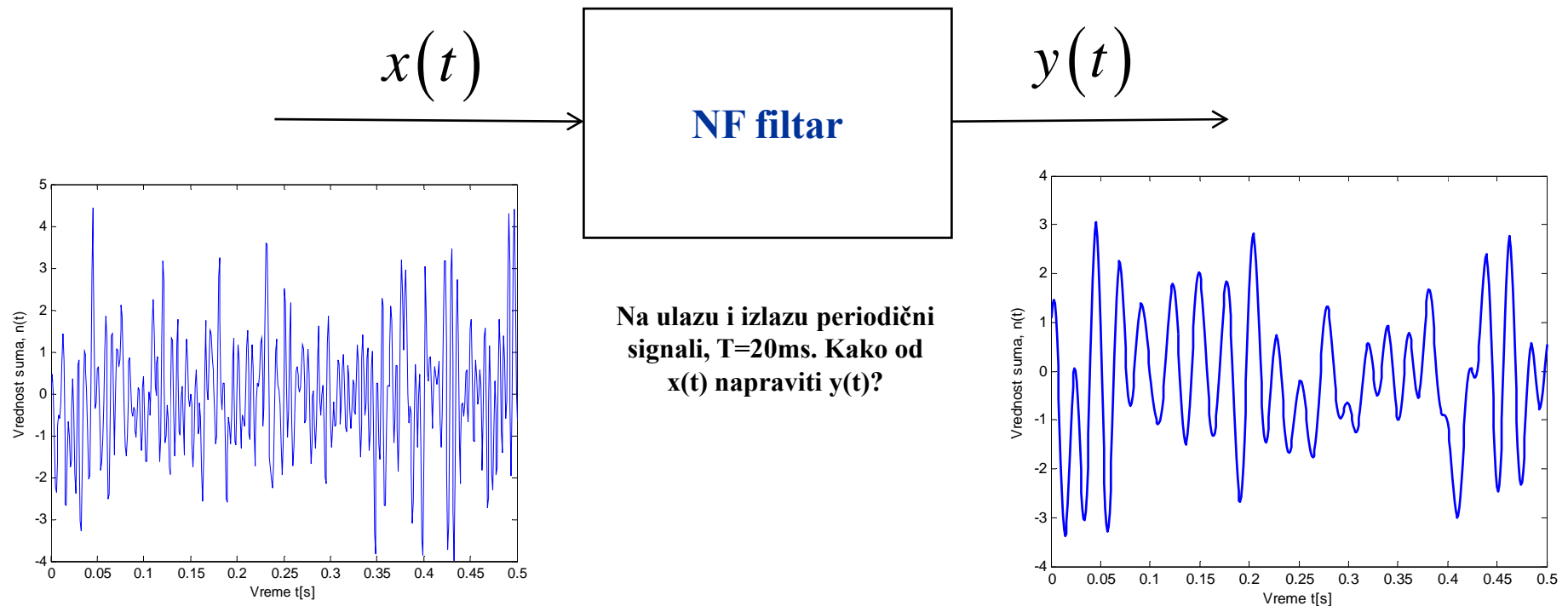
$$F(+\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0, \quad F(0) = 0.5.$$



ABGŠ propušten kroz idealni NF filter

* Vremenski oblik šuma na ulazu i izlazu filtra:

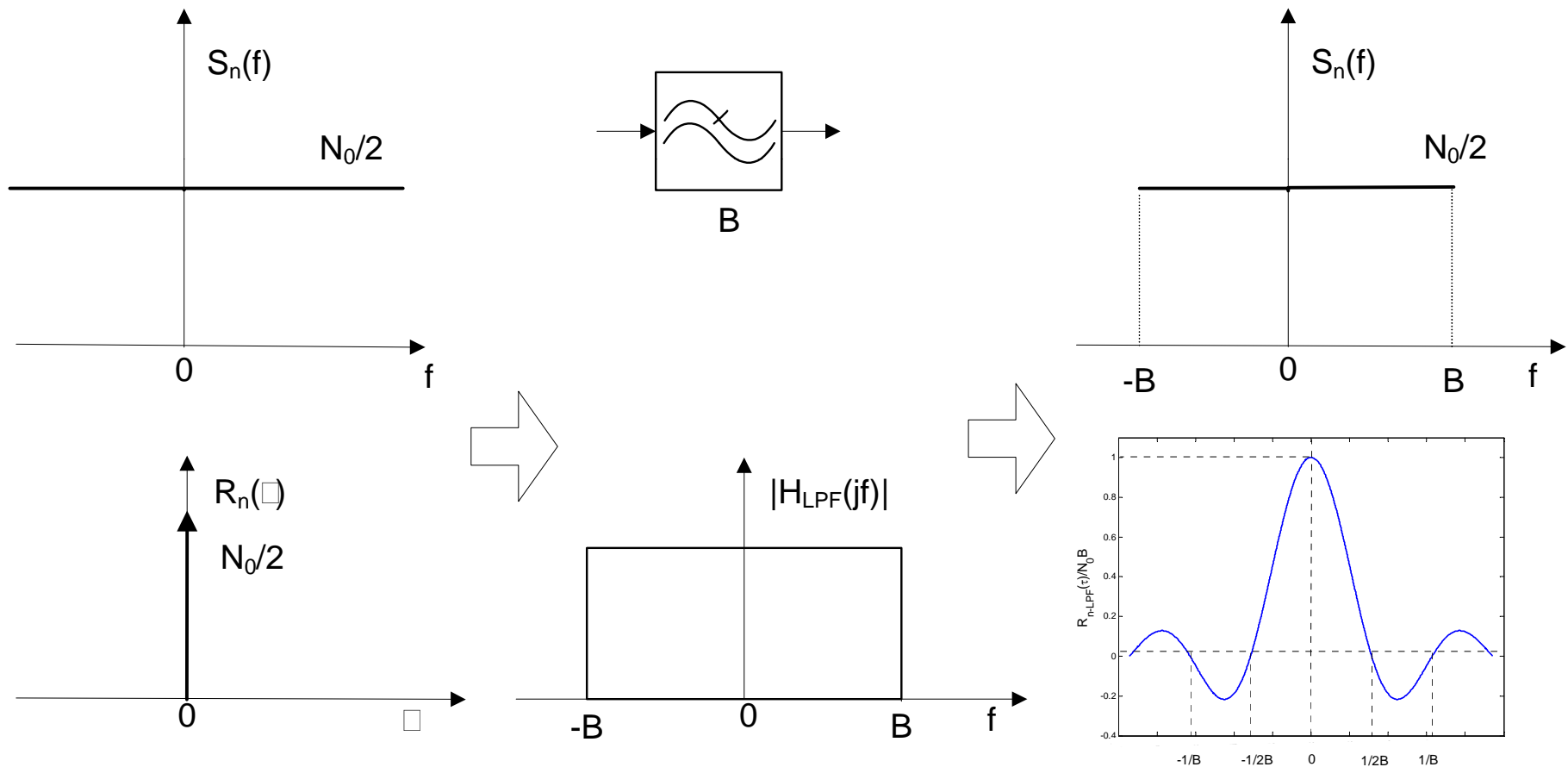
- Na ulazu je ABGŠ – beskonačno širok spektar, nekorelisan.
- Šum na izlazu nije ABGŠ – spektar konačne širine, korelisan (talasni oblik je više “zaobljen”), ima konačnu snagu.
- Oba procesa imaju Gausovu raspodelu srednje vrednosti nula.



