



# PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet  
Katedra za Telekomunikacije  
Beograd, 2011/2012.*



# HARMONIJSKA ANALIZA DETERMINISTIČKIH SIGNALA

# Klasifikacija signala

- \* Izvor u opštem slučaju ne generiše niz bita već od *signala* (govor, slika, video) treba tek dobiti binarni niz.
- \* Proces diskretizacije zavisi od osobina signala, pre svega njegovog spektra.
- \* Signali mogu biti
  - **Deterministički**
    - Periodični (npr. sinusoida)
    - Aperiodični (npr. usamljeni impuls).
  - **Slučajni**
    - Ne mogu se opisati vremenskom funkcijom.
    - Takva je većina telekomunikacionih signala.

# Periodični deterministički signal

- \* Neka se posmatra proizvoljna funkcija  $x(t)$ , za koju važi

$$x(t) = x(t+T)$$

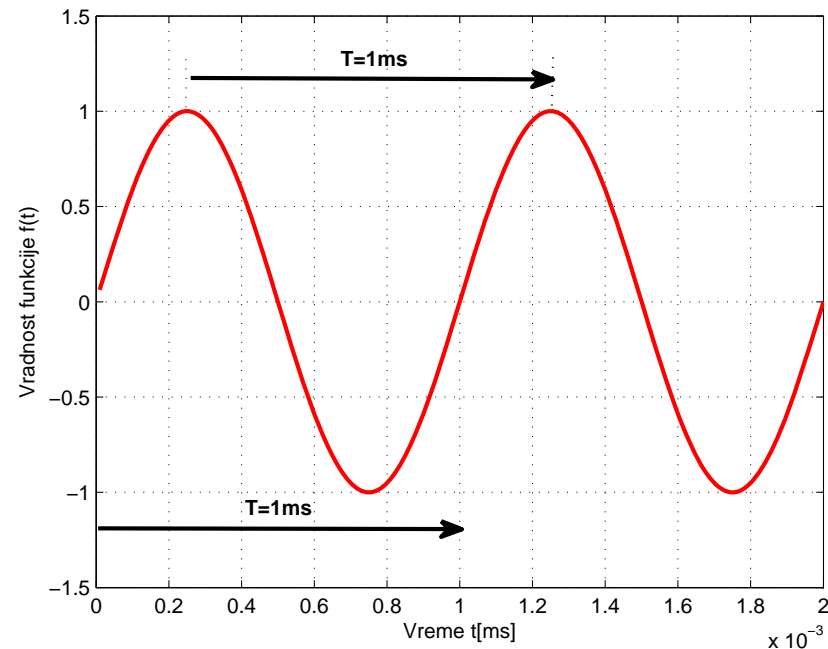
- \* Ovo je periodična funkcija sa periodom  $T$ .

$$x(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/2)$$

pri čemu je  $f$  dato u Hercima a vreme se meri u sekundama.

- \* Sinusoida sa:

- amplitudom  $A=1$ ,
- nultom početnom fazom
- periodom  $T=1\text{ms}=10^{-3}\text{s}$
- učestanosti  $f=1/T=1000\text{Hz}=1\text{kHz}$

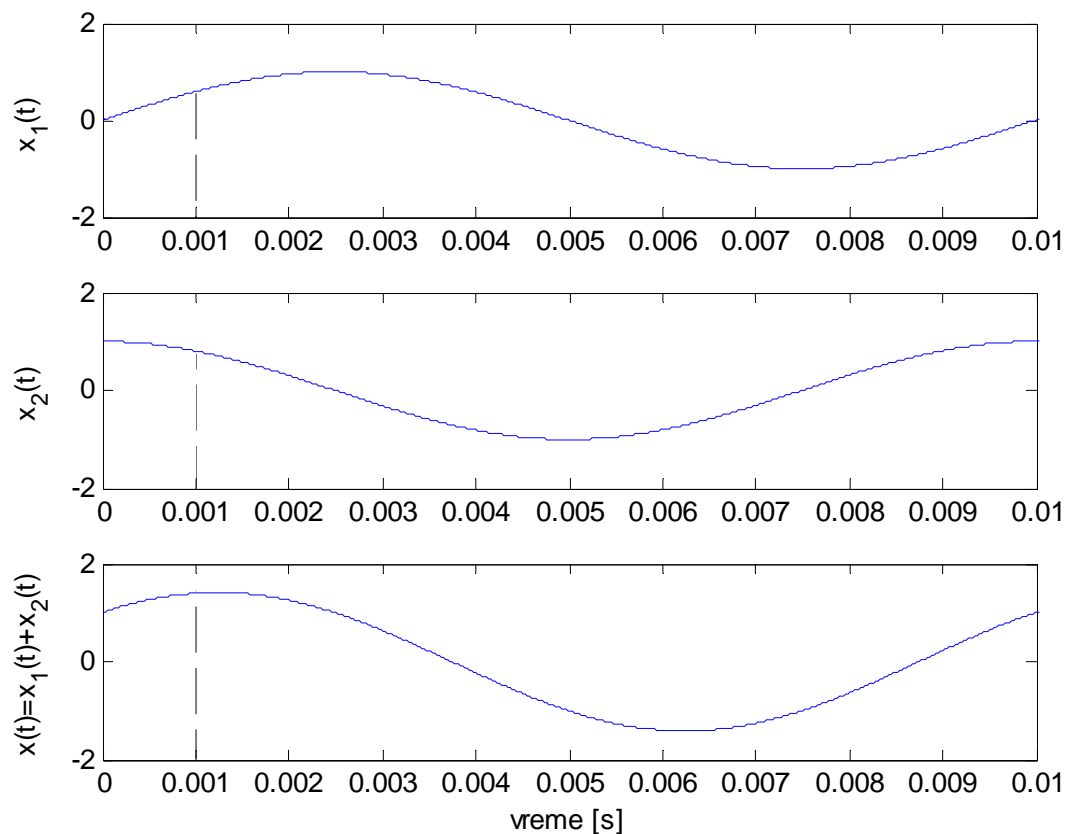


# Signali se mogu sabirati po amplitudi

- \* U nekom vremenskom trenutku odrediti amplitude sabiraka i njihovim zbirom se dobija amplituda rezultujućeg signala.

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)$$

pa je za  $t=1\text{ms}$  :  $\sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)=0.5878$ ,  $\cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)=0.8090$ ,  $x(t)=1.3968$ .

