



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2011/2012.*

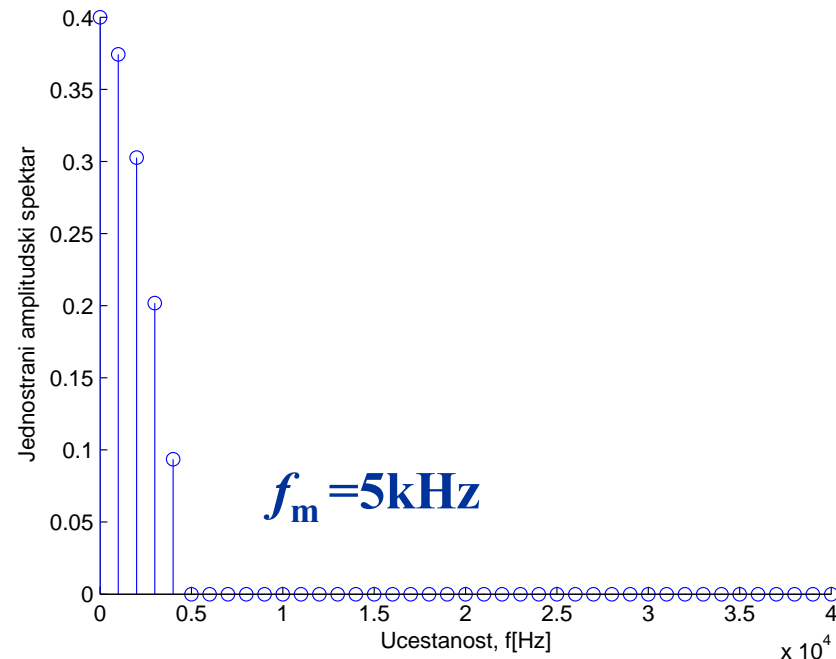
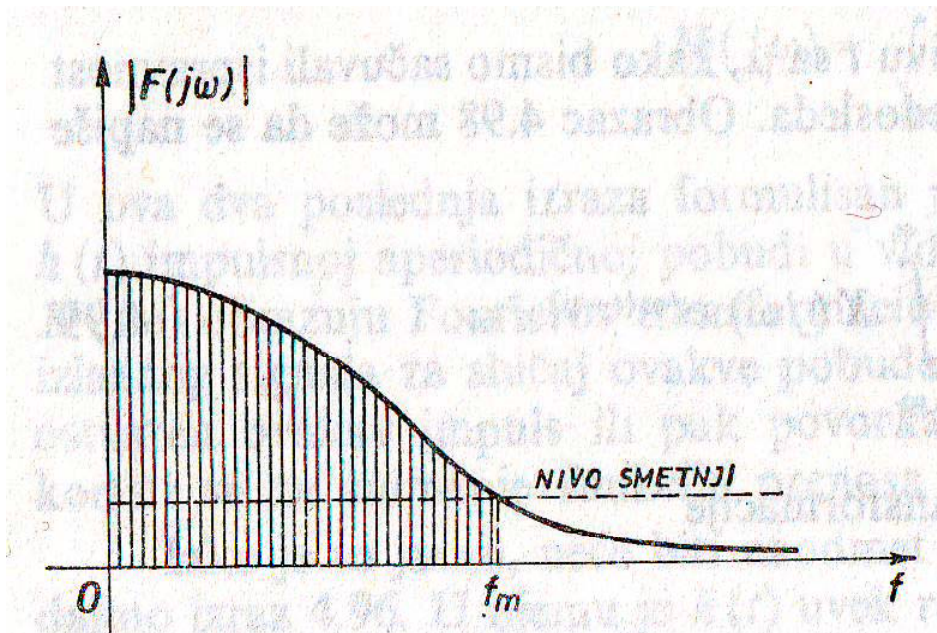


-VII-

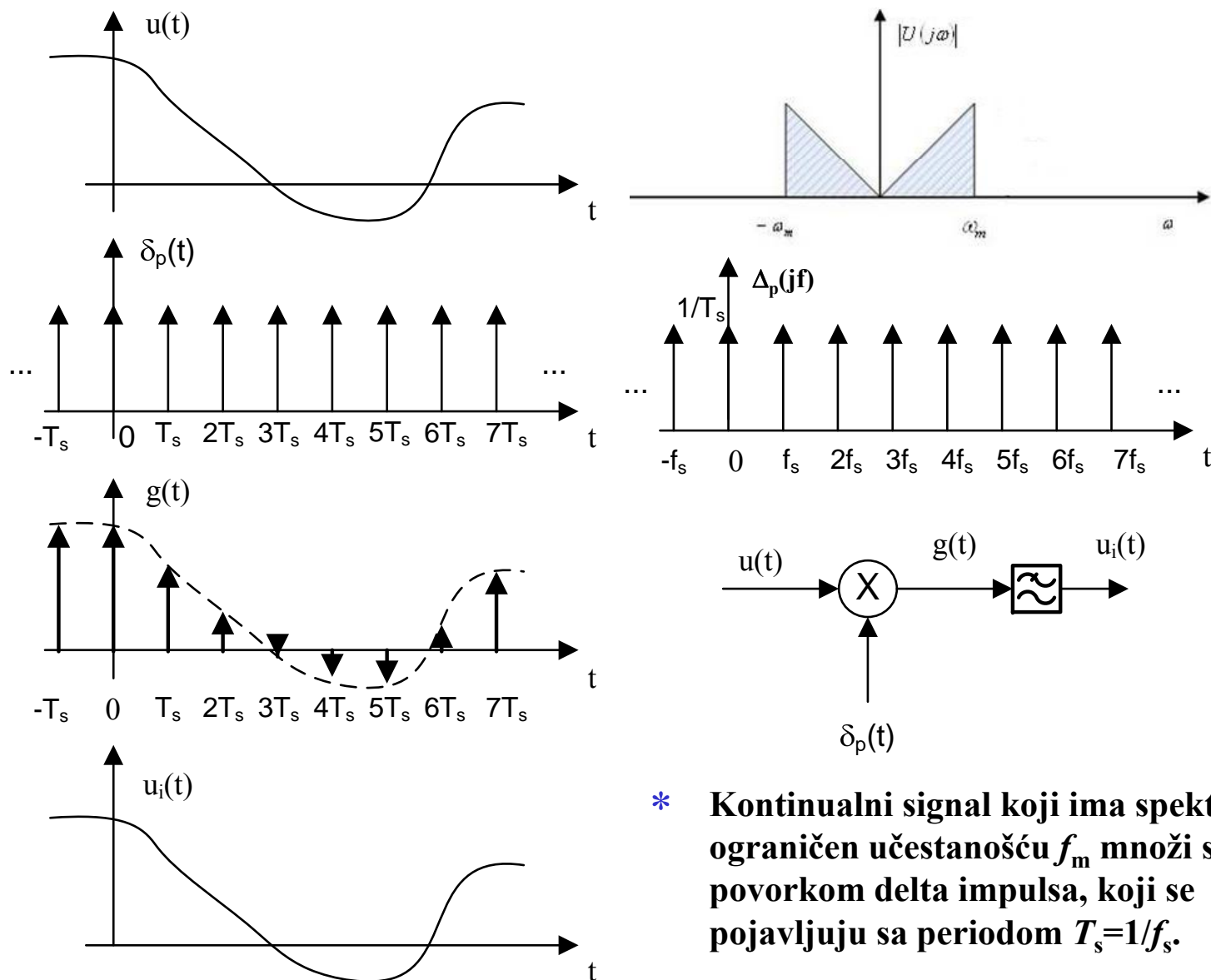
**Teorema o odabiranju,
impulsne modulacije**

Kontinualni signal

- * **Kontinualni signali (koji nisu modulisani) obično imaju spektar koji je ograničen na neku maksimalnu učestanost f_m**
 - Spektar modulišućeg signala može da bude i beskonačno širok ali tada se ne prenose sve spektralne komponente!
 - Ovo se može postići propuštanjem kroz NF filter, tako da filtriran signal nosi npr. 90% snage (bez obzira da li je modulišući signal slučajan ili deterministički).
 - Za govor je $f_m=4\text{kHz}$, za audio signal je $f_m=20\text{kHz}$, za TV signal je $f_m=5\text{MHz}$.