ABGŠ propušten kroz idealni NF filter

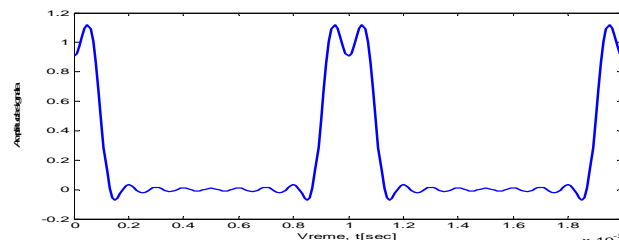
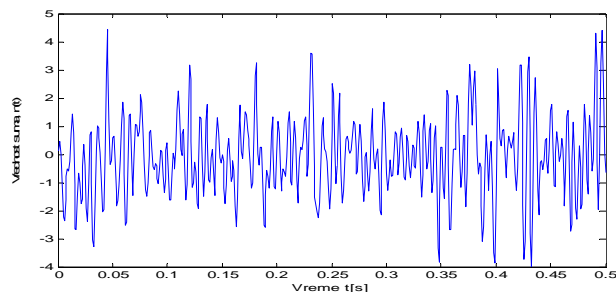
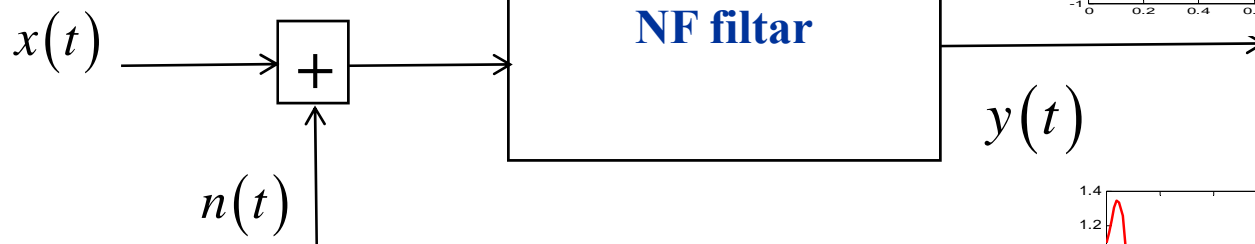
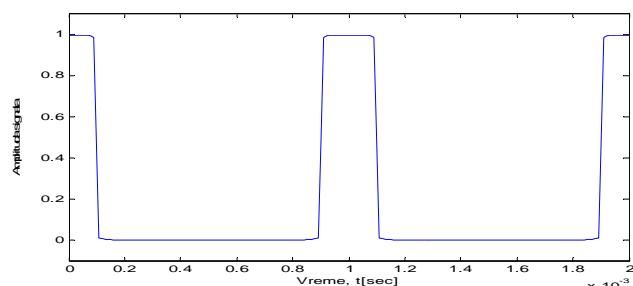
* Autokorelacija:

$$R_n(\tau) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}, \quad B = f_m$$

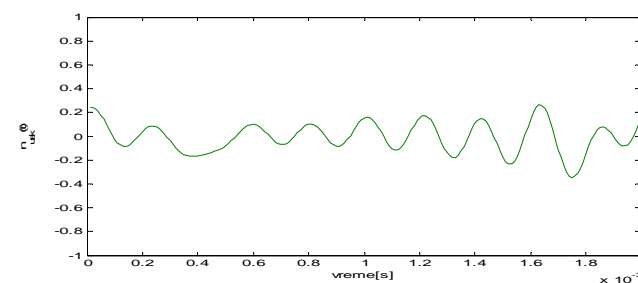


Prolazak šuma kroz linearni sistem

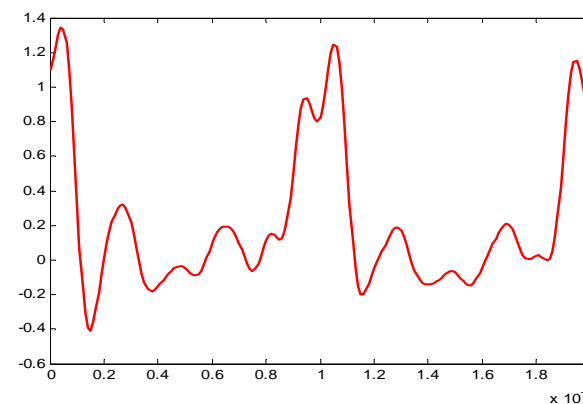
- * Npr. prolazak signala i šuma kroz NF filter
 - Ukupan odziv je jednak zbiru odziva na pojedinačne komponente pobudnog signala!



+



=



Prolazak šuma kroz linearni sistem

* Odnos signal šum

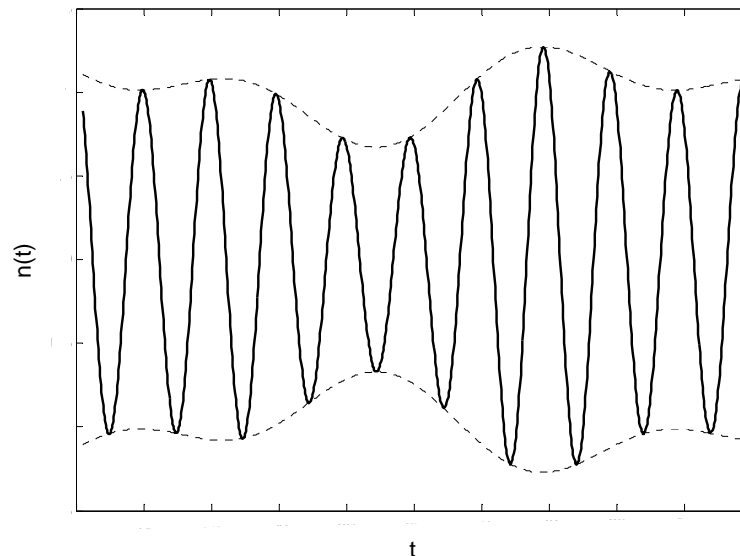
- **Odnos snage signala i snage šuma u nekoj tački sistema.**
 - Određuje kvalitet prijema (ukoliko je veći, snaga signala je jača od snage šuma, pa je signal manje izobličen).
 - Šum je aditivna interferencija (smetnja) – uvek se sabira na signal – postoje i smetnje koje se ponašaju drugačije
 - Odnos signal šum se obično izražava u decibelima

$$snr[dB] = 10 \log_{10} SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_n}$$

- **Filtriranje povećava odnos signal-šum:**
 - Snaga signala na ulazu i izlazu sistema su približno iste ako se prenesu bitne komponente u spektru
 - Snaga šuma nakon filtriranja je znatno manja nego na ulazu filtra (bez obzira da na tip filtra).