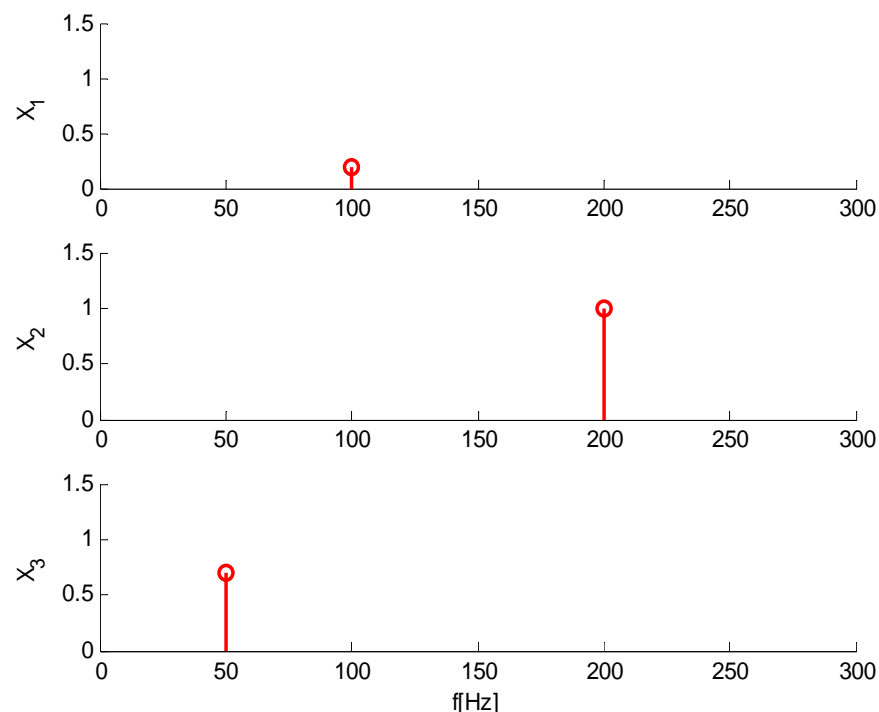
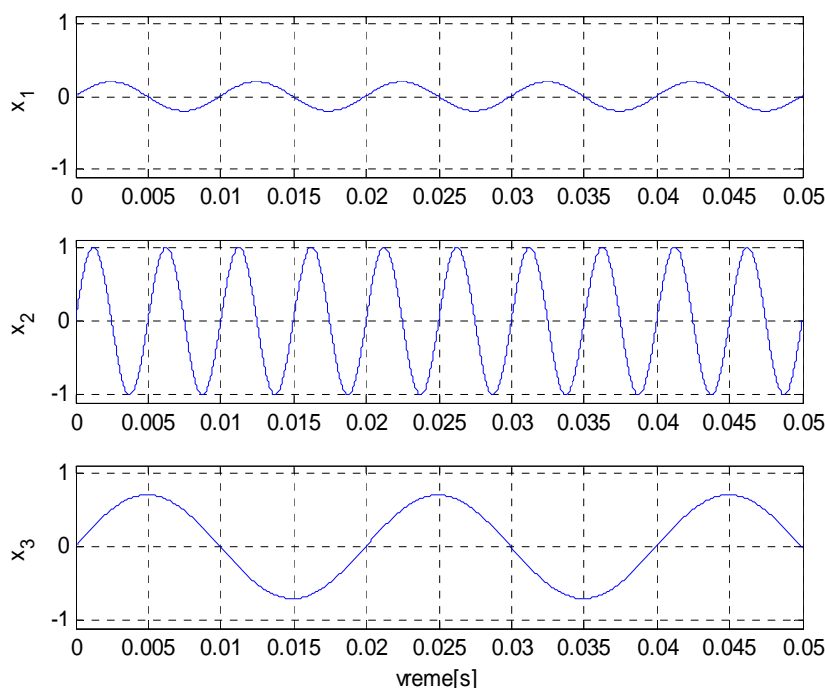


# Periodični deterministički signal – primer 1

- \* Signal koji se dobija zbirom tri sinusoide

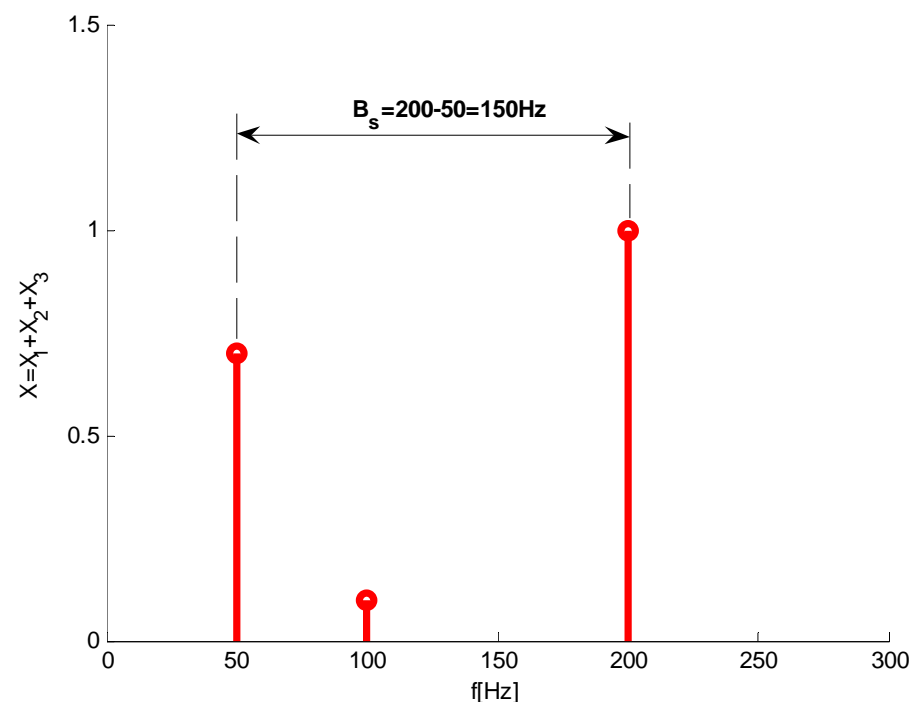
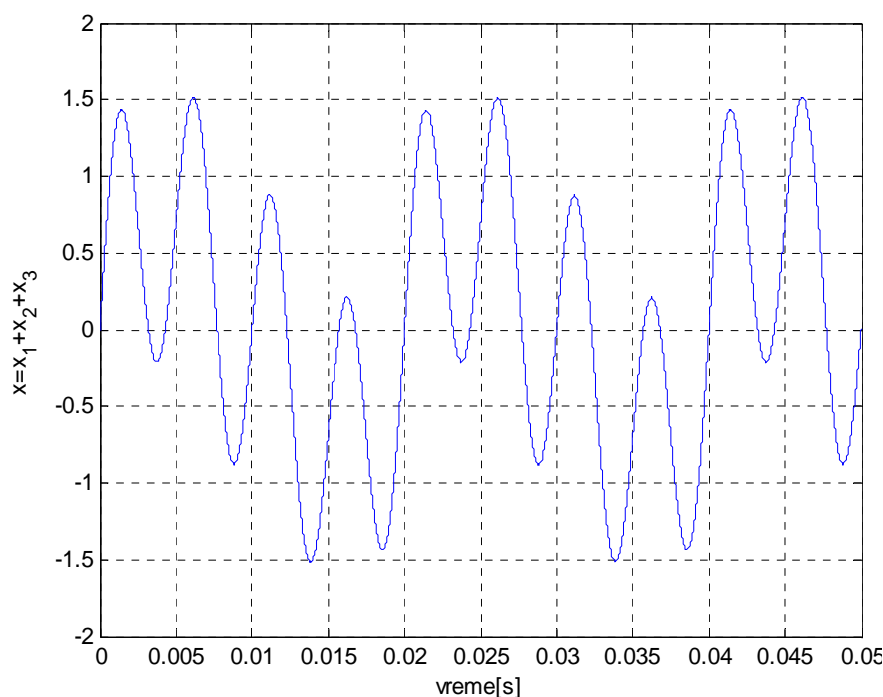
$$x(t) = 0.2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t) + 0.7 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

