

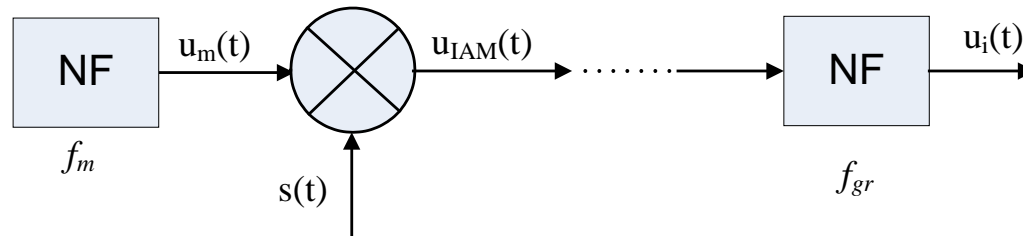


PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2011/2012.*

Zadatak: Teorema odabiranja (1)

*Spektar signala $u_m(t)$ je ograničen i zauzima opseg učestanosti $|f| \leq f_m$.
Potrebno je odrediti spektar impulsno amplitudski modulisanog signala $U_{IAM}(j\omega)$ koji je nastao prirodnim odabiranjem signala $u_m(t)$.
Signal $s(t)$ je unipolarna periodična povorka pravougaonih impulsa amplitude jednake 1, periode T i trajanja impulsa τ .



- a) Ukoliko signal $u_m(t)$ zauzima opseg učestanosti od 300Hz do 3400Hz, nacrtati spektar signala $u_{IAM}(t)$. Odabiranje se vrši učestanošću $f_0=8\text{kHz}$ ($f_0=1/T$). Koliko iznosi minimalna i maksimalna granična učestanost f_{gr} filtra propusnika niskih učestanosti na izlazu, tako da je moguća pravilna rekonstrukcija signala.
- b) Signal $u_m(t)$ dobijen je propuštanjem periodične povorke pravougaonih impulsa periode $T_m=1\text{ms}$ i vremena trajanja impulsa $\tau_m=T_m/4$, kroz filter propusnik niskih učestanosti granične učestanosti 4kHz. Odrediti signal dobijen prirodnim odabiranjem signala $u_m(t)$, za učestanost odabiranja $f_0=8\text{kHz}$.

Zadatak: Teorema odabiranja (2)

***Signal $u_{IAM}(t)$ dobijen je množenjem signala $u_m(t)$ i periodične povorke pravougaonih impulsa. Za vreme trajanja impulsa, signal $u_{IAM}(t)$ jednak je signalu $u_m(t)$**

$$u_{IAM}(t) = \begin{cases} u_m(t), & kT - \frac{\tau}{2} \leq t \leq kT + \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}$$

Spektar signala $u_{IAM}(t)$, označen sa $U_{IAM}(j\omega)$, određuje se Furijeovom transformacijom

$$U_{IAM}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{IAM}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_m(t) s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Nosilac, periodičan signal $s(t)$, može se predstaviti Fourier-ovim redom.

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_0 t}, \quad S_n = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}$$

Sada se spektar signala $u_{IAM}(t)$ može napisati u sledećem obliku

$$U_{IAM}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_m(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_0 t} \right] e^{-j\omega t} dt$$

Zadatak: Teorema odabiranja (3)

Zamenom redosleda integracije i sumiranja dobijamo konačan izgled spektra

$$U_{IAM}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \int_{-\infty}^{\infty} u_m(t) e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt$$

$$U_m(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_m(t) e^{-j\omega t} dt, \quad U_m[j(\omega - n\omega_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_m(t) e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt$$