Uskopojasni šum – ABGŠ propušten proz BP filter

- Svi signali nakon modulacije mogu se smatrati signalima čiji se spektar praktično nalazi u konačnom opsegu učestanosti oko centralne učestanosti f_0 .
- U toku prenosa i na ulazu u prijemnik prenošenim signalima superponira se ulazni šum koji zauzima veoma širok spektar.
- Osnovni zadatak prijemnog filtra je da propusti koristan signal i samo onoliko šuma koliko se nalazi u opsegu korisnog signala.
- Širina spektra signala, odnosno širina propusnog opsega, relativno je mala u odnosu na centralnu učestanost f_0 pa se šum na izlazu ovakvog propusnika opsega učestanosti naziva uskopojasni šum.



Matematički model uskopojasnog šuma

- * **Slučajna vremenska funkcija $n(t)$ opisuje uskopojasni šum, čiji se spektar nalazi u opsegu učestanosti $f_0 - B/2$ do $f_0 + B/2$.**

- * **Slučajan proces $n(t)$ može se opisati izrazom**

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

- * **Pritom važi:**

- $n_c(t)$ i $n_s(t)$ se nazivaju komponentama šuma u fazi i kvadraturi, a imaju sporopromenljiv karakter.
- Spektar signala $n_c(t)$ i $n_s(t)$ je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti od 0 do f_m .
- Slučajni procesi $n(t)$, $n_c(t)$ i $n_s(t)$, odnosno slučajne promenljive koje im odgovaraju, imaju Gausovu raspodelu!
- Srednje vrednosti šuma $n(t)$ i njegovih komponentata $n_c(t)$ i $n_s(t)$ su međusobno jednake i imaju vrednost nula.
- Srednje kvadratne vrednosti šuma $n(t)$ i njegovih komponentata $n_c(t)$ i $n_s(t)$ su međusobno jednake i odgovaraju snazi šuma (snage komponentata su međusobno jednake i jednake snazi šuma).

Matematički model uskopojasnog šuma

* Raspodela komponenti u fazi i kvadraturi:

- Slučajni procesi $n_c(t)$ i $n_s(t)$ su Gausovi slučajni procesi.
- Njihove funkcije gustine verovatnoće su

$$p(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{n_c^2}{2\sigma_c^2}}$$

$$p(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{n_s^2}{2\sigma_s^2}}$$

gde je n_c amplituda slučajne funkcije $n_c(t)$ a n_s je amplituda slučajne funkcije $n_s(t)$

- Snaga komponenti

$$\overline{n^2(t)} = \sigma^2 \quad \sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma^2 = p_N B$$

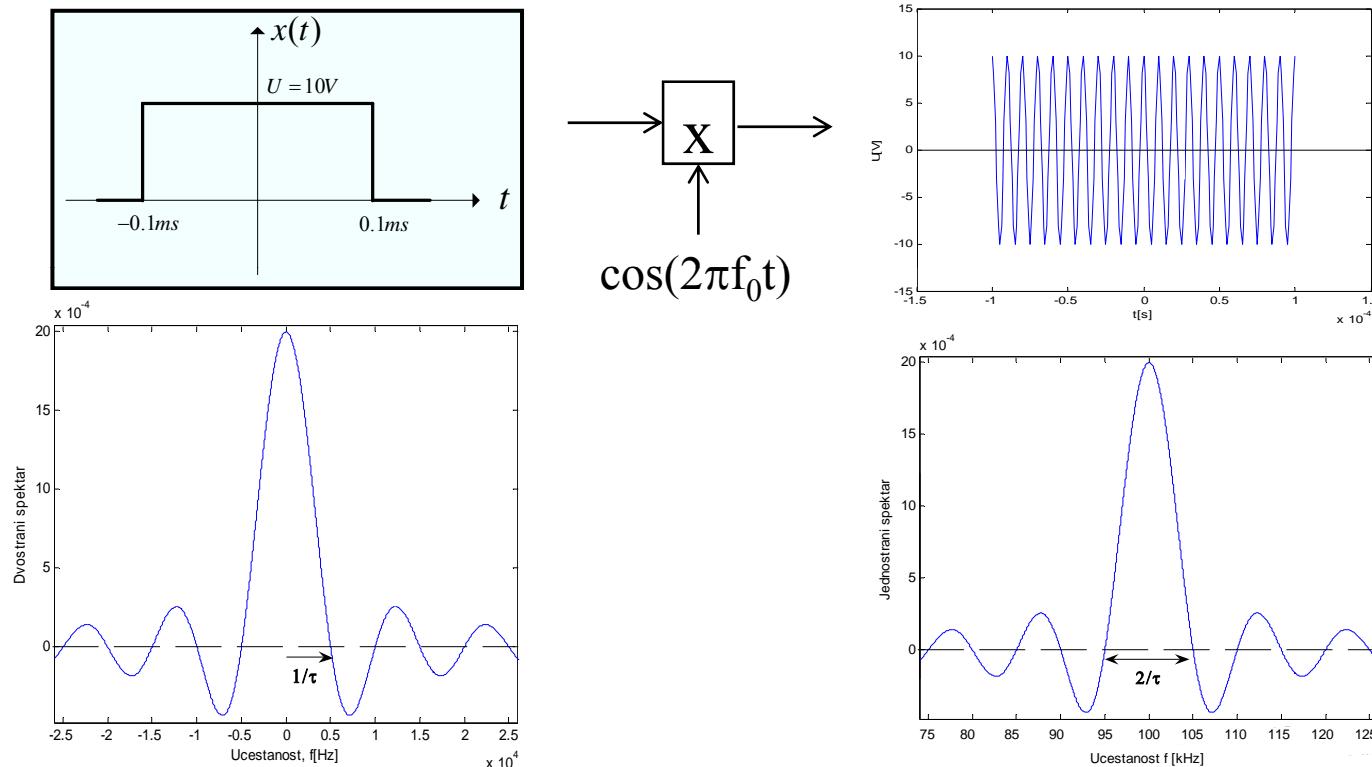


Prenos modulisanog signala u prisustvu šuma

Sistem za prenos signala u TOU

* Kakav treba da bude sistem da bi kroz njega preneli modulisan signal?

- Modulisani signal ima spektar koji se nakon translacije nalazi u transponovanom osnovnom opsegu učestanosti – TOU (primer za učestanost nosioca $f_0=100\text{kHz}$, $1/\tau=5\text{kHz}$)



- Zato je optimalno da se prenosi kroz sistem koji odgovara filtru propusniku opsega učestanosti.
- Modulisani signal ovde zauzima dva puta širi opseg učestanosti od originalnog (AM2BO).
- Čak i kada nije prikazano, podrazumeva se da se pre modulacije spektar modulišućeg signala ograniči (propuštanjem kroz NF filter), tako da bude ispunjeno $f_0 \geq f_m$.