- \* Svakoj sinusoidi odgovara jedna komponenta u amplitudskom spektru (pokazuje koliko je koja sinusoida “snažna”)!



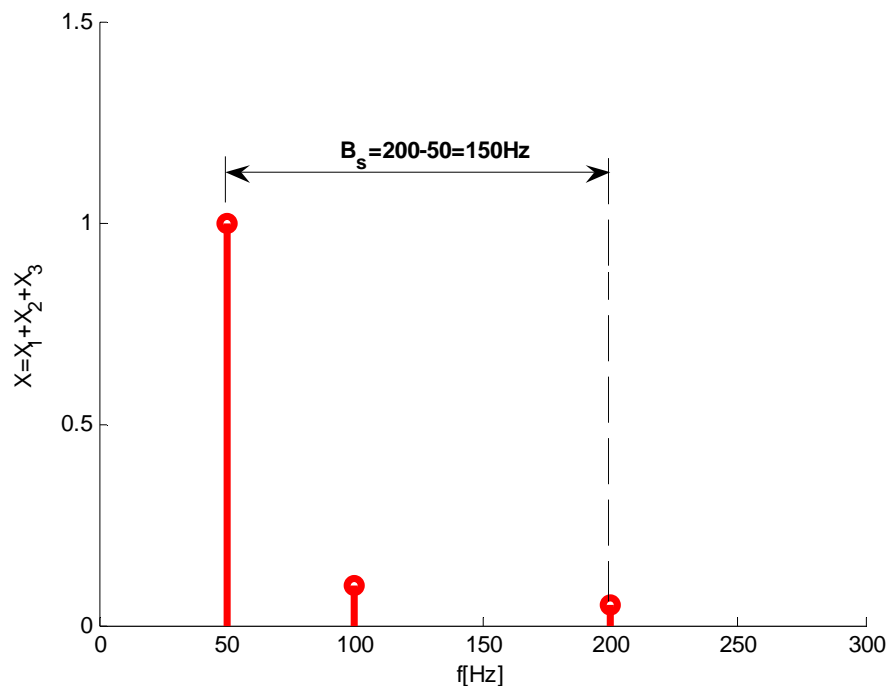
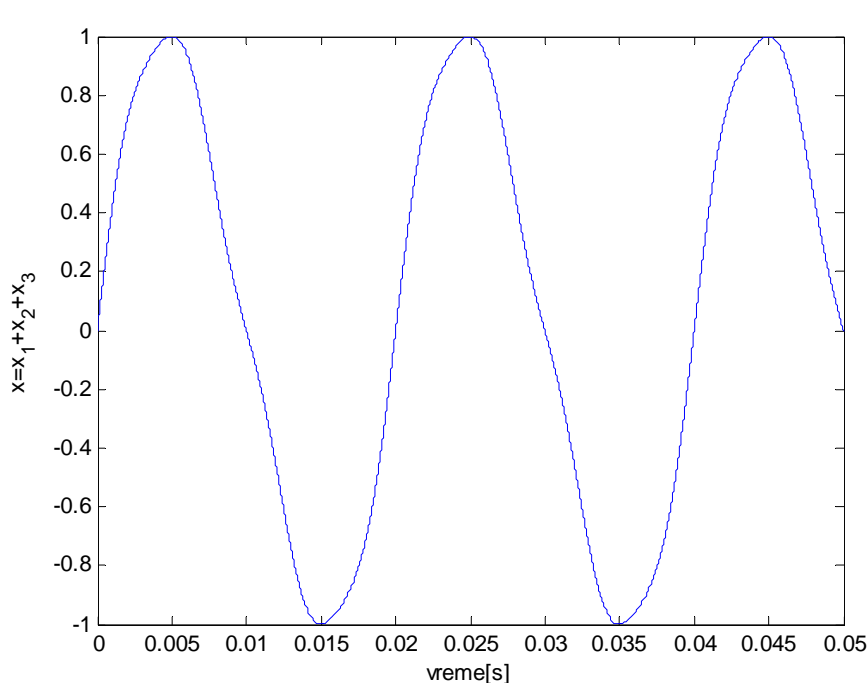
# Periodični deterministički signal – primer 1

- \* Spektar složenog signala  $x(t)$  ima tri komponente, a širina spektra posmatranog signala iznosi 150Hz.
- \* Signal koji se dobija zbirom konačnog broja sinusoida uvek je periodičan sa periodom koja je određena najvećim zajedničkim deliocem učestanosti svih komponenata u spektru. Ona se naziva osnovnom učestanošću periodičnog signala i obeležava se sa  $f_0$  ( $f_0=50\text{Hz}$ ,  $T_{\text{clož}}=1/(50\text{Hz})=20\text{ms}$ ).