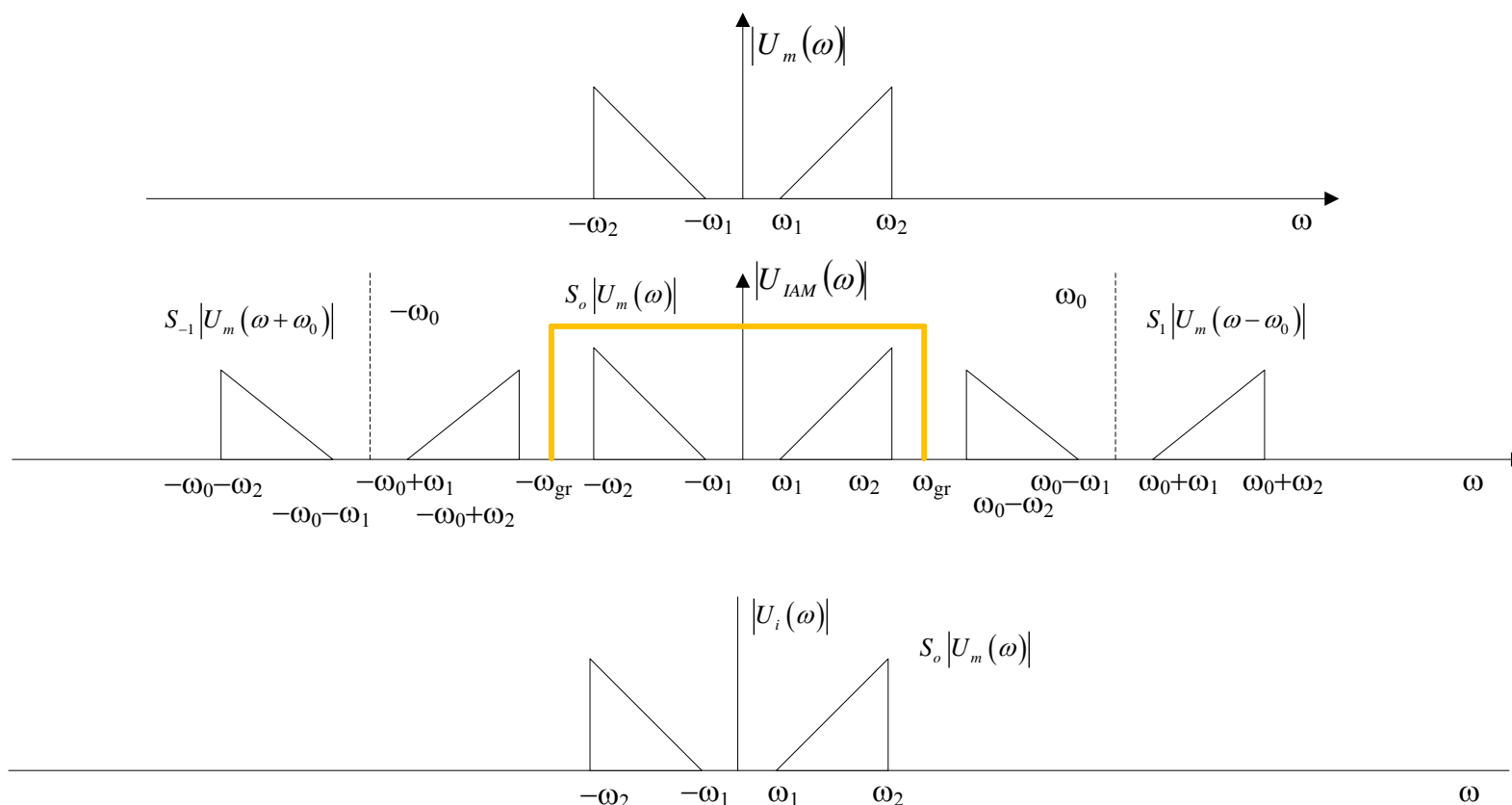
$$U_{IAM}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n U_m[j(\omega - n\omega_0)]$$

Spektar impulsno amplitudski modulisanog signala, predstavlja sumu spektara modulišućeg signala transliranih oko učestanosti $n\omega_0$ i pomnoženih konstantama S_n ($-\infty \leq n \leq \infty$).

$$U_{IAM}(j\omega) = \dots + S_{-2} U_m[j(\omega + 2\omega_0)] + S_{-1} U_m[j(\omega + \omega_0)] + S_0 U_m(j\omega) + \\ + S_1 U_m[j(\omega - \omega_0)] + S_2 U_m[j(\omega - 2\omega_0)] + \dots$$