Diskretizacija kontinualnog signala



- * Kontinualni signal koji ima spektar ograničen učestanošću f_m množi se povorkom delta impulsa, koji se pojavljuju sa periodom $T_s = 1/f_s$.

Spektar diskretizovanog signala

- * Signal povorke odbiraka $g(t)$ definisan je sada izrazom:

$$g(t) = u(t)\delta_p(t) = u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- * Povorka delta impulsa može se predstaviti i u obliku

$$\delta_p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

- * Spektar diskretizovanog signala:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta_p(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left(\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt$$

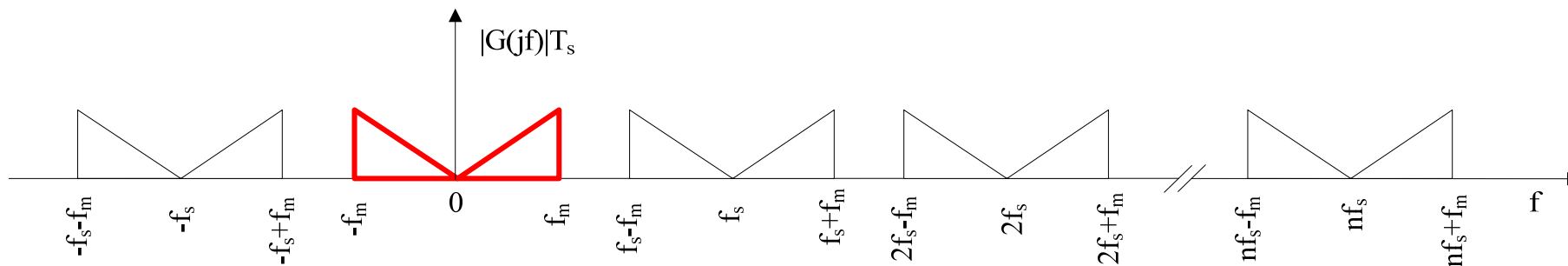
$$G(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U[j(\omega - n\omega_0)]$$

Spektar diskretizovanog signala

* Spektar signala na izlazu sadrži više (teorijski beskonačno mnogo) transliranih “kopija” spektra originalnog signala.

- Učestanost pojave Delta impulsa obeležava se sa $f_s = 1/T_s$ i naziva se učestanošću odabiranja (*sampling frequency*), dok je T_s perioda odabiranja (*sampling period*).
- Svaka od ovih kopija ima istu “visinu” (istu snagu).
- Kopije su međusobno razmaknute za f_s .
- Spektar je periodična funkcija učestanosti sa periodom f_s .
- Da se kopije ne bi preklapale, mora biti $f_s \geq 2f_m$.

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U[j(\omega - n\omega_0)]$$



Rekonstrukcija kontinualnog signala

- * Povorka odbiraka propušta se kroz NF filter.

- * Na osnovu osobina linearnosti i vremenske nepromenljivosti, odziv NF filtra na jedan delta impuls, $\delta(t-nT)$ amplitude $u(nT)$ je $u(nT)h(t-nT)$, gde je $h(t)$ impulsni odziv NF filtra.

- * Signal na izlazu iz idealnog NF filtra definisan je izrazom:

$$u_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_s)h(t-nT_s) \quad h(t) = 2f_m \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t} = \frac{1}{T_s} \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t}$$

pa je konačno:

$$u_i(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_s) \frac{\sin(\omega_m (t-nT_s))}{\omega_m (t-nT_s)}$$

- * Sa druge strane, jasno je da se propuštanjem kroz NF filtra od signala $g(t)$ pravi signal $u_i(t)$ koji ima spektar koji se sastoji samo od kopije spektra signala $u(t)$ smeštene na niskim učestanostima:

$$U_i(j\omega) = \frac{1}{T_s} U(j\omega) \Rightarrow u_i(t) = \frac{1}{T_s} u(t)$$

Rekonstrukcija kontinualnog signala

- * **Vremenski oblik diskretizovanog signala je definisan samo u trenucima koji su umnošci periode odabiranja ($t=nT_s$).**
 - Ove vrednosti signala nazivaju se odbircima originalnog kontinualnog signala u trenucima nT_s .
 - Diskretizovani signal predstavlja niz odbiraka kontinualnog signala.
- * **Ako se diskretizovani signal propusti kroz NF filter, granične učestanosti $f_m \leq f_g \leq f_s - f_m$, na izlazu filtra se pojavljuje signal koji ima isti oblik spektra kao kontinualni signal koji smo diskretizovali.**
 - Dva signala koji imaju isti oblik spektra mogu se razlikovati samo po amplitudi.
 - To znači da se na izlazu NF filtra pojavljuje oslabljeni ili pojačani kontinualni signal od koga smo pošli. Jasno je da je rekonstrukciju obaviti samo kada je $f_s - f_m \geq f_m \Rightarrow f_s \geq 2f_m$.
 - Propuštanjem kroz običan NF filter, znajući samo diskretizovani signal definisan samo u samo nekim trenucima ($t=nT_s$), možemo rekonstruisati kontinualni signal koji je definisan u bilo kom trenutku.
 - Matematički zapis poslednje tvrdnje (za minimalnu moguću vrednost učestanosti odabiranja $f_s = 2f_m$), koristeći činjenicu da je $u_i(t) = u(t)/T_s$, postaje

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_s) \frac{\sin(\omega_m(t - nT_s))}{\omega_m(t - nT_s)}, \quad T_s = 1/(2f_m)$$

Teorema o odabiranju

- * *Ako kontinualni realni signal $u(t)$ ima maksimalnu učestanost u spektru f_m , onda je taj signal u potpunosti opisan svojim trenutnim vrednostima uzetim u ekvidistantnim trenucima trajanja $T_s=1/f_s \leq 1/(2f_m)$. Ovi odbirci, uzeti sa učestanosti odabiranja f_s koja je bar dvaput veća od f_m , potpuno opisuju kontinualni signal $u(t)$! Signal se iz svojih odbiraka rekonstruiše propuštanjem kroz idealni niskofrekvencijski filter granične učestanosti f_m .*
 - Izuzetno važno – ako se znaju odbirci nekog signala, on se može potpuno verno rekonstruisati.
 - Posledica - nema potrebe da se prenosi čitav kontinualni signal - dovoljno je preneti njegove odbirke!
 - Sama teorema pre svega govori koliko često treba uzimati odbirke signala, da bi signal na strani prijema bio verno rekonstruisan.
 - Ovo omogućava *diskretizaciju* (a uz neke dodatne tehnike i *digitalizaciju*) signala.
- * Prethodno opisan proces naziva se idealnim odabiranjem.
 - Opisani proces nije moguće realno ostvariti – nije moguće generisati idealne delta impulse (nije moguće napraviti prekidač koji bi se mogao beskonačno brzo otvarati i zatvarati).