## Periodični deterministički signal – primer 2

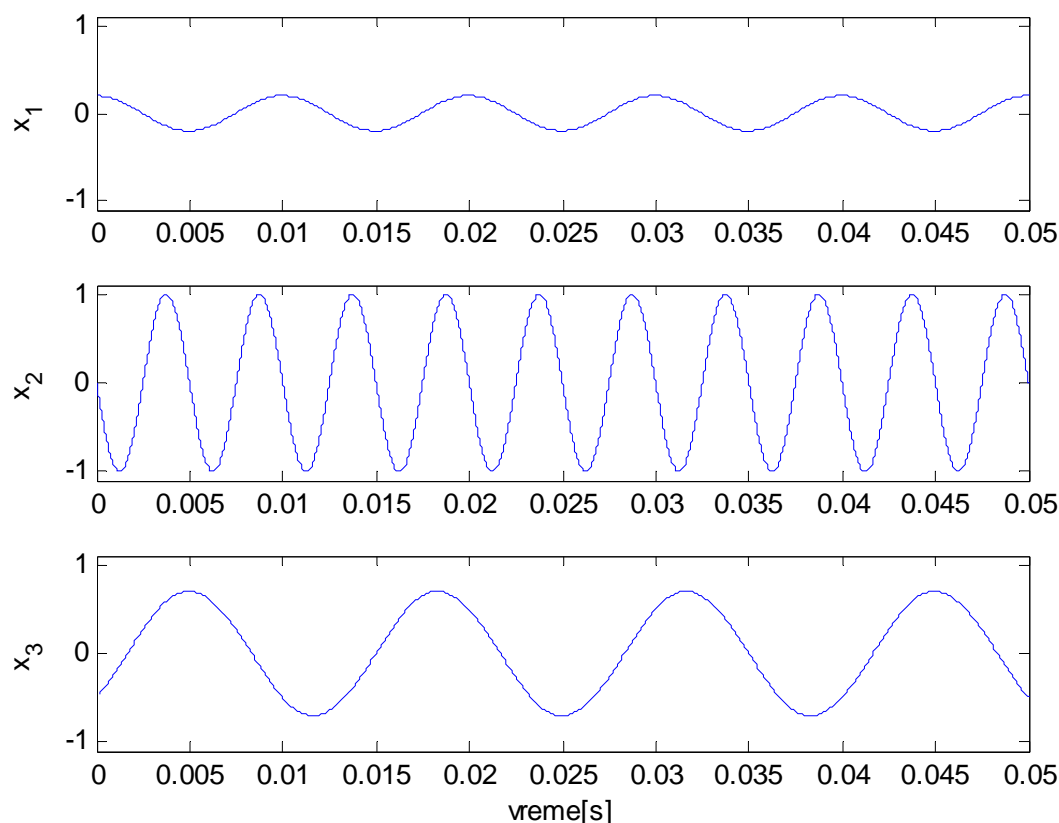
- \* Ako se zadrži isti broj komponenti u spektru signala a promeni samo njihova amplituda (time i snaga), može se znatno promeniti vremenski oblik signala.
- \* I ovaj signal je deterministički (može se opisati matematičkom funkcijom) i periodičan. Pritom perioda signala ( $T=20\text{ms}$ ) i širina spektra signala ( $150\text{Hz}$ ) ostaju nepromenjeni.



## Periodični deterministički signal – primer 3

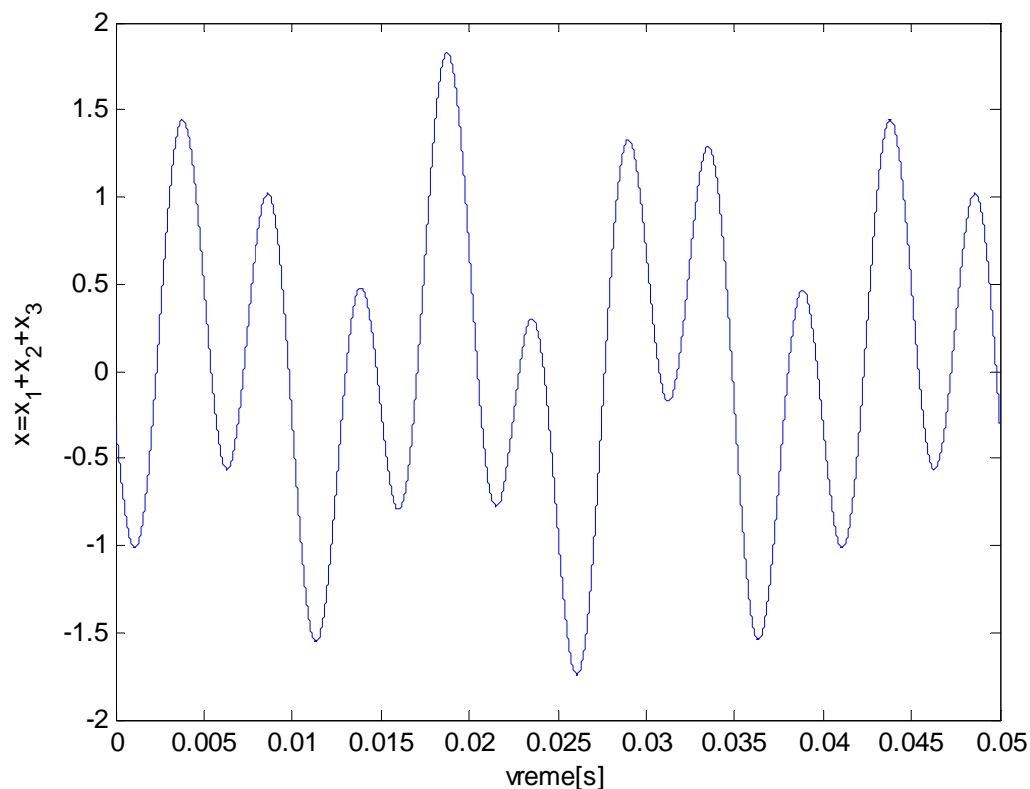
- \* Signal se može dobiti i zbirom kosinusoida.
- \* Neka su komponentne kosinusoide fazno pomerene:

$$x(t)=0.2*\cos(2*\pi*100*t)+\cos(2*\pi*200*t+\pi/2)+0.7*\cos(2*\pi*75*t+5\pi/4)$$