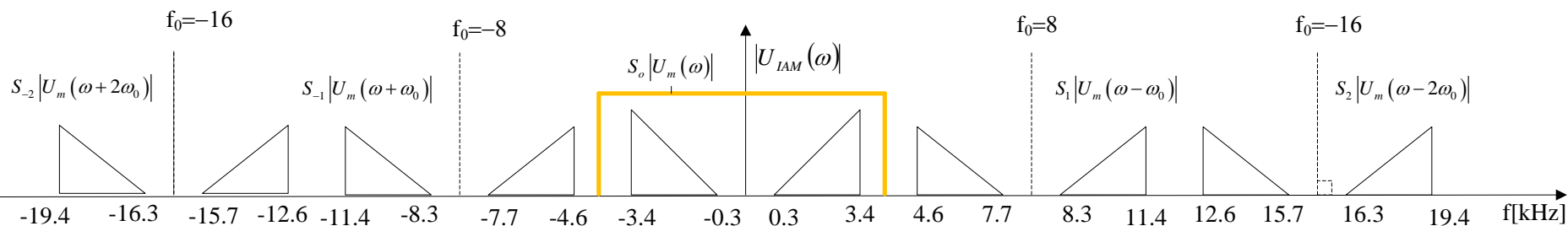
Zadatak: Teorema odabiranja (4)

Na slici su prikazani amplitudski spektar modulišućeg signala $|U_m(j\omega)|$, spektar impulsno amplitudski modulisanog signala $|U_{IAM}(j\omega)|$ i spektar signala nakon prolaska kroz filtar propusnik niskih učestasnost (nakon rekonstrukcije) $|U_i(j\omega)|$.



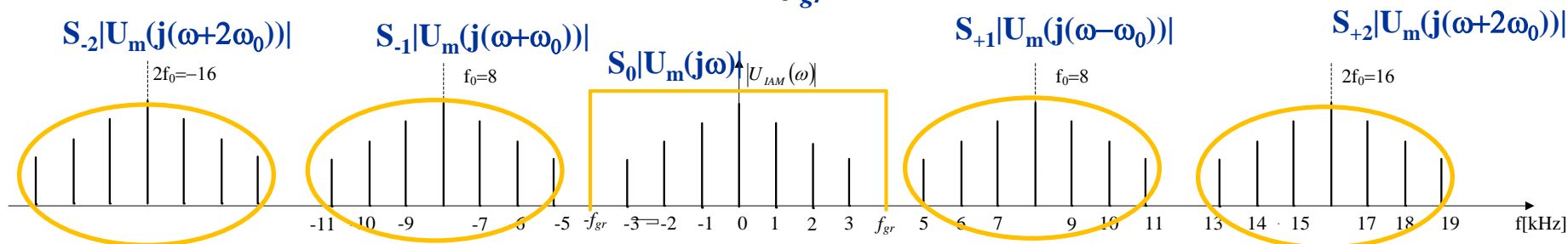
Zadatak: Teorema odabiranja (5)

- a) Minimalna granična učestanost filtra propusnika niskih učestanosti jednaka je najvišoj učestanosti u spektru signala u osnovnom opsegu, $f_{gr1}=3.4\text{kHz}$.
Maksimalna granična učestanost filtra propusnika niskih učestanosti jednaka je najnižoj učestanosti u spektru signala transliranog oko učestanosti f_0 , $f_{gr2}=4.6\text{kHz}$.