Idealno odabiranje signala – realan NF filter

* NF filter potreban za rekonstrukciju nikad nije idealan

- Njegov propusni opseg, u kome je pojačanje filtra približno konstantno, treba da bude u opsegu do učestanosti f_m .
- Amplitudski deo prenosne karakteristike filtra treba da padne na nultu vrednost pre prve naredne kopije u spektru diskretizovanog signala (ona ne sme da prođe kroz NF filter, čak ni oslabljena i izobličena, već mora potpuno da se potisne).
- U praksi se obično usvaja da je

$$f_s \geq 2.2f_m$$

* U praksi se obično koristi nešto veća učestanost odabiranja od minimalno potrebne, radi lakše realizacije filtriranja pri rekonstrukciji signala, npr.:

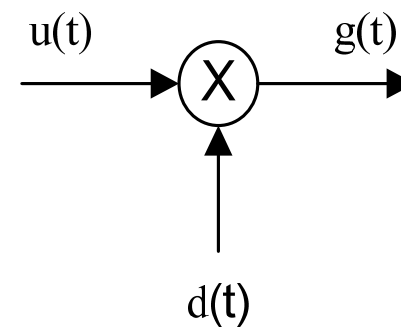
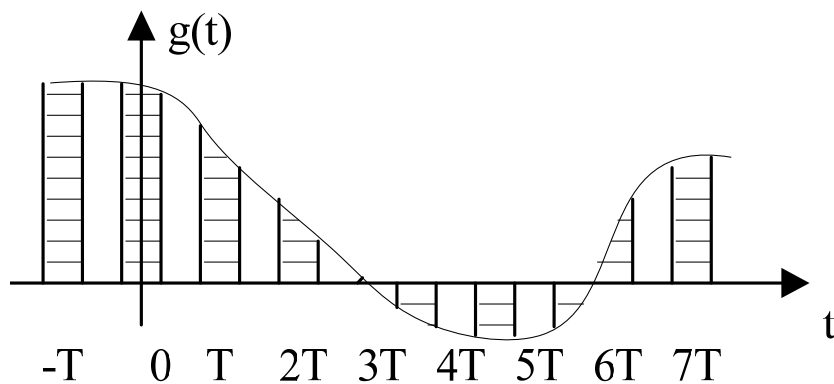
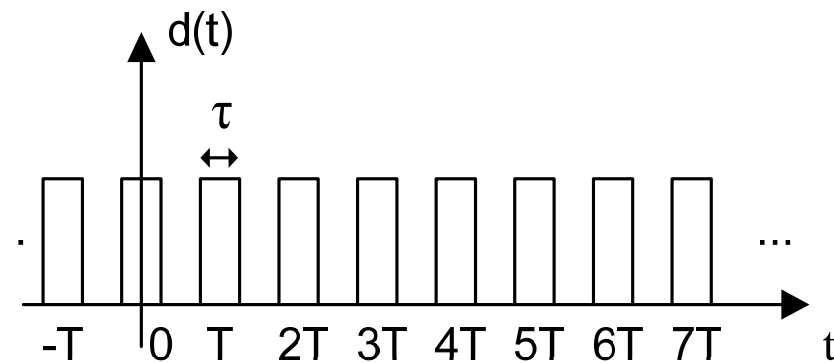
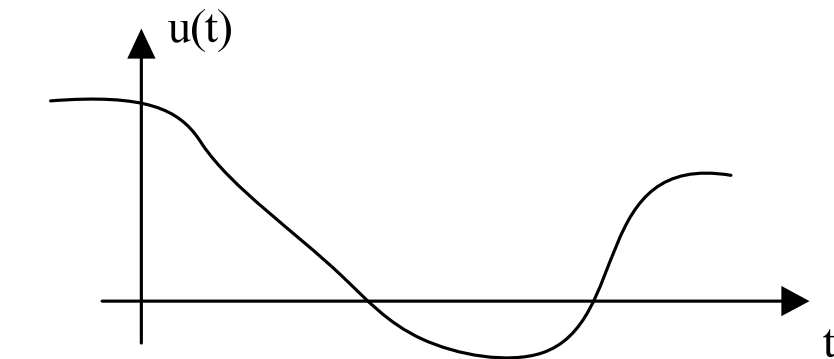
- Za odabiranje govornog signala, koji zauzima opseg učestanosti od 0.3kHz do 3.4kHz u telefoniji, koristi se učestanost odabiranja $f_0 = 8kHz$.
- Za odabiranje muzičkog signala, koji zauzima opseg učestanosti od 20Hz do 20kHz prilikom snimanja muzike na kompakt-diskove koristi se učestanost odabiranja $f_s = 44.1kHz$ (dodatni razlog da se izabere baš ova vrednost je potreba za kompatibilnosti sa PAL TV sistemom).

Prirodno odabiranje signala

- * Kod ovog tipa odabiranja u generatoru impulsa koristi se prekidač sa konačnom brzinom zatvaranja/otvaranja.
 - Prekidač se periodično zatvara sa periodom T ,
 - Svaki put ostaje zatvoren tokom kratkog intervala τ .
 - Signal koji se dobija na izlazu generatora impulsa je periodična povorka pravougaonih impulsa periode T i trajanja τ .

- * Pri svakom odabiranju, na izlazu prekidača dobijamo odbirak signala koji odgovara proizvodu kontinualnog signala koji odabiramo i signala na izlazu generatora impulsa
 - Svaki odbirak ima amplitudu koja prati oblik originalnog kontinualnog signala, tj. prirodnog je oblika, i trajanja τ
 - Dobijeni rezultat je isti kao da smo izvršili množenje originalnog kontinualnog signala sa periodičnom povorkom pravougaonih impulsa periode T i trajanja impulsa τ .

Prirodno odabiranje signala



Prirodno odabiranje – spektar diskretizovanog

$$g(t) = u(t) \cdot d(t)$$

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$D(jn\omega_0) = \begin{cases} \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2}, n \neq 0 \\ \frac{\tau}{T}, n = 0 \end{cases}$$