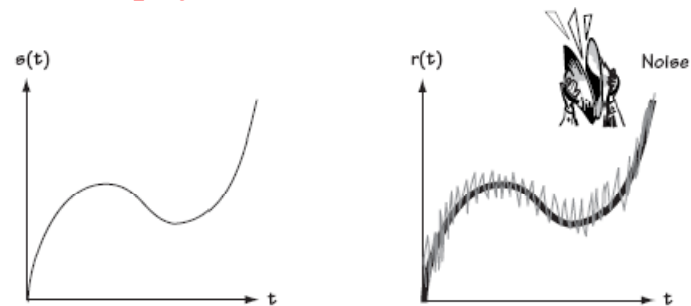
Korisni i neželjeni signali na ulazu prijemnika

- * U svakom elementu koji čini telekomunikacioni sistem za prenos, uključujući liniju veze, javljaju se različiti tipovi neželjenih signala.
- * Na ulazu svakog elementa, sklopa, u okviru sistema prenosa uvek postoje koristan signal i termički šum.
 - Termički šum uvek postoji pri prenosu signala, i generiše se u svim elementima sistema prenosa kao i duž linije veze. Doprinos ukupnoj snazi raspoloživog termičkog šuma svakog elementa može se opisati faktorom šuma posmatranog elementa, F , i/ili sopstvenom temperaturom termičkog šuma T_e .
 - Eventualno mogu postojati i drugi signali koji se smatraju "štetnim", odnosno signali interferencije.
- * Koristan signal od izlaza predajnika do ulaza u prijemnik uvek oslabi – pasivni sistem za prenos (kabl, bežični medijum) uvek unosi neko slabljenje
 - Ako je snaga korisnog signala na ulazu prijemnika dovoljno velika da se omogući njegova obrada, pojačanjem se signal može dovesti na željeni nivo.
 - Teorijski, kada ne bi bilo smetnji signal bi se mogao verno rekonstruisati ma kolika bila njegova snaga na ulazu prijemnika.
 - Minimalni nivo signala koji omogućava prijem signala naziva se osetljivost prijemnika - za standardne komercijalne radio prijemnike reda 10-100nW.

Značaj odnosa signal-šum, dobitak prijemnika

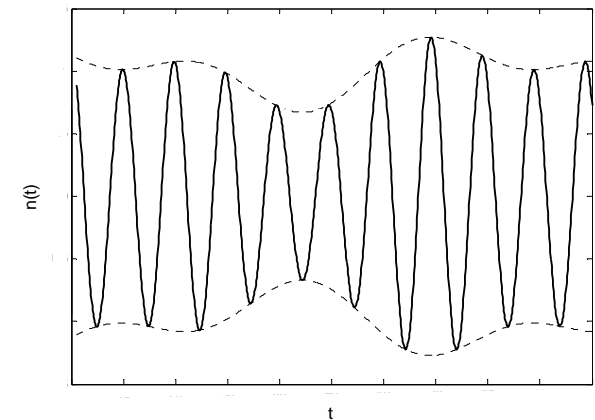
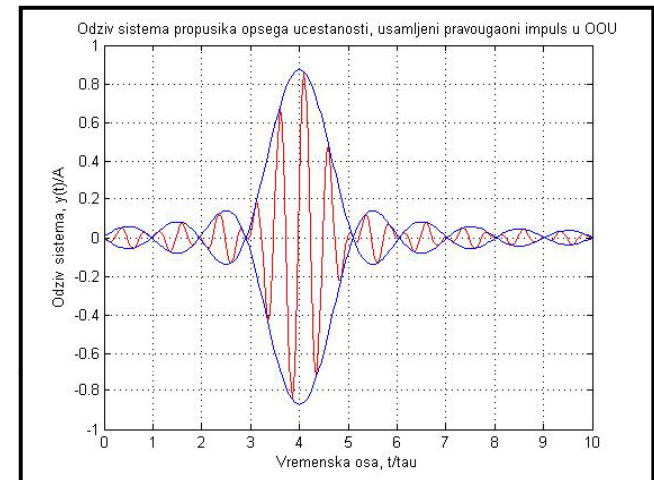
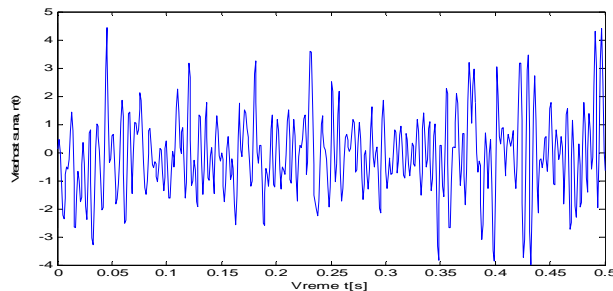
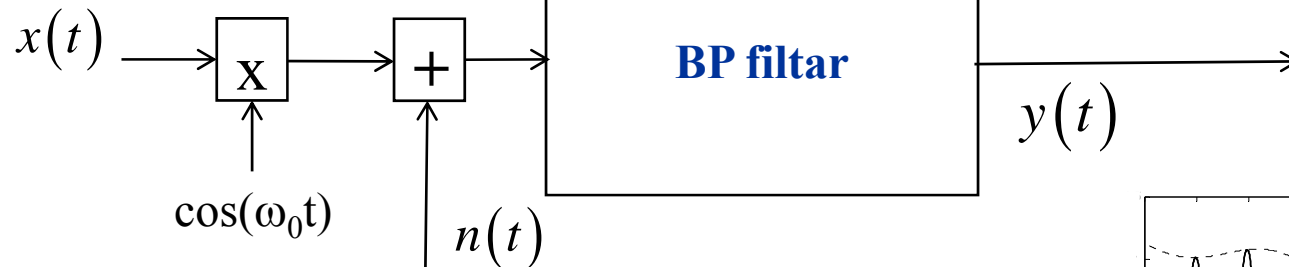
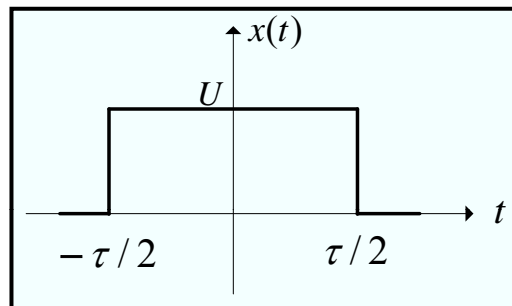
- * U svakom sistemu prenosa, termički šum se superponira (sabira) na koristan signal.
 - Nije dovoljno znati kolika je snaga signala (P_s), već treba znati i kolika je snaga šuma (P_n) na ulazu prijemnika.
 - Ako je šum jači od korisnog signala, ne znači nam puno što je snaga signala na ulazu prijemnika velika ($P_s=100\text{nW}$ sa $P_n=10\text{nW}$ je bolje od kombinacije $P_s=10\text{mW}$ sa $P_n=20\text{mW}$).
 - Iz tog razloga, kvalitet signala na izlazu telekomunikacionog sistema ne opisuje vrednost srednje snage korisnog signala već odnos ove vrednosti sa srednjom snagom termičkog šuma, tj. odnos signal/šum - S/N (SNR, *Signal-to-Noise Ratio*).
- * Kada se posmatra prenos signala korišćenjem modulacije/demodulacije signala, od interesa je posmatranje vrednosti S/N na ulazu i izlazu iz prijemnika signala.
 - Odnos između vrednosti S/N na izlazu i vrednosti S/N na ulazu u prijemnik karakteriše posmatrani postupak prenosa signala i naziva se dobitak prijemnika.
 - Dobitak (*gain*) prijemnika definiše se izrazom:

$$G = \frac{(S/N)_{\text{izlaz}}}{(S/N)_{\text{ulaz}}}$$



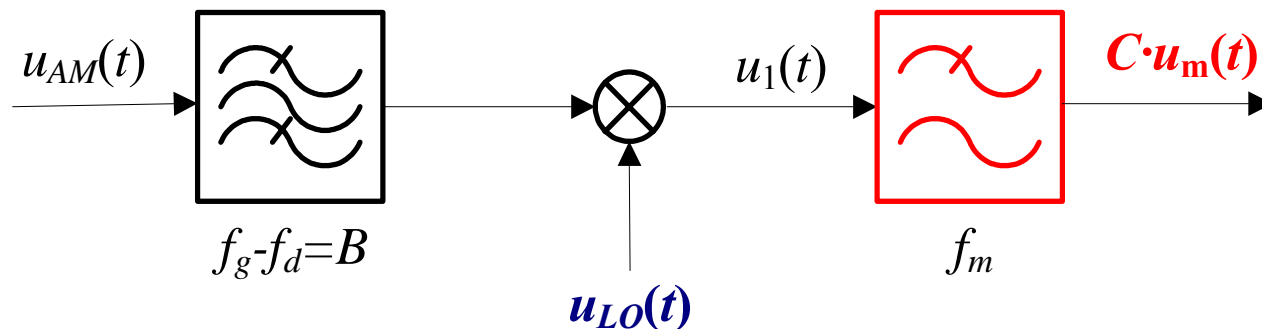
Prolazak signala i šuma kroz BP filter

- Ukupan odziv je jednak zbiru odziva na pojedinačne komponente pobudnog signala!



Sinhrona demodulacija AM signala

- * **Standardni postupak sinhronne (koherentne) demodulacije AM signala.**
 - Ovo je jedini mogući postupak demodulacije za AM2BO i AM1BO.
 - Kod KAM je, pored ovog postupka, moguća i nekoherentna detekcija (detektor anvelope).
 - Čak i kada je detekcija koherentna, kod KAM se nosilac na strani prijema može izdvojiti iz primljenog signala.
- * **Za različite tipove modulacije razlikuje se samo propusni opseg ulaznog filtra propusnika opsega učestanosti ($B_{2BO}=2f_m$ za AM-2BO i KAM, $B_{1BO}=f_m$ za AM-1BO signale).**

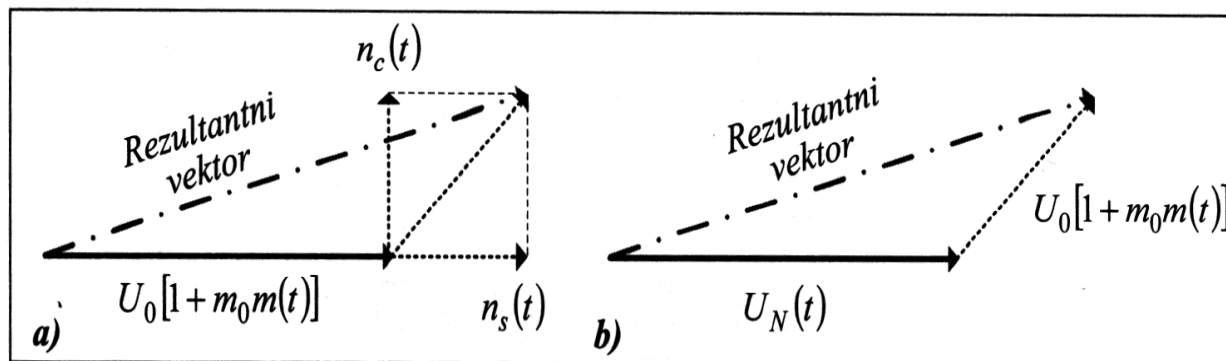


Sinhrona demodulacija AM signala

- * Ukupan signala na ulazu u prijemnik dat je izrazom:

$$u_u(t) = u_{AM}(t) + n_u(t)$$

- * Pod ulazom prijemnika smatra se izlaz filtra propusnika opsega učestanosti, koji se uvek stavlja na ulaz demodulatora.
 - Smatra se da je širina propusnog opsega veća od širine spektra modulisanog signala (kome je spektar prethodno ograničen samo na bitne komponente). Zato za slučaj idealnog BP filtra $u_{AM}(t)$ potpuno odgovara poslatom modulisanom signalu.
 - BP filter pretvara ABGŠ u uskopojasni šum, označen sa $n_u(t)$. Dok ABGŠ teorijski ima komponente na svim učestanostima (u tom idealnom slučaju beskonačnu snagu), uskopojasni šum uvek ima konačnu snagu.
 - Kod signala na ulazu prijemnika menja se i amplituda (diktirano promenama modulišućeg signala ali i zbog uticaja šuma) ali i faza (samo zbog uticaja šuma).



Sinhrona demodulacija AM signala

* Sve analize biće date za:

- Normalizovani modulišući signal $m(t)$

$$m(t) = u_m(t) / U_m, U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

- Nosilac AM signala $u_0(t)$ jedinične amplitude, generisan na predaji

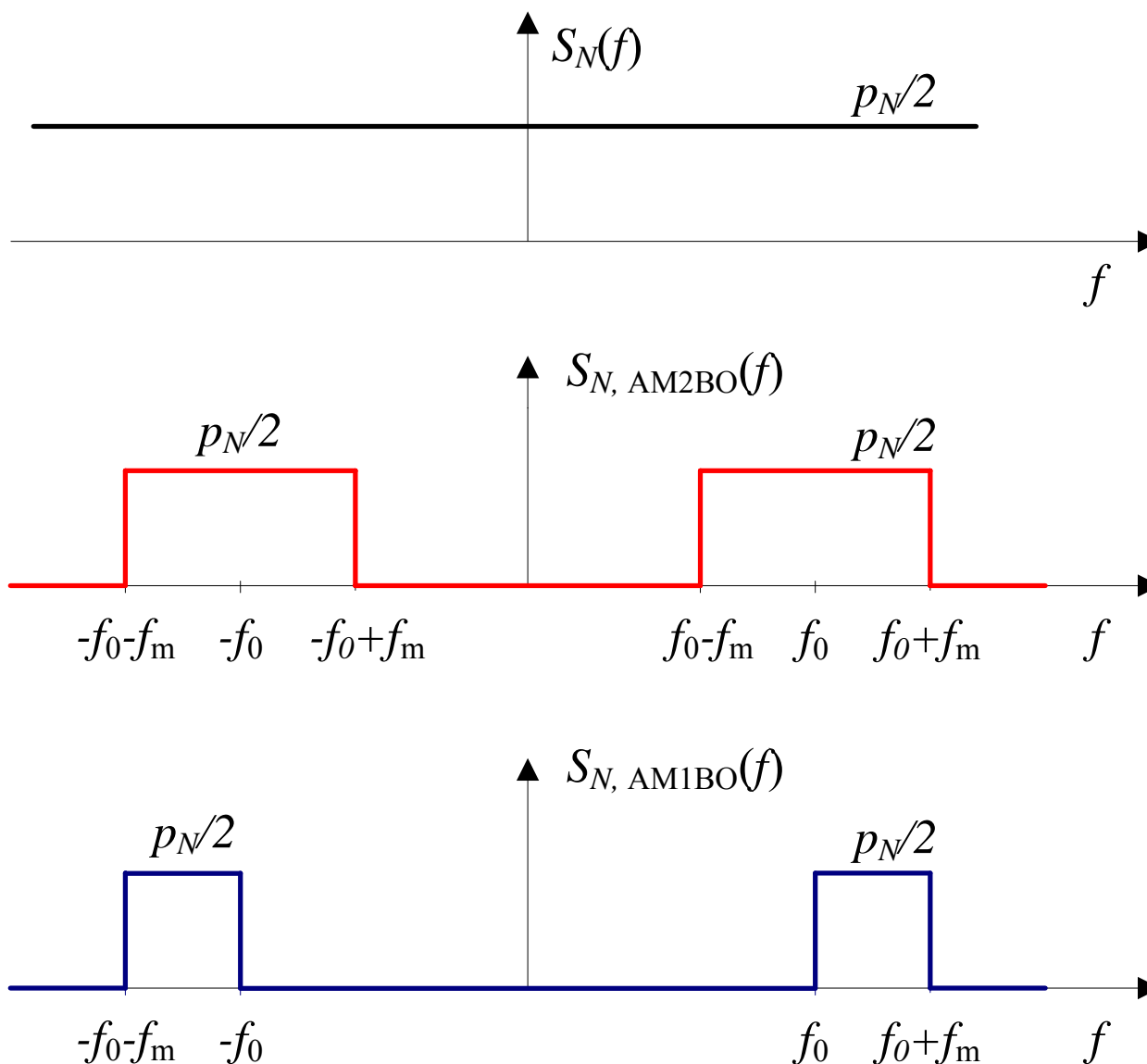
$$u_0(t) = \cos \omega_0 t$$

- Lokalno generisani nosilac $u_{LO}(t)$ savršeno je sinhronizovan sa $u_0(t)$ pa je

$$u_{LO}(t) = U_0 \cos \omega_0 t$$

- Optimalno je da bude $U_0=2$, tj. da amplituda lokalno generisanog nosioca (u prijemniku) bude dva puta veća od amplitude nosioca generisanog u predajniku.
 - Primer – prostoperiodičan modulišući signal $u_m(t)=U_m \cos(2\pi f_m t)$, AM2BO modulacija.
 - Ovaj signal u dvostranom amplitudskom spektru ima dva delta impulsa (na učestanostima f_m i $-f_m$), koje imaju iste “visine” – po $U_m/2$.
 - Nakon modulacije, za jediničnu amplitudu nosioca na strani predaje, u dvostranom amplitudskom spektru postoje četiri delta impulsa (na učestanostima f_0-f_m , f_0+f_m , $-f_0-f_m$ i $-f_0+f_m$), koje imaju iste “visine” – po $U_m/4$.
 - Nakon demodulacije, za jediničnu amplitudu nosioca na strani predaje, u dvostranom amplitudskom spektru za $|f|<f_m$ postoje dva delta impulsa (na učestanostima $-f_m$, $+f_m$). Razmisliti kolike su njihove “visine”.

Šum na ulazu/izlazu filtra propusnika učestanosti (AM)



Šum na izlazu filtra propusnika učestanosti (AM)

- * Dvostrana SGSS ABGŠ, na ulazu u filter propusnik opsega učestanosti (uračunat je uticaj šuma nastalog u kanalu i termičkog šuma koji se javio u samom prijemniku):

$$S_N(\omega) = \frac{p_N}{2} = \frac{FkT}{2}$$

pri čemu je kT raspoloživa jednostrana SGSS šuma u kanalu, a F faktor šuma prijemnika.

- * Ukupna srednja snaga šuma na ulazu u prijemnik, za slučaj AM sa dva i sa jednim bočnim opsegom je (integraljenje je lakše raditi na jednostranom spektru šuma):

$$P_{Nu,2BO} = \int_{B_{PO}} \frac{p_N}{2} df = \int_{f_0-f_m}^{f_0+f_m} p_N df = 2p_N f_m = 2FkTf_m \wedge B_{2BO} = 2f_m$$
$$P_{Nu,1BO} = \int_{B_{PO}} \frac{FkT}{2} df = \int_{f_0}^{f_0+f_m} p_N df = p_N f_m = FkTf_m \wedge B_{1BO} = f_m$$

- * U slučaju AM-2BO i KAM sistema, srednja snaga šuma na ulazu u prijemnik je dva puta veća pošto je propusni opseg sistema duplo veći.

Snaga korisnog signala na ulazu prijemnika

- * Neka je U amplituda nosioca na strani prijema (nije ista kao amplituda na predaji – mnogo je manja jer je oslabljena, m_0 je indeks modulacije)

- * Jedan bočni opseg

$$P_{1BO} = \frac{m_0^2}{4} \frac{U^2}{2R}$$

- * Oba bočna opsega

$$P_{2BO} = 2P_{1BO} = \frac{m_0^2}{2} \frac{U^2}{2R}$$

- * KAM – dva bočna opsega i nosilac

- Snaga nosioca

$$P_0 = \frac{U^2}{2R}$$

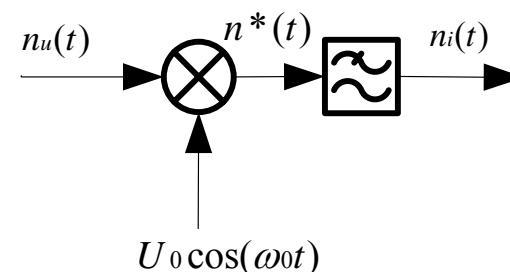
- Snaga KAM

$$P_{KAM} = \frac{U^2}{2R} + \frac{m_0^2}{4} \frac{U^2}{2R} + \frac{m_0^2}{4} \frac{U^2}{2R} = \frac{U^2}{2R} \left(1 + \frac{m_0^2}{2}\right)$$