- b) Da bi se izvršila pravilna rekonstrukcija signala nakon procesa odabiranja, granična učestanost filtra propusnika niskih učestanosti treba da se nalazi u opsegu

$$3\text{kHz} < f_{gr} < 5\text{kHz}$$

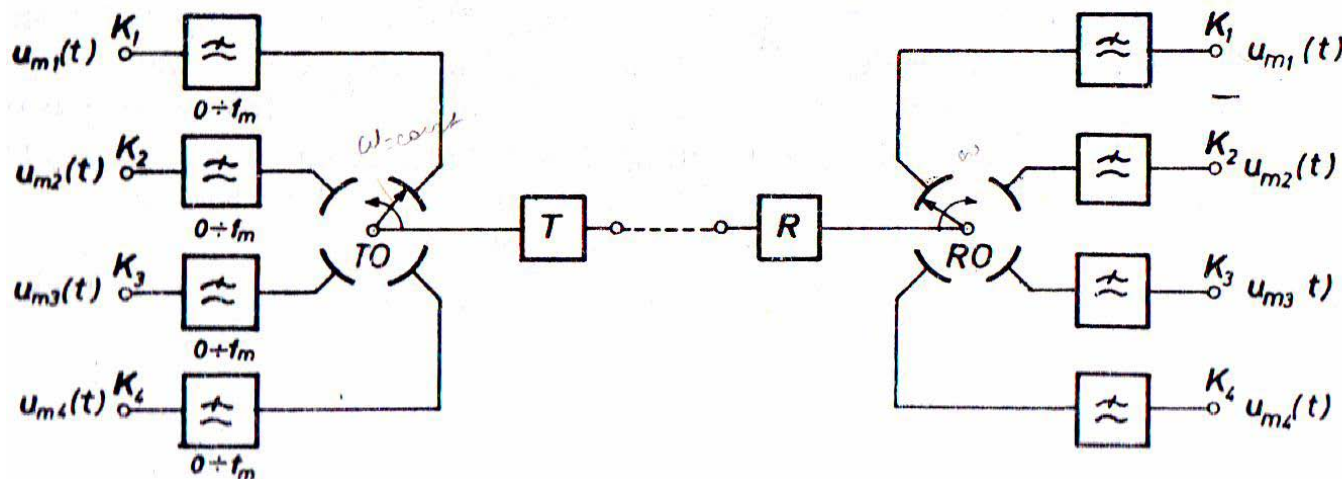


Zadatak - Vremenski multipleks (1)

Signali iz $N=4$ nezavisna telefonska kanala prenose se u multipleksu sa vremenskom raspodelom. U svakom od kanala primenjena je impulsna amplitudska modulacija (IAM), sa učestanošću odabiranja jednakom $f_0=8\text{kHz}$.

a) Nacrtati principske blok šeme predajnika i prijemnika

b) Nacrtati vremenski oblik multipleksnog signala. Koliko iznosi učestanost ponavljanja impulsa u multipleksnom signalu na liniji veze.



Predajnik

Prijemnik

Zadatak - Vremenski multipleks (2)

a) Učestanost odabiranja u svakom kanalu je $f_0=8\text{kHz}$, pa razmak između svaka dva impulsa koja pripadaju istom kanalu (npr. kanalu 1) iznosi $T=1/f_0=125\mu\text{s}$.

Vremenska rastojanja između svaka dva uzastopna impulsa u vremenskom multipleksu, na liniji veze su međusobno jednaka i iznose

$$T_k = \frac{T}{N}$$

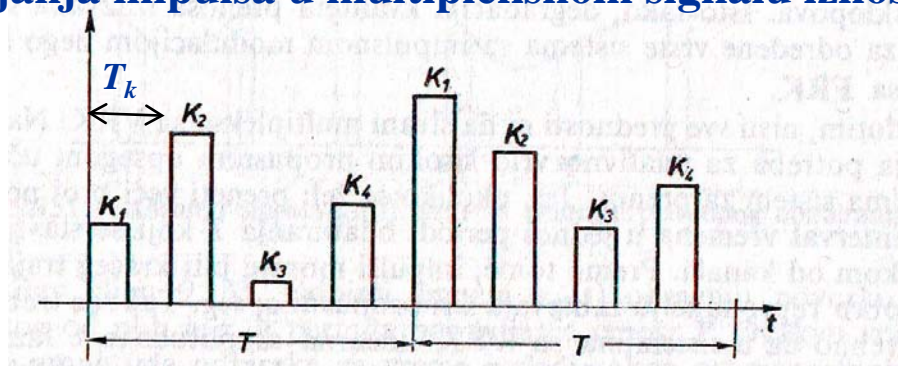
$$f_k = NT$$

frekvencija ponavljanja impulsa u multipleksnom signalu

U prethodnoj formuli N je broj kanala u multipleksu sa vremenskom raspodelom.