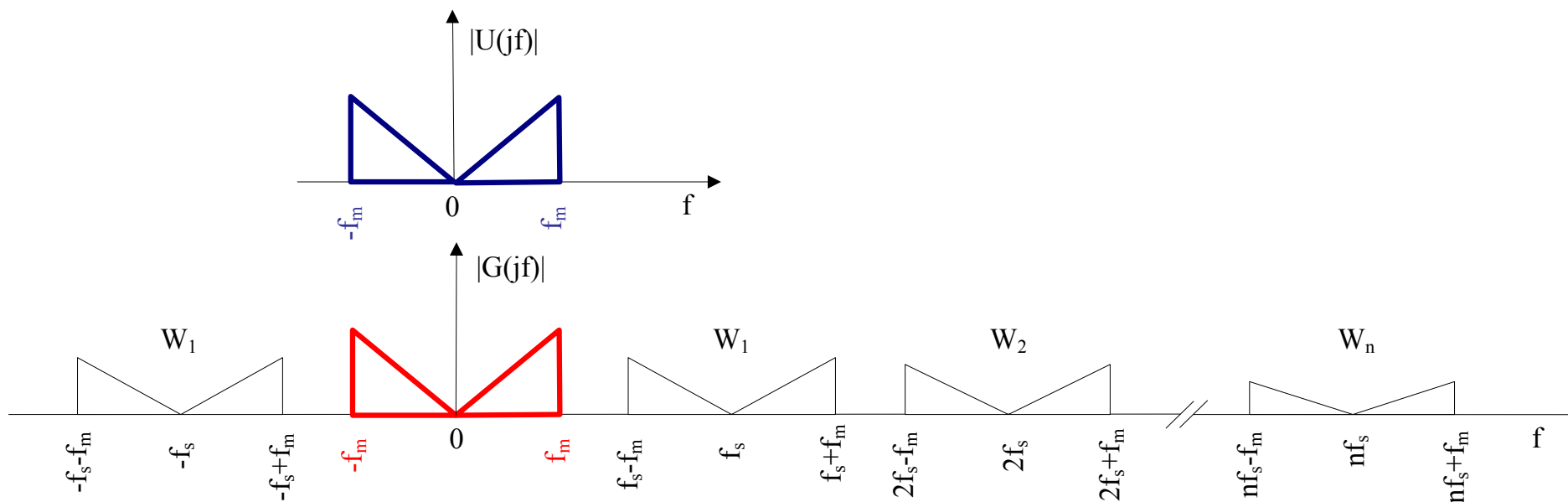
$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) d(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$G(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(jn\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(jn\omega_0) U(j(\omega - n\omega_0))$$

Prirodno odabiranje – spektar diskretizovanog

$$G(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n U(j(\omega - n\omega_0))$$

$$W_n = \begin{cases} \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}, & n \neq 0 \\ \frac{\tau}{T}, & n = 0 \end{cases}$$



Prirodno odabiranje signala - rekonstrukcija

- * **Sličan rezultat kao i kod idealnog odabiranja,**
 - u ovom slučaju n -te replike originalnog spektra (translirane oko učestanosti $n\omega_o$) su pomnožene n -tim koeficijentom razvoja povorke pravougaonih impulsa u Furijeov red.
 - Snage ovih transliranih kopija su sve manje kako n raste (najjača je komponenta na niskim učestanostima!)
- * **U slučaju da učestanost odabiranja zadovoljava uslov teoreme o odabiranju, neće doći do preklapanja originalnog spektra i transliranih replika spektra, pa se primenom NF filtra može izvršiti rekonstrukcija originalnog signala.**
 - U tom slučaju, na izlazu filtra za rekonstrukciju dobijamo signal, čiji su spektar i vremenski oblik definisani izrazima:

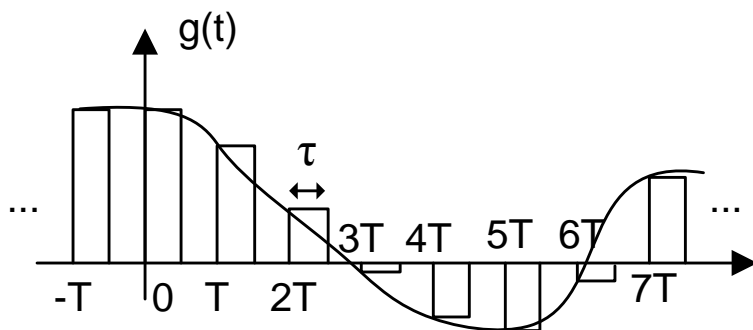
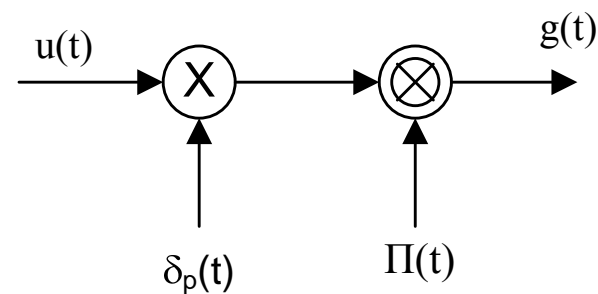
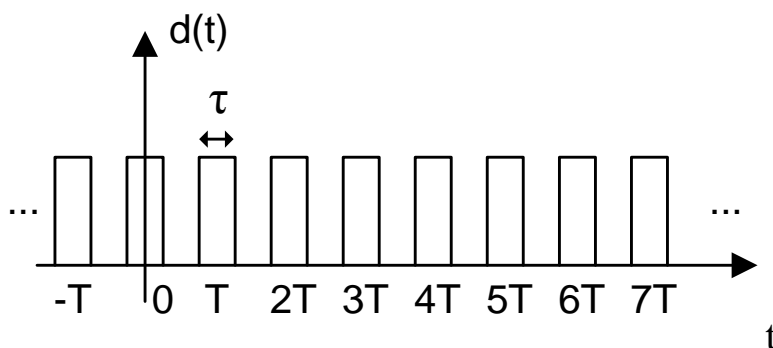
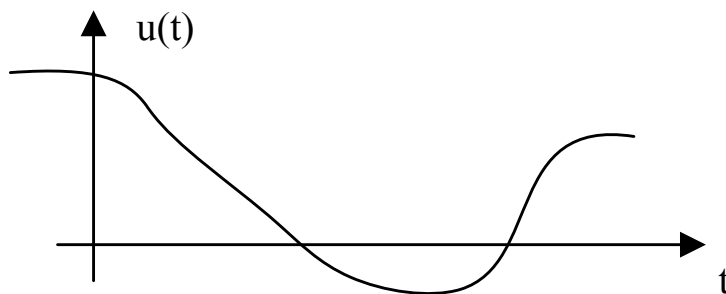
$$U_i(j\omega) = D(0)U(j\omega) \wedge D(0) = \frac{\tau}{T} \Rightarrow u_i(t) = \frac{\tau}{T}u(t)$$

Regularno odabiranje signala

- * **I kod ovog tipa odabiranja u generatoru impulsa koristi se prekidač sa konačnom brzinom zatvaranja/otvaranja.**
 - Prekidač se periodično zatvara sa periodom T ,
 - Svaki put ostaje zatvoren tokom kratkog intervala τ .
 - Signal koji se dobija na izlazu generatora impulsa je periodična povorka pravougaonih impulsa periode T i trajanja τ .

- * **Pri svakom odabiranju, na izlazu prekidača dobijamo odbirak signala koji odgovara proizvodu kontinualnog signala koji odabiramo i signala na izlazu generatora impulsa ali se vrh svakog od dobijenih impulsa u diskretizovanom signalu zaravni**
 - U trenutku kada počne odabiranje se uzima vrednost odbirka signala, i ta vrednost se drži na izlazu odabirača još neki period vremena τ .
 - U pocetnom trenutku zapamti se vrednost napona odbirka, koja se ne menja dok se ne uzme novi odbirak - S&H (*Sample & Hold*).
 - Zato svaki odbirak ima amplitudu koja je konstantna tokom trajanja odbirka τ .
 - Dobijeni rezultat je isti kao da smo izvršili množenje originalnog kontinualnog signala sa idealnim delta impulsima periode T a zatim izvršili konvoluciju tako dobijenog signala sa usamljenim pravougaonim impulsom trajanja τ .