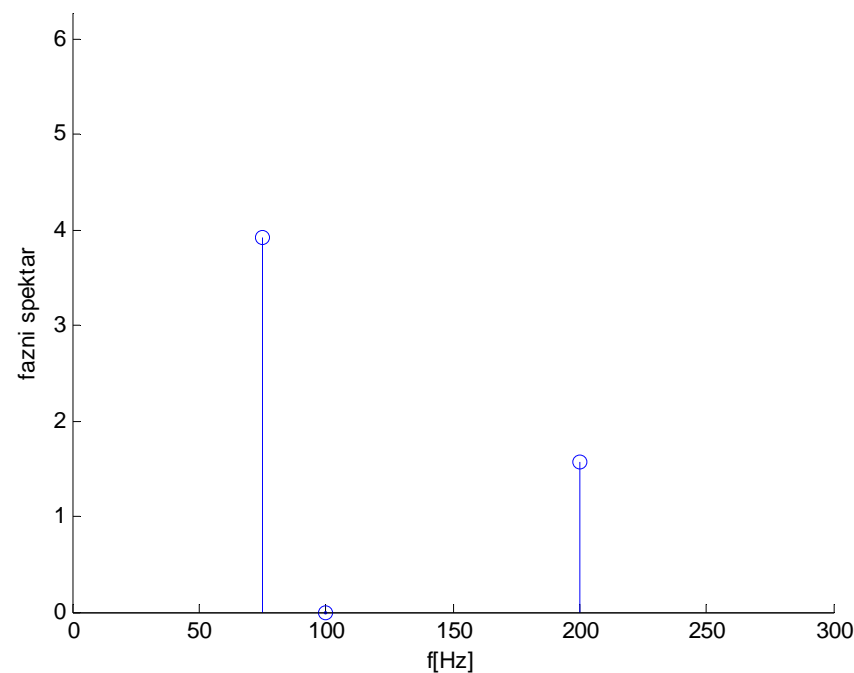
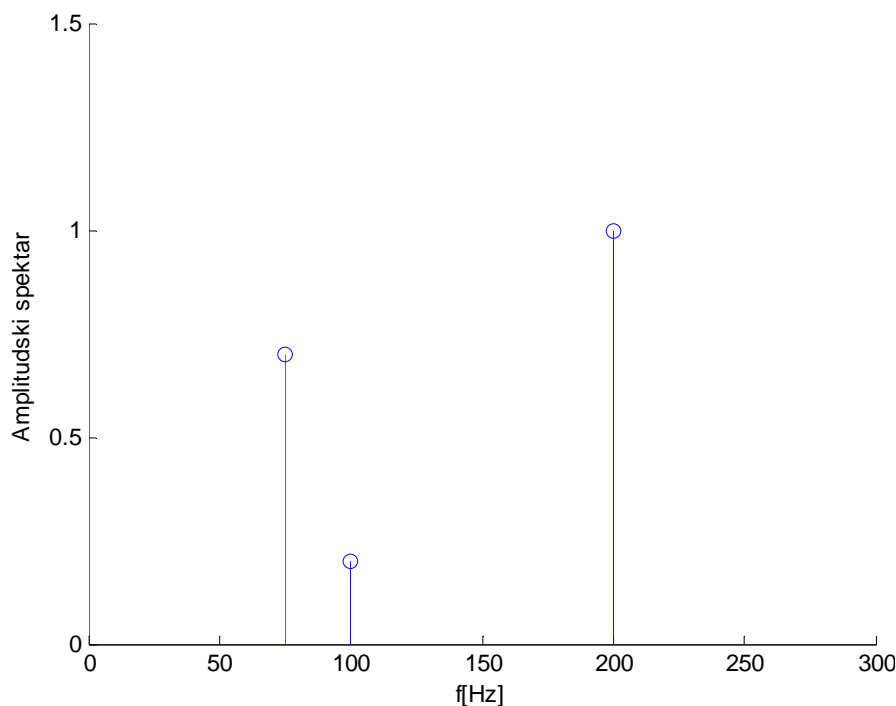
## Periodični deterministički signal – primer 3

- \* Tada se menja i vremenski oblik signala – na njega ne utiču samo učestanosti i amplitude komponenti već i njihovi fazni pomeraji!
- \* Zapaziti da je ovde  $NZD(100,200,75)=25\text{Hz}$  i da ona ne odgovara najnižoj učestanosti u spektru! Perioda signala iznosi 40ms.



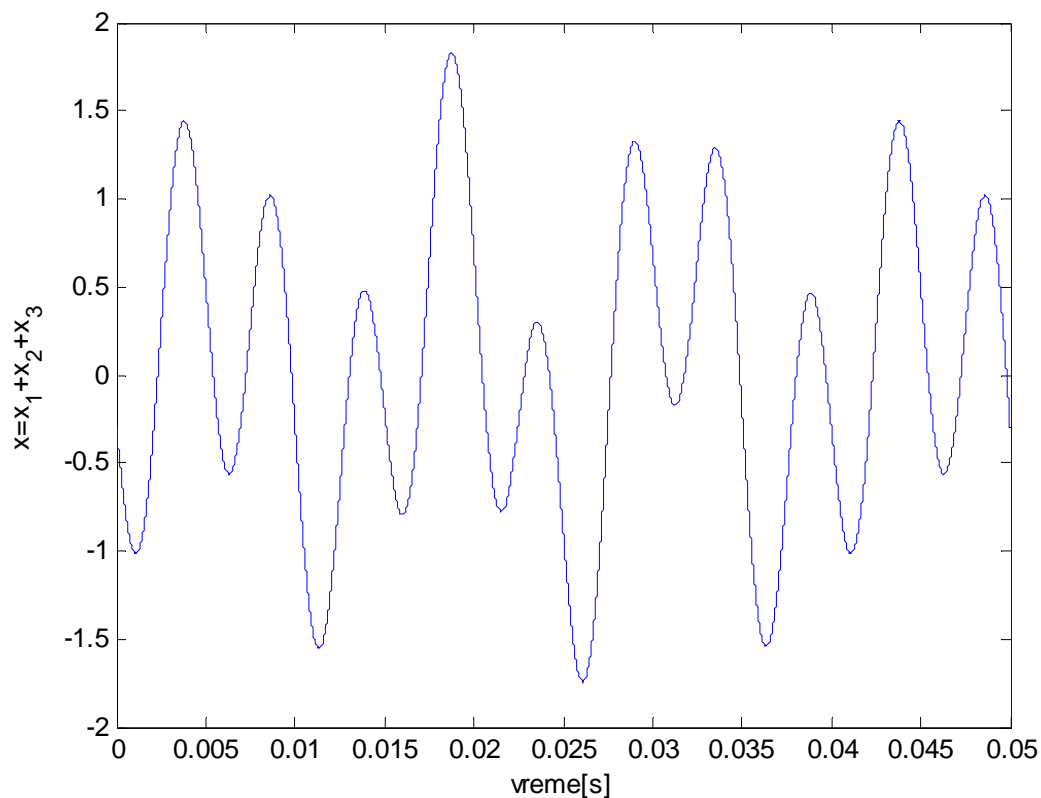
## Periodični deterministički signal – primer 3