Za konkretan slučaj, kada imamo četiri kanala u multipleksu ($N=4$), vremensko rastojanje između odbiraka multipleksnog signala je $T_k=T/4$.

Frekvencija ponavljanja impulsa u multipleksnom signalu iznosi $f_k=4*8\text{kHz}=32\text{kHz}$.



Zadatak – PCM kvantizator (1)

*Signal $u(t)$ prenosi se sistemom sa impulsnom kodnom modulacijom (*pulse code modulation*, PCM). Odbirci signala se kvantizuju u ravnomernom kvantizatoru sa 8 kvantizacionih nivoa.

Funkcija gustine verovatnoće amplituda signala $u(t)$ je

$$p(u) = \begin{cases} 1/16, & |u(t)| \leq 8 \\ 0, & \text{ostale vrednosti} \end{cases}$$

- a) Odrediti korak kvantizacije i kvantizacione nivoe
- b) Nacrtati karakteristiku kvantizacije
- c) Odrediti odnos snage signala i snage šuma kvantizacije (izraziti u decibelima)

Rešenje:

Vrednosti amplituda odbiraka koje dolaze na ulaz u kvantizator nalaze se u intervalu $[-U/2, U/2] = [-8, 8]$.

Ovaj interval amplituda deli se na ukupan broj nivoa kvantizacije $q=8$.

Korak kvantizacije je

$$\Delta u = \frac{U/2 - (-U/2)}{q} = \frac{U}{q} = \frac{8 - (-8)}{8} = 2$$

Zadatak – PCM kvantizator (2)

Granice intervala kvantizacije i kvantitacioni nivoi:

Odbirci signala koji dolaze na ulaz u kvantizator, a čije su vrednosti amplitude unutar i -tog kvantizacionog intervala $\{U_{di}, U_{gi}\}$, na izlazu kvantizatora imaju vrednost amplitude jednaku i -tom kvantizacionom nivou U_{qi} .

$$\{U_{d0}, U_{g0},\} \in \{-8, -6\} \Rightarrow U_{q0} = -U_{\min} + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 1 = -7$$

$$\{U_{d1}, U_{g1},\} \in \{-6, -4\} \Rightarrow U_{q1} = -U_{\min} + \Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 1 + 2 = -5$$

$$\{U_{d2}, U_{g2},\} \in \{-4, -2\} \Rightarrow U_{q2} = -U_{\min} + 2\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 4 + 1 = -3$$

$$\{U_{d3}, U_{g3},\} \in \{-2, 0\} \Rightarrow U_{q3} = -U_{\min} + 3\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$\{U_{d4}, U_{g4},\} \in \{0, +2\} \Rightarrow U_{q4} = -U_{\min} + 4\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 8 + 1 = +1$$

$$\{U_{d5}, U_{g5},\} \in \{+2, +4\} \Rightarrow U_{q5} = -U_{\min} + 5\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 10 + 1 = +3$$

$$\{U_{d6}, U_{g6},\} \in \{+4, +6\} \Rightarrow U_{q6} = -U_{\min} + 6\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 12 + 1 = +5$$

$$\{U_{d7}, U_{g7},\} \in \{+6, +8\} \Rightarrow U_{q7} = -U_{\min} + 7\Delta u + \frac{\Delta u}{2} = -8 + 14 + 1 = +7$$

Zadatak – PCM kvantizator (3)

b) Karakteristika kvantizacije

x-osa: amplituda signala na ulazu u kvantizator

y-osa: amplituda signala na izlazu iz kvantizatora a)