Regularno odabiranje signala



Regularno odabiranje signala

- * **Spektar signala odbiraka u slučaju regularnog odabiranja predstavlja proizvod spektra signala pri idealnom odabiranju sa spektrom usamljenog pravougaonog impulsa trajanja τ .**

$$g(t) = [f(t) \cdot \delta_p(t)] \otimes \Pi(t)$$

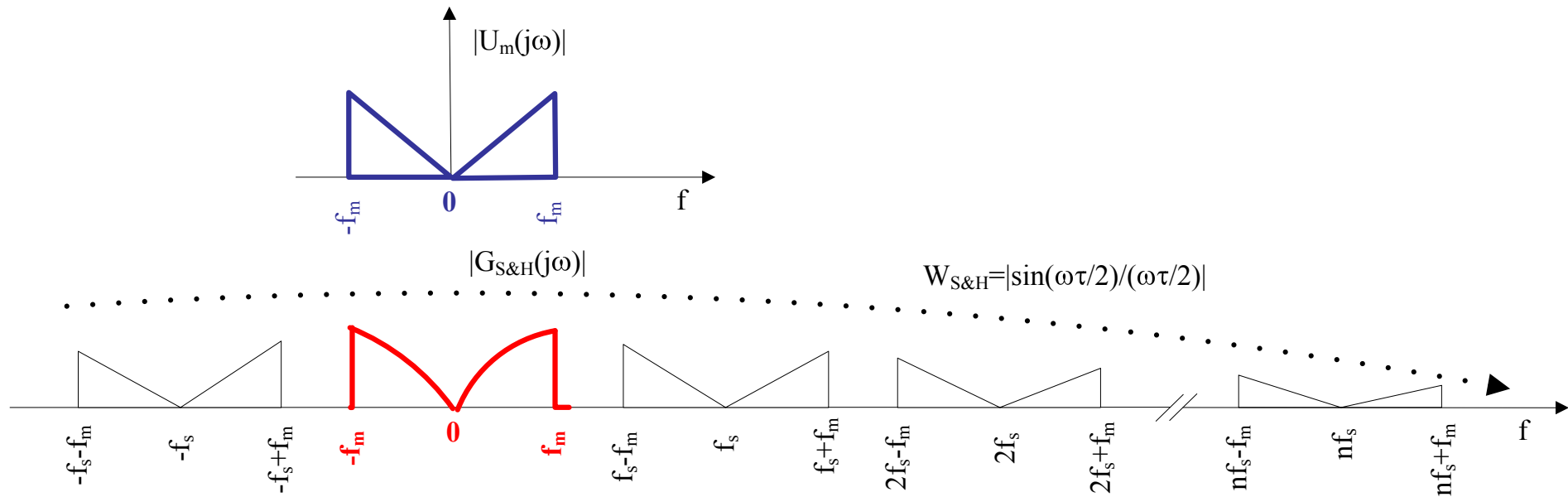
$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0) \\ 1, t \in [0, \tau] \\ 0, t \in (\tau, \infty) \end{cases} \quad \wedge \quad \Pi(j\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}$$

$$G(j\omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - n\omega_0)) \right] \cdot \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}$$

- * **Originalni spektar signala ($n=0$), množi se sa kontinualnom funkcijom, a ne sa konstantom, kao kod idealnog ili prirodnog odabiranja,**
 - * Različite spektralne komponente množe se različitim vrednostima.
 - * Dolazi do promene originalnog spektra, pa se nakon rekonstrukcije primenom NF filtra ne dobija originalni spektra signala – dolazi do izobličenja signala.
 - * I pored ovog nedostatka, S&H se najčešće koristi u praksi zbog jednostavnosti i male cene praktične realizacije.

Regularno odabiranje – spektar diskretizovanog

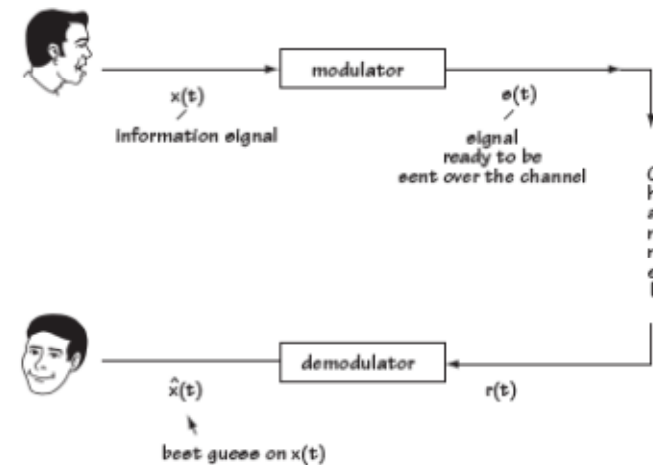
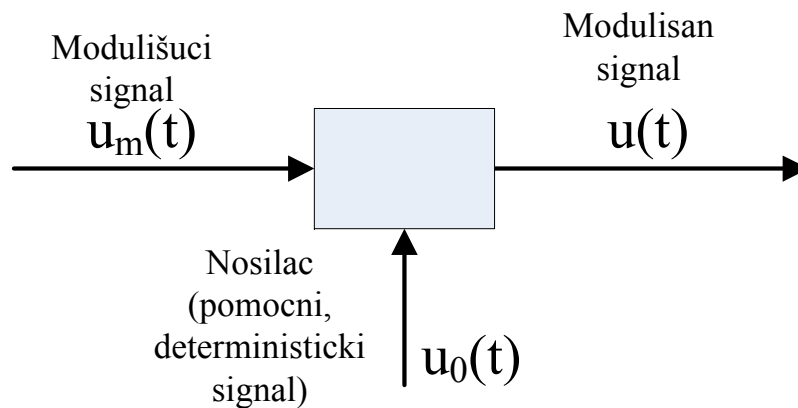
$$G_{S \& H}(j\omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(j(\omega - n\omega_0)) \right] \cdot \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}$$



Definicija modulacije (podsećanje)

* Modulacija:

- Originalni nosilac poruke – modulišući signal
- Pomoćni periodični signal – nosilac
- Rezultat modulacije – modulisani signal
- Proces modulacije svodi se na promenu jednog od parametara nosioca u zavisnosti od promena (varijacija tokom vremena) modulišućeg signala.
- Modem = modulator odlaznih a demodulator dolaznih podataka

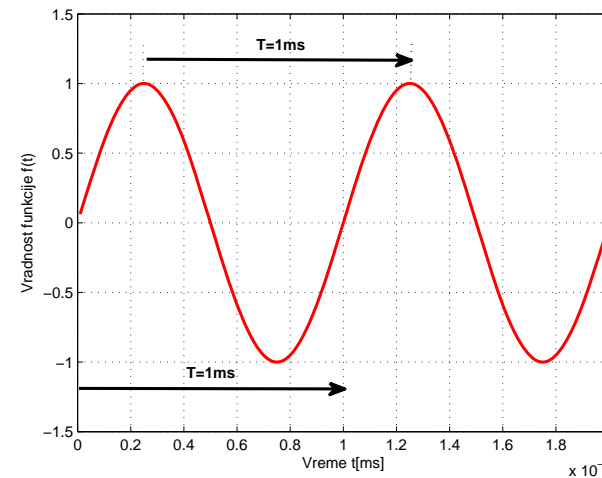


Nosilac

- * Nosilac – umesto prostoperiodičnog signala (kosinusoide) povorka pravougaonih unipolarnih impulsa amplitude U_0 , trajanja τ i periode T .