Šum na izlazu filtra propusnika učestanosti (AM)

* Uticaj demodulatora

- Na ulazu produktnog modulatora uskopojasni šum
- Na drugom ulazu signal lokalno generisanog nosioca
- Na izlazu isto Gausov šum

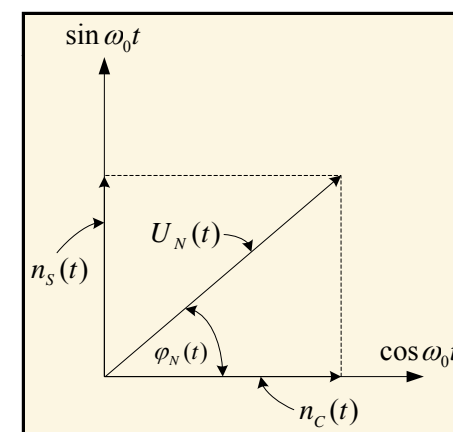


* Uskopojasni šum na ulazu

$$U_N(t) = n_u(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

$$P_{Nu} = \overline{n_u^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \begin{cases} 2p_N f_m, & \text{AM-2BO, KAM} \\ p_N f_m, & \text{AM-1BO} \end{cases}$$

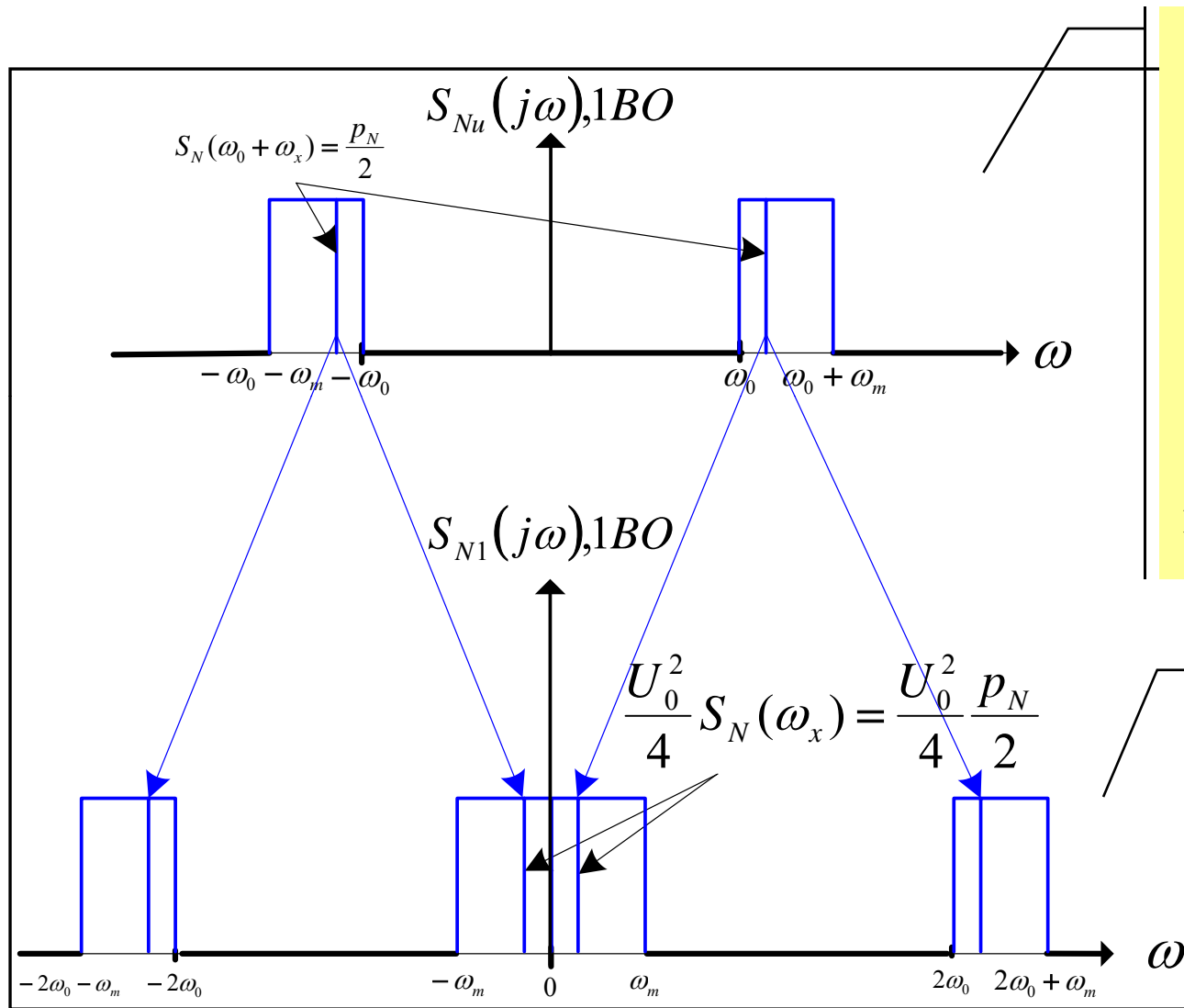
$$n^*(t) = U_0 n_c(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t - U_0 n_s(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$



* Kakav šum se pojavljuje na izlazu demodulatora?

- Komponente postoje oko nule i dvostruke učestanosti nosioca.
- Izlaz demodulatora je izlaz NF filtra;
- To je šum koji se dobija propuštanjem ABGŠ kroz NF filter (odgovara uskopojasnom šumu za $f_0=0$)
- Kolika je snaga ovog šuma?