Srednja snaga signala na ulazu u kvantizator

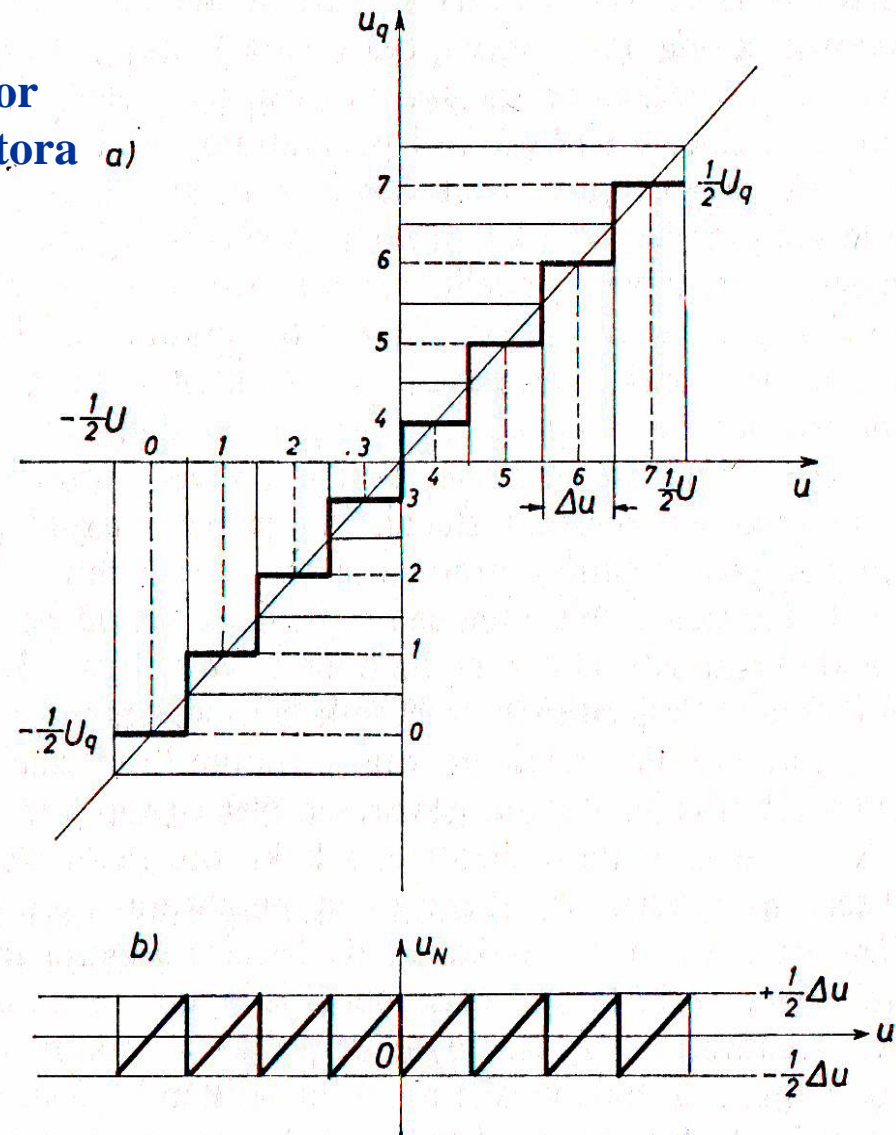
$$P_s = \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 p(u) du = \frac{1}{U} \int_{-\frac{1}{2}U}^{\frac{1}{2}U} u^2 du = \frac{U^2}{12} = \frac{16^2}{12} = \frac{64}{3}$$

Srednja snaga šuma kvantizacije

$$P_{qN} = \overline{u_N^2} = \frac{(\Delta u)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Odnos signal/šum kvantizacije

$$\frac{P_s}{P_{qN}} = \frac{U^2}{12} \bigg/ \frac{(\Delta u)^2}{12} = \left(\frac{U}{\Delta u} \right)^2 = q^2 = 8^2 = 64$$
$$[S/N_q] = 10 \log_{10} 64 = 18 \text{ dB}$$



Zadatak – PCM, odnos S/N_q (1)

*Signal $u(t)$ prenosi se postupkom impulsne kodne modulacije (PCM).

Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$. Funkcija gustine verovatnoće amplituda signala $u(t)$ je uniformna. Učestanost odabiranja signala $u(t)$ jednaka je minimalnoj vredosti određenoj teoremom odabiranja. Kvantizacija odbiraka obavlja se u ravnomernom kvantizatoru sa $q=2^n$ nivoa.

Zahteva se da odnos signal-šum kvantizacije $[S/N_q]=10\log_{10}(S/N_q)$ bude veći od 60 dB.

- Odrediti minimalan broj kvantizacionih nivoa.
- Odrediti protok V_b binarnog signala na izlazu PCM koderu.
- Odrediti protok V_b binarnog signala na izlazu PCM koderu, ukoliko se signal $u(t)$ odabire učestanošću koja je dvostruko veća od minimalno dozvoljene, a broj bita kojim se vrši kodovanje kvantiziranih odbiraka je 20% veći od minimalnog. Koliko u tom slučaju iznosi odnos signal/šum kvantizacije.

Rešenje

a) Odnos Signal/Šum kvantizacije određen je izrazom $\left(\frac{S}{N_q}\right) = q^2$

Odnos Signal/Šum kvantizacije izražen u decibelima iznosi

$$\left[\frac{S}{N_q}\right] = 10\log_{10}(q^2) = 20\log_{10}(q)$$

Zadatak – PCM, odnos S/N_q (2)

***Odnos signal/šum kvantizacije zavisi od broja kvantizacionih nivoa.**

Kako se zahteva da odnos signal/ šum bude veći od granične vrednosti jednake 60dB, znači da je potrebno i da broj nivoa koji se primenjuje pri kvantizaciji bude veći od neke granične vrednosti.

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10}(q^2) = 20 \log_{10}(q) \geq 60dB \Rightarrow q \geq 10^{\left[\frac{S}{N_q} \right] / 20} = 10^{60/20} = 10^3 = 1000$$

***Dakle, proračunom se dobija da je minimalan broj kvantizacionih nivoa jednak 1000. Međutim kako se svaki od kvantizacionih nivoa u koderu predstavlja nizom od n bita, potrebno je da ukupan broj kvantizacionih nivoa bude broj oblika $q=2^n$.**

Prvi broj koji ispunjava uslov $q>1000$ i predstavlja stepen broja 2 je $q=1024=2^{10}$.

***Znači da bi bio ispunjen uslov da je odnos Signal/Šum kvantizacije veći od 60dB, minimalan broj kvantizacionih nivoa bi trebalo da bude jednak $q_{min}=1024$.**

Za kodiranje $q=2^n=1024$ kvantizacionih nivoa potrebno je $n=\log_2(1024)=10$ bita.

***Dakle minimalan broj bita za kodiranje jednog odbirka je $n_{min}=10$.**

Zadatak – PCM, odnos S/N_q (3)

b) Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$.

Po teoremi odabiranja minimalna vrednost učestanosti odabiranja je $f_s=2f_m=40\text{kHz}$.

Svaki odbirak kodira se sa $n_{\min}=10\text{bita}$, pa je protok binarnog PCM signala

$$V_b=n_{\min}*f_s=10*40\text{kHz}=400\text{kb/s}.$$

c) Ukoliko je signal odabran dvostruko većom učestanošću od minimalno dozvoljene, učestanost odabiranja iznosi $f_{sI}=2*2f_m=2*40\text{kHz}=80\text{kHz}$.

Svaki odbirak kodira se sa 20% više bita od minimalno dozvoljenog broja, pa je $n=1.2n_{\min}=12\text{bita}$.

Protok binarnog PCM signala je $V_{bI}=n*f_{sI}=12*80\text{kHz}=960\text{kb/s}$.

Ukupan broj bita za kodiranje je $n=12$, a ukupan broj kvantizacionih nivoa $q=2^n=2^{12}$.