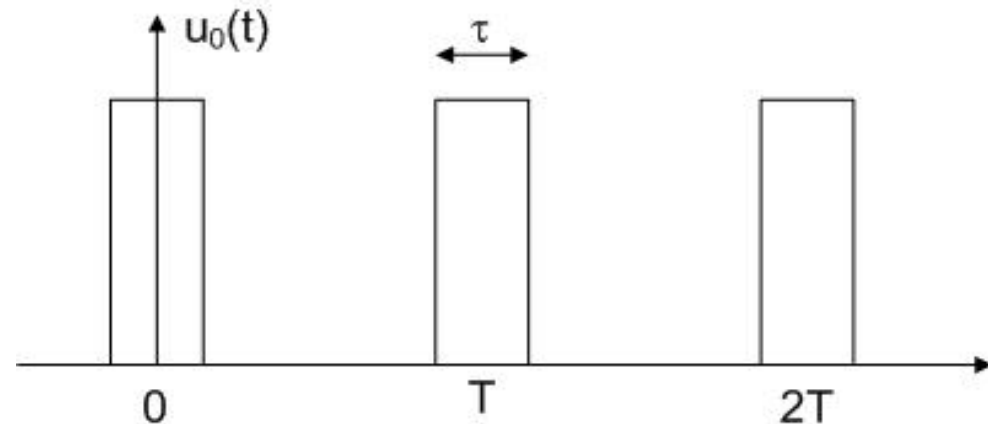
- * Kod kosinusoide se menjala:

- amplituda,
- faza
- frekvencija



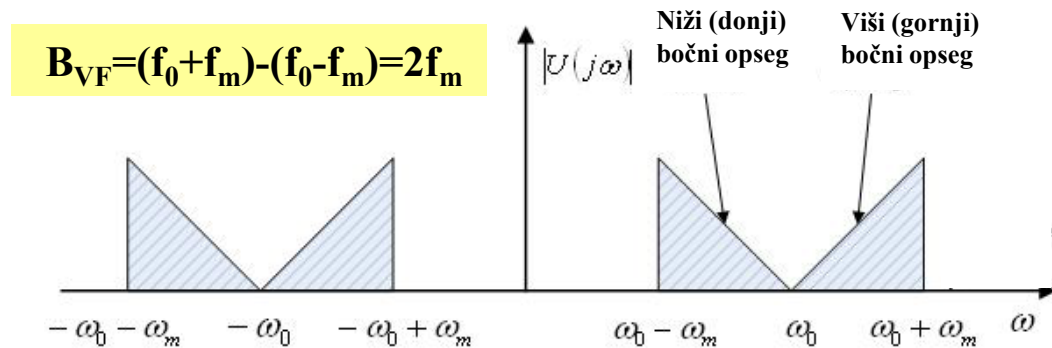
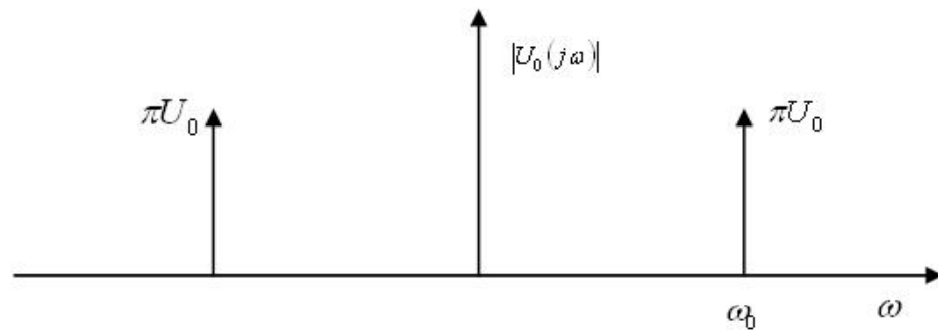
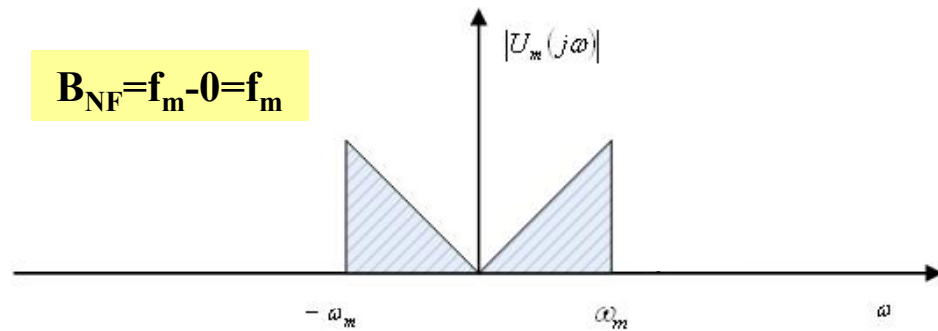
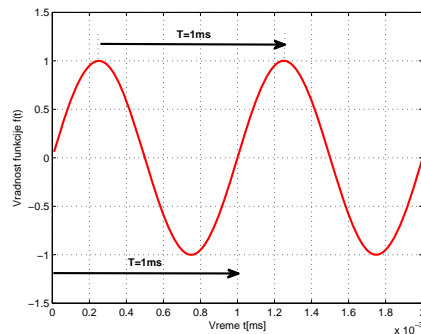
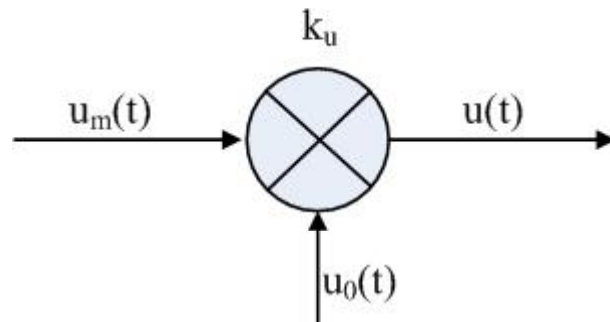
- * Ovde se mogu menjati:

- Amplituda U_0
- Trajanje τ
- Perioda T .