- \* **Periodičan signal je kompletno opisan samo ako je poznat njegov amplitudski i fazni spektar!**
- \* **Vrednosti u faznom spektru se nalaze u opsegu  $(0, 2\pi)$  ili  $(-\pi, \pi)$ .**
- \* **Fazni spektar određuje početne faze pojedinih komponentnih kosinusoida.**



# Obrnut problem!

- \* Poznajemo vremenski oblik periodičnog signala. Da li je taj signal moguće rastaviti na zbir sinusoida? Kako to uraditi u opštem slučaju?
- \* Periodu možemo relativno lako da očitamo ako uočimo koji deo signala se periodično ponavlja – za primer dat na slici jasno je da je  $T=40\text{ms}$  pa je osnovna učestanost u spektru  $f_0=25\text{Hz}$ . Spektar ima komponente koje postoje samo na umnošcima  $f_0$ !



# Harmonijska analiza periodičnih signala

- \* Ako periodičan signal  $x(t)$  zadovoljava *Dirichlet*-ov uslov:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$$

tada se on može predstaviti u obliku *Fourier*-ovog reda, odnosno u obliku ( $f_0$  je osnovna učestanost određena periodom signala):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

pri čemu su težinski koeficijenti (*Fourier*-ovi koeficijenti) određeni izrazima

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

# Harmonijska analiza periodičnih signala

- \* Alternativni zapis razvoja periodične funkcije u *Fourier*-ov red (periodična funkcija  $x(t)$  predstavlja se u obliku sume prostoperiodičnih oscilacija, harmonicima funkcije  $x(t)$ , amplitude  $C_n$ , faznog stava  $\theta_n$  i učestanosti  $nf_0$  :

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$C_0 = a_0 / 2, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- \* Koeficijenti  $C_n$  određuju amplitude kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na komponente.
- \* Koeficijenti  $\theta_n$  određuju početne faze kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na komponente.
- \* Koeficijenti  $C_0$  određuje nivo prisustva jednosmerne komponente.

# Harmonijska analiza periodičnih signala

- \* Korišćenjem jednakosti:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \text{ i } \sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}),$$

- \* Signal  $x(t)$  se može predstaviti u obliku

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

- \* Pri čemu su sa  $X_n$  označeni kompleksni Furijeovi koeficijenti (predstavljaju spektar signala!)

$$X_n = X(jn\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- \* Spektar se deli na amplitudski i fazni spektar:

$$X_n = |X_n| e^{j\theta_n}$$

# Harmonijska analiza periodičnih signala

## \* Kompleksni red

- Dvostrani spektar koji je zgodan za matematički opis ali negativne učestanosti u prirodi ne postoje!

## \* Trigonometrijski red

- Jednostrani spektar kod koga su komponente spektra dvostruko veće nego u slučaju dvostrane predstave

$$C_n = 2 | X_n |$$

- Amplitudski spektar realne funkcije  $f(t)$ , je parna funkcija učestanosti, dok je fazni spektar neparna funkcija učestanosti, odnosno važe izrazi:

$$|X(jn\omega_0)| = |X(-jn\omega_0)| \text{ i } \theta(jn\omega_0) = -\theta(-jn\omega_0).$$

# Sinusoida – određivanje spektra

## \* Signal

$$x(t) = A \sin(2\pi ft), \quad 1/f = T = 1/f_0$$

## \* Koeficijenti iznose

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} A, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

## \* Pa je zato

$$C_0 = 0, \quad C_1 = A, \quad C_2 = C_3 = \dots = 0$$

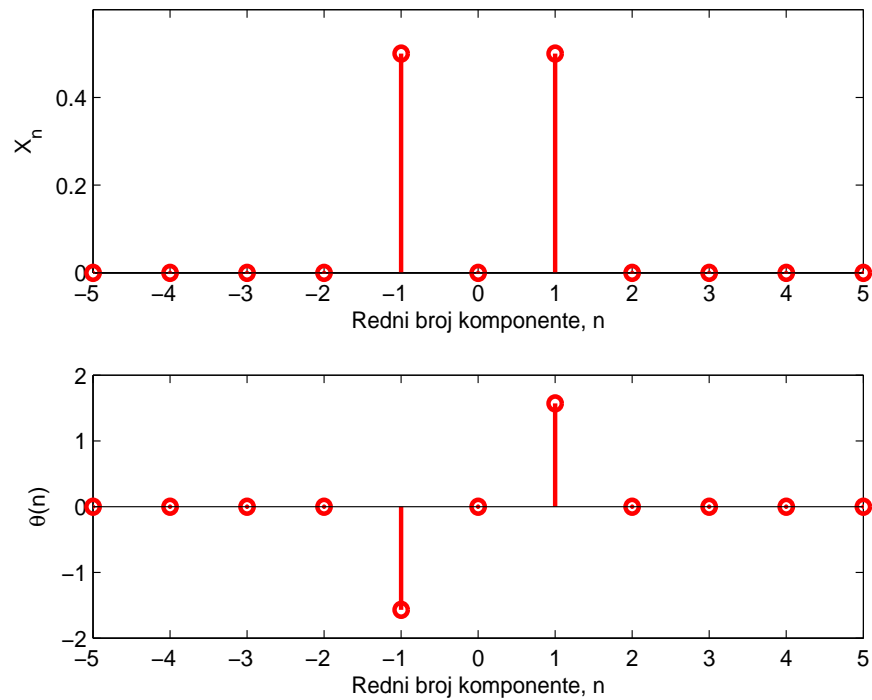
$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \pi/2, \quad \theta_2 = \theta_3 = \dots = 0$$