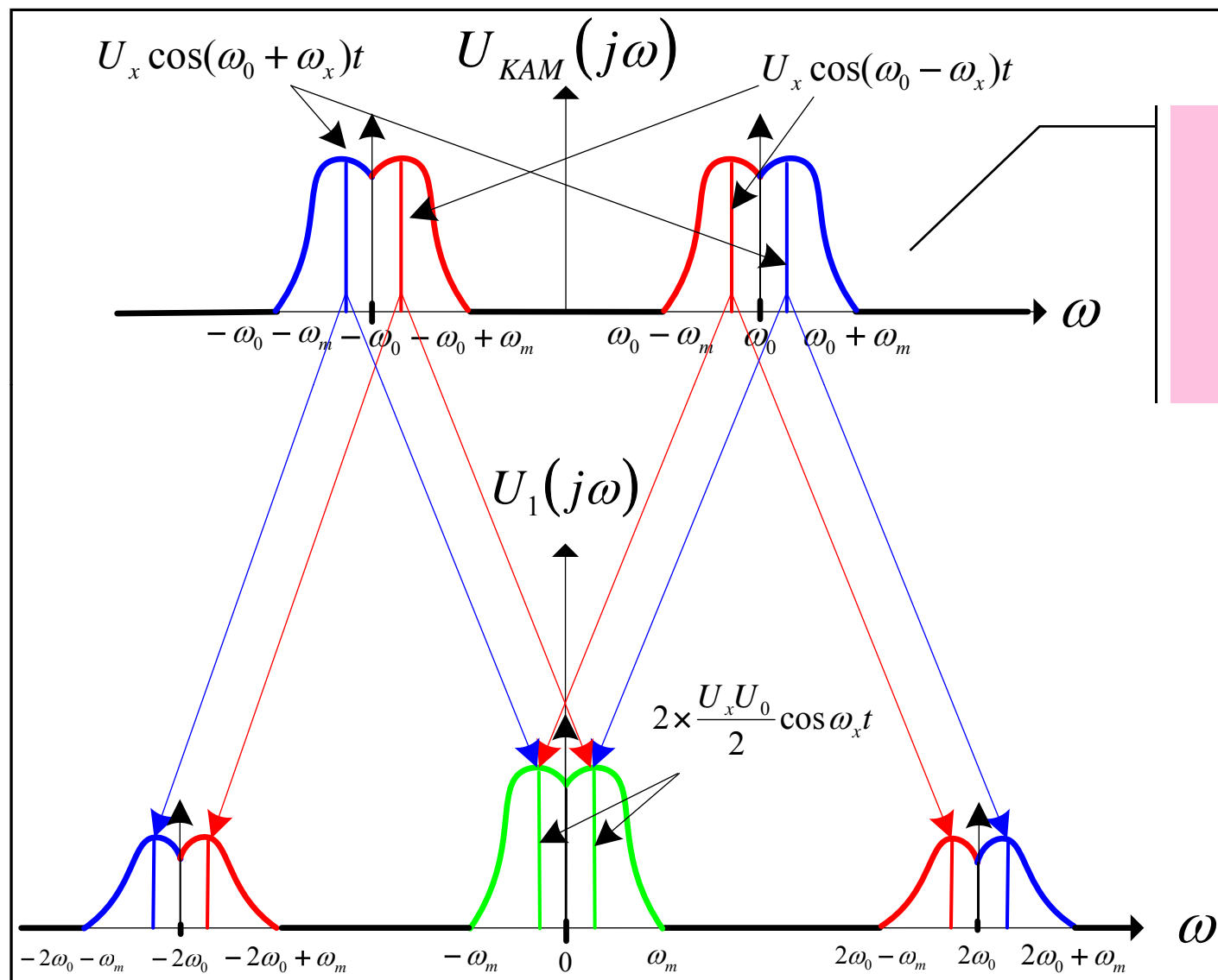
Prenos šuma - Uticaj AM demodulacije



Pri množenju signala šuma koji se javlja na izlazu ulaznog filtra sa prostoperiodičnim lokalno generisanim nosiocem $u_{LO}(t)$, dolazi do transliranja SGSS šuma za učestanost nosioca AM signala, f_0 .

Prikaz spektara uskopojasnog šuma pre i posle demodulacije za slučaj AM-1BO, i to za GBO.

Snaga KAM signala na izlazu prijemnika



Translacija
spektra KAM
signala pri
sinhronoj
demodulaciji.

Sinhrona demodulacija AM signala

- * KAM signal, kao i AM-2BO signal, sadrži oba bočna opsega, mogu se zapaziti simetrične spektralne komponente $f_0 - f_x$ i $f_0 + f_x$. Pri translaciji spektra signala u OOU, dolazi do preklapanja ovih komponenti iz GBO i DBO i one se sabiraju po amplitudi.
- * Kao i kod AM-2BO signala, povećanje amplitude za 2 puta uslovljava povećanje snage signala za 4 puta. Snaga demodulisanog korisnog signala na izlazu prijemnika je 4 puta veća od srednje snage jednog bočnog opsega modulisanog signala na ulazu prijemnika (tj. dva puta veća od snage ukupnog signala na ulazu), uz uticaj pojačanja samog prijemnika D_p .
- * Kao rezultat dobija se:

$$G_{KAM} = \frac{(P_{Si,KAM} / P_{Ni,2BO})_i}{(P_{Su,KAM} / P_{Nu,2BO})_u} = 2 \vee (3dB)$$

- * Slično se dobija za:

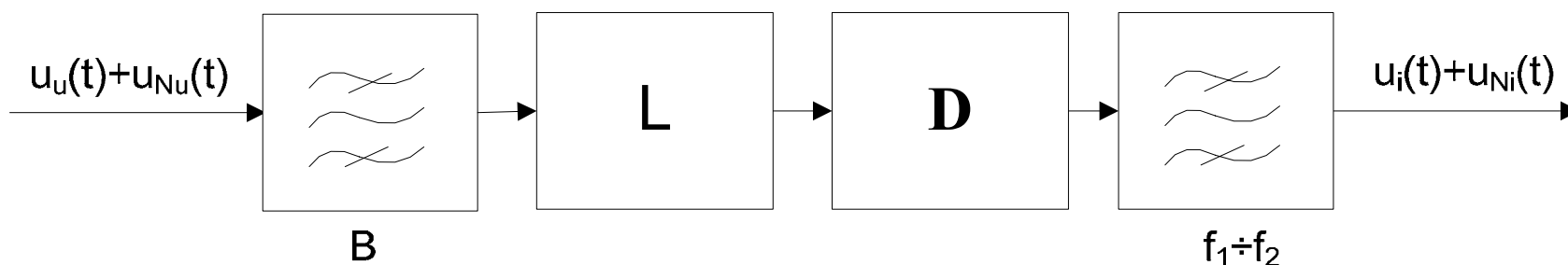
- AM2BO:

$$G_{AM2BO} = \frac{(P_{Si,AM2BO} / P_{Ni,2BO})_i}{(P_{Su,AM2BO} / P_{Nu,2BO})_u} = 2 \vee (3dB)$$

- AM1BO:

$$G_{AM1BO} = \frac{(P_{Si,AM1BO} / P_{Ni,1BO})_i}{(P_{Su,AM1BO} / P_{Nu,1BO})_u} = 1 \vee (0dB)$$

Odnos signal-šum kod ugaono modulisanih signala



* Fazno

$$\frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = (\Delta\Phi_0)^2 \overline{m^2(t)} \frac{P_{Su}}{P_{Nu}}$$

$$G_{PM, \text{prostoperiod}} = (\Delta\Phi_0)^2 / 2$$

* Frekvencijski

$$\frac{P_{Si}}{P_{Ni}} = \frac{\Delta f_0^2 \cdot \overline{m^2(t)} \cdot P_{Su}}{\int_{f_1}^{f_2} f^2 df \cdot P_{Nu}}$$

$$f_1 = 0 \wedge f_2 = f_m$$

$$G_{FM, \text{prostoperiod}} = \frac{3\Delta f_0^2}{2f_m^2}$$

* Za prostoperiodične signale je uvek $\overline{m^2(t)} = 0.5$.