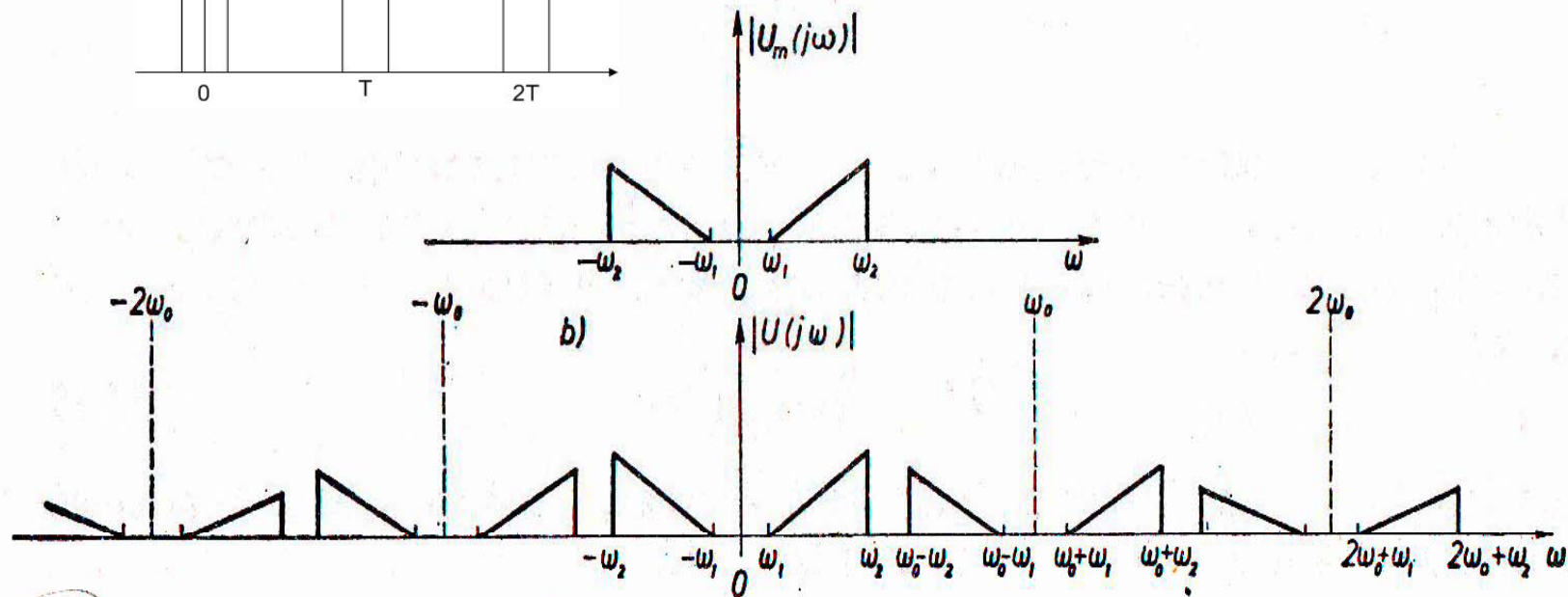
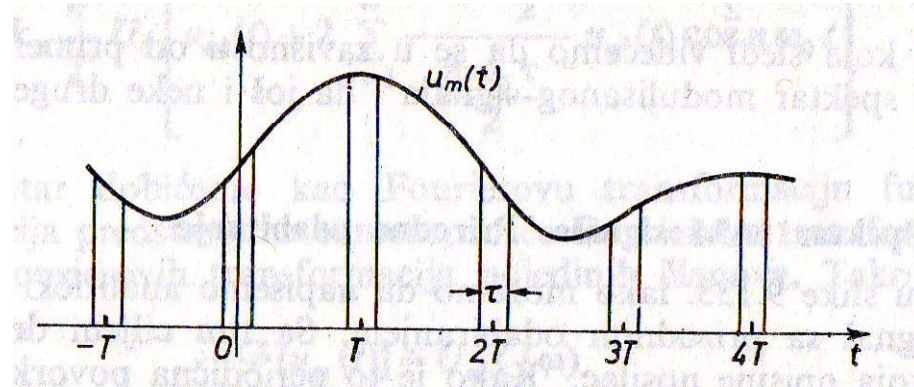
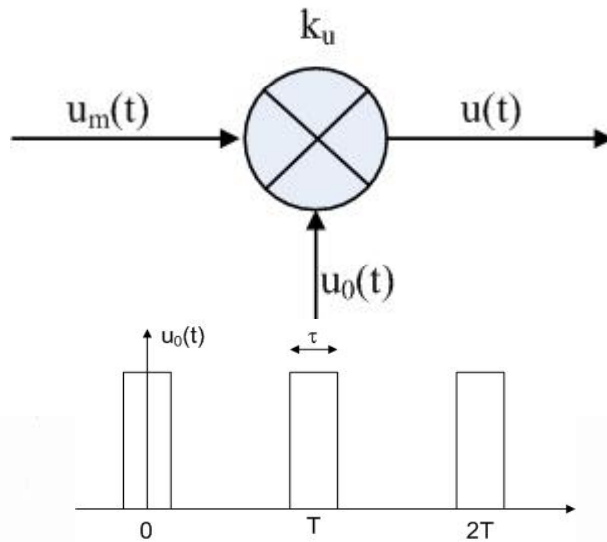
Amplitudska modulacija (podsećanje)

* Modulišući $u_m(t)$



Impulsna amplitudska modulacija (PAM)

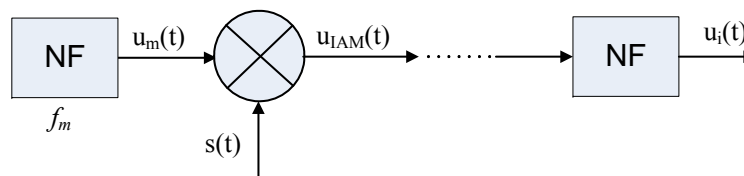
* Modulišući $u_m(t)$



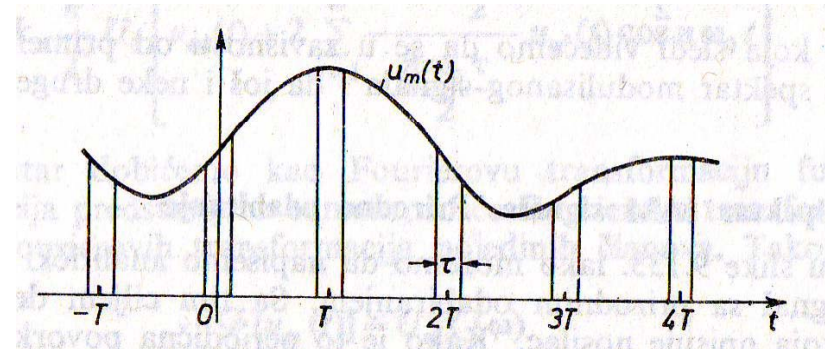
Impulsna amplitudska modulacija (PAM)

* Dva podtipa PAM (*Pulse Amplitude Modulation*):

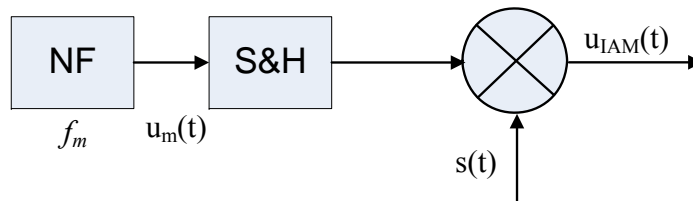
- Zasnovana na prirodnom odabiranju



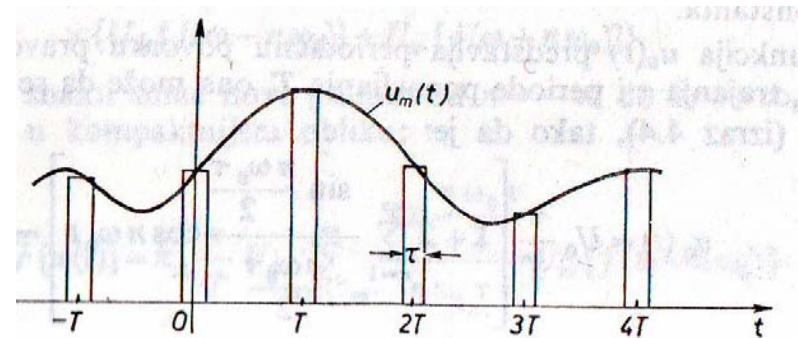
$$U_{IAM}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} u_m(t) e^{jn\omega_0 t}$$



- Zasnovana na regularnom odabiranju



$$U_{IAM}(j\omega) = U\tau \frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_m[j(\omega - n\omega_0)]$$