čemu odgovara sasvim logičan rezultat

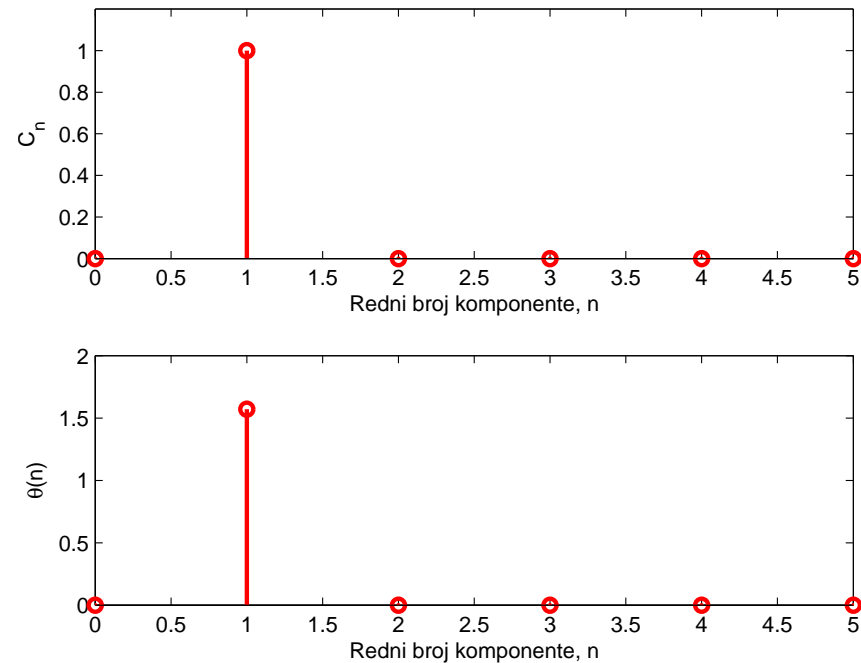
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

# Sinusoida - spektar

## \* Dvostrani spektar



## \* Jednostrani spektar



# Osobine spektra periodičnih signala

- \* Osnovna osobina spektra periodičnih realnih funkcija (signala) je da se njihov razvoj u *Fourier*-ov red sastoji od prostoperiodičnih komponenti čije su učestanosti harmonici (umnošci) osnovne učestanosti signala.
- \* Odnosno, imamo slučaj da su spektralne komponente definisane na diskretnom skupu učestanosti  $f = nf_0$ , gde  $n$  pripada skupu celih brojeva. Iz navedenog razloga, spektre periodičnih realnih funkcija (signala) nazivamo diskretnim ili linijskim spektrima.

# Osobine spektra periodičnih signala

- \* Još jedna bitna osobina realne funkcije (signala)  $x(t)$  je njena efektivna (srednja kvadratna) vrednost, definisana izrazom:

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt}$$

- \* **Kvadrat efektivne vrednosti jednak je snazi signala!**
- \* Parsevalova teorema: srednja snaga signala može se dobiti iz amplitudskog spektra tog signala, sabiranjem kvadrata svake od njegovih komponenti.

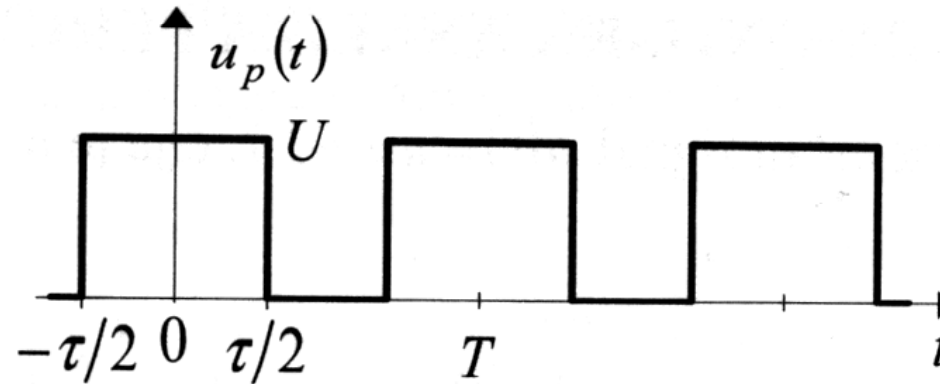
$$P_{sr} = (x_{eff})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

# Povorka periodičnih impulsa – određivanje spektra

## \* Povorka periodičnih impulsa

- periode  $T$ , amplitude  $E$  i trajanja  $\tau$ ,
- matematički zapis (za svaki ceo broj  $k$ ):

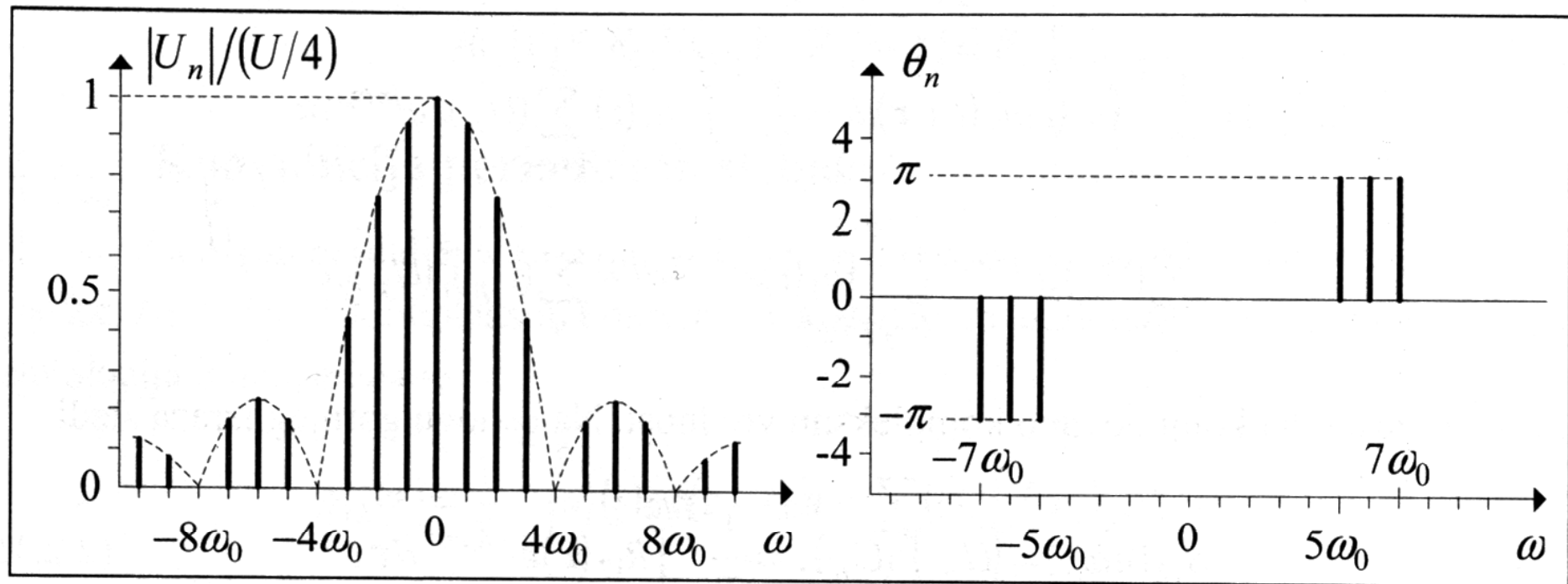
$$u_p(t) = \begin{cases} U, & -T/2 + kT < t \leq T/2 + kT \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



# Povorka periodičnih impulsa – oblik spektra

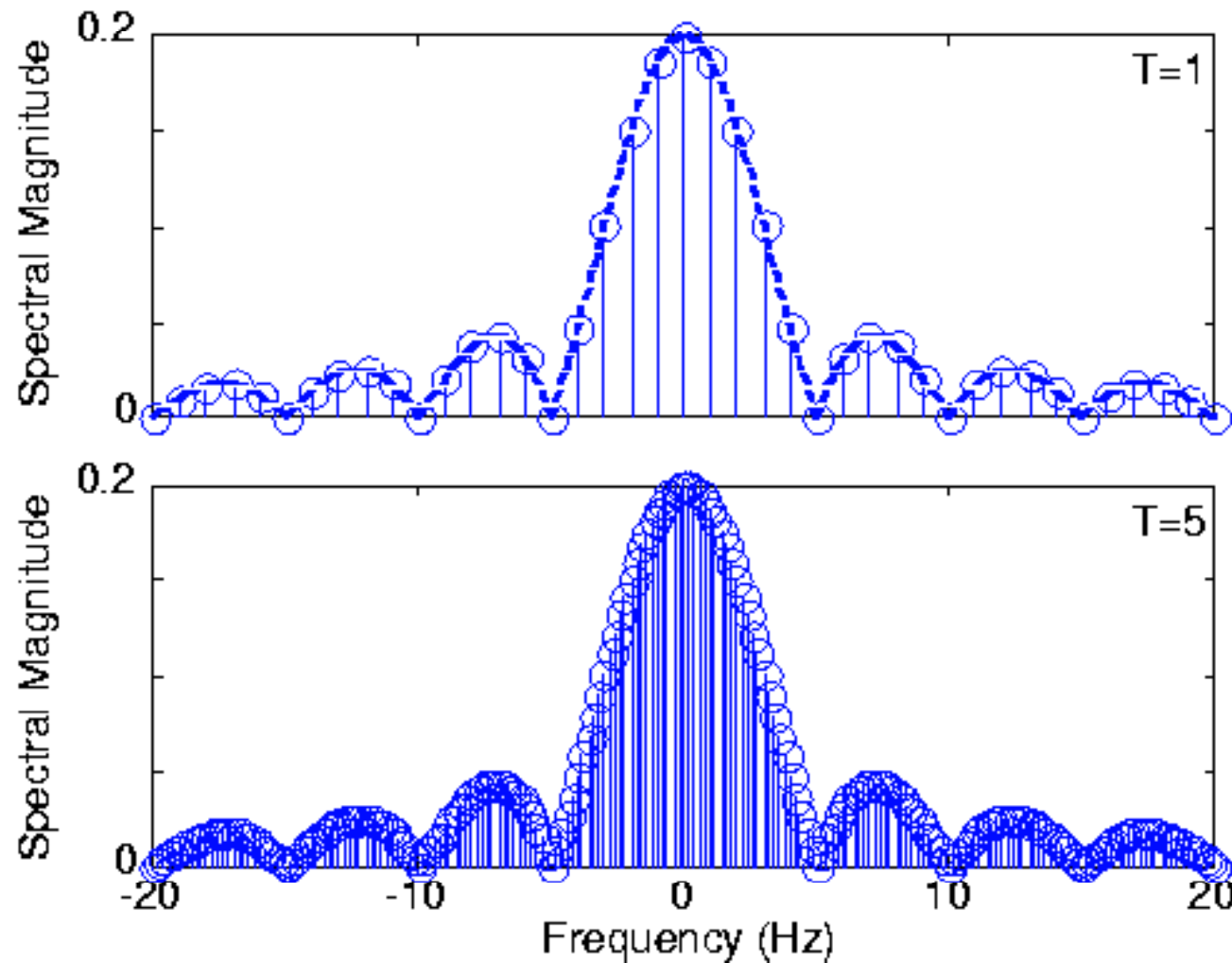
- Oblik spektra:

$$U_n = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} e^{j\theta_n}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$



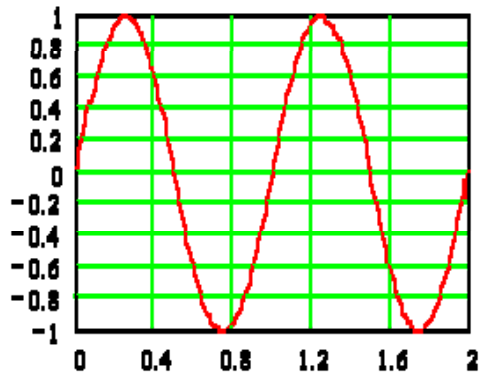
# Uticaj periode signala na oblik spektra

- \* Maksimum na  $E\tau/T$ , nule na  $n/\tau$ !

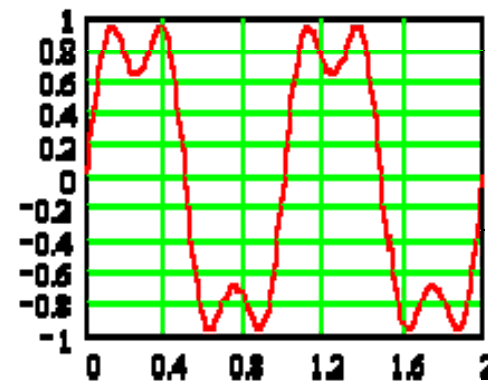


# Značaj komponenti spektra