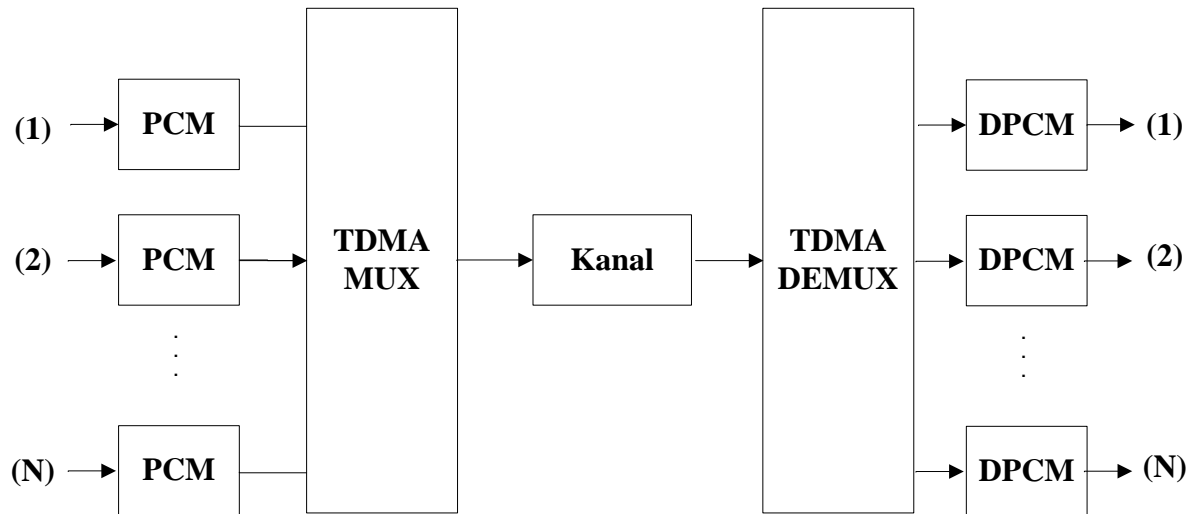
Odnos signal/šum kvantizacije je

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10\log_{10}(q^2) = 20\log_{10}(q) = 20\log_{10}(2^n) = 20n\log_{10} 2 = 72\text{dB}$$

Zadatak: PCM+MUX (1)

*Ukupan broj od $N=16$ nezavisnih signala prenosi se korišćenjem blok-šeme prikazane na slici. Maksimalna učestanost u spektru svakog signala je $f_m=15\text{kHz}$. U blokovima označenim sa PCM, obavlja se odabiranje ulaznog signala učestanošću određenom teoremom odabiranja, zatim ravnomerna kvantizacija odbiraka ulaznih signala sa $q=512$ nivoa i predstavljanje odbiraka binarnim kodom. U bloku TDMA/MUX vrši se vremensko multipleksiranje ulaznih impulsa. U prijemniku se izvršavaju inverzne operacije.

- Odrediti protok signala na izlazu iz svakog od PCM blokova;
- Odrediti protok binarnog signala na ulazu u kanal.



Zadatak: PCM+MUX (2)

a) Maksimalna učestanost u spektru svakog od signala je $f_m=15\text{kHz}$, pa pod pretpostavkom da se odabiranje signala vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja, učestanost odabiranja iznosi $f_s=2f_m=30\text{kHz}$.

Ravnomerna kvantizacija se obavlja sa $q=2^n=512$ nivoa, što znači da se svaki odbirak signala u koderu predstavlja korišćenjem $n=\log_2 q=\log_2 512=9$ bita.

Protok binarnog signala na izlazu PCM kodera u svakom od N kanala iznosi

$$V_{\text{PCM}}=nf_s=9\cdot 30\text{kHz}=270\text{kb/s}.$$

b) Nakon vremenskog multipleksiranja $N=16$ signala, protok multipleksnog signala na liniji veze biće $V_{\text{MUX}}=NV_{\text{PCM}}=Nnf_s=16\cdot 9\cdot 30\text{kHz}=4320\text{kb/s}$.

Literatura



- [1] Dukić M., *Principi telekomunikacija*, Akademska misao, 2008, Beograd.
- [2] Haykin S., *Communication Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1998, New York.
- [3] Dukić M., Marković G., Vujić D., *Principi telekomunikacija – Zbornik rešenih zadataka*, Akademska misao, 2009, Beograd.
- [4] Praktikum za laboratorijske vežbe.