Tipovi impulsnih modulacija

* Nosilac

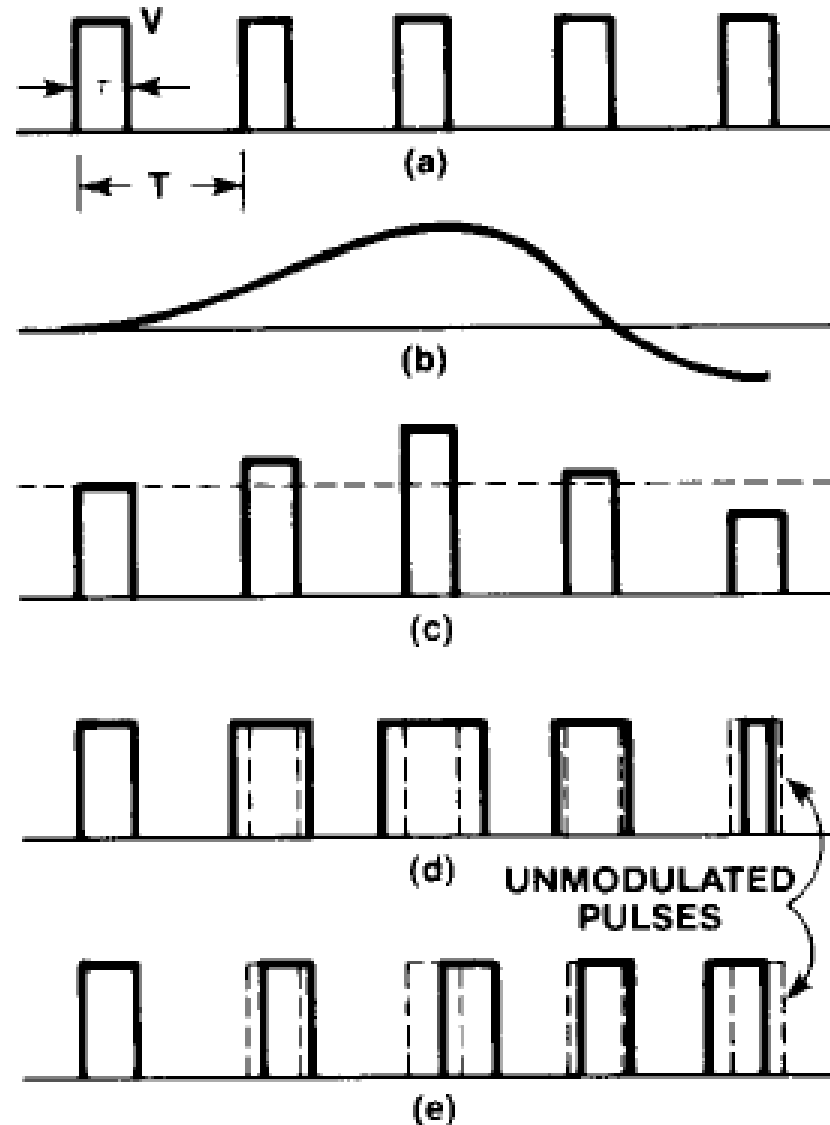
- Povorka pravougaonih impulsa

* Modulišući

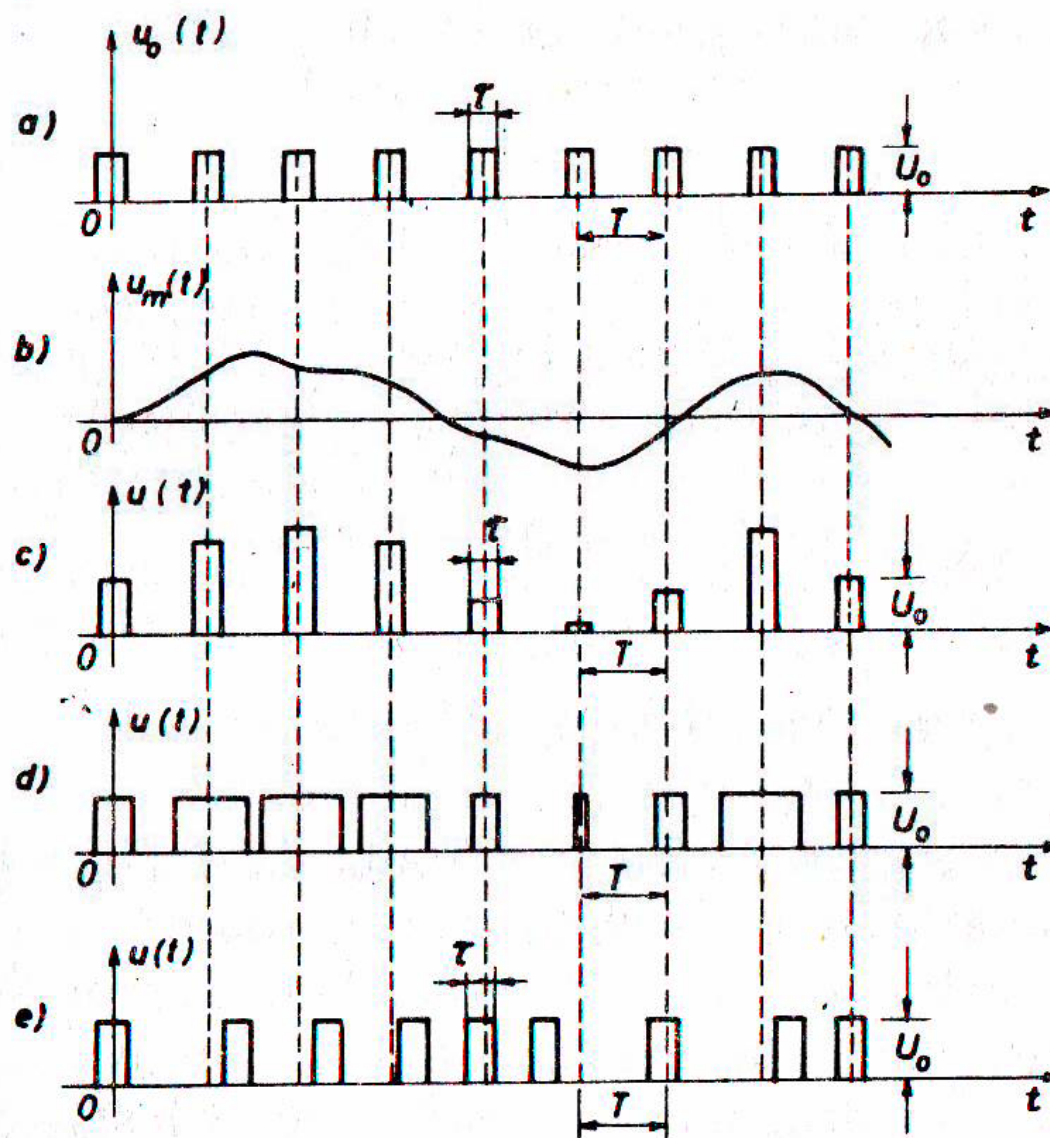
- Slučajan signal (spore varijacije u odnosu na periodu nosioca)

* Impulsna modulacija:

- Impulsna amplitudska modulacija (IAM) - menja se $U_0 \rightarrow u(t)$
- Impulsna širinska modulacija (IŠM) - menja se $\tau \rightarrow \tau(t)$
- Impulsna položajna modulacija (IPM) - menja se $T \rightarrow T(t)$



Pregled impulsnih modulacija



Literatura

- [1] Dukić M, *Principi telekomunikacija*, Akademska misao, Beograd, 2008.
- [2] Ilija Stojanović, *Osnovi telekomunikacija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.
- [3] Sklar B., *Digital Communications – Fundamentals and Applications*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [4] Dukić M, Marković G, Vujić D, *Principi telekomunikacija – Zbornik rešenih zadataka*, Akademska misao, Beograd, 2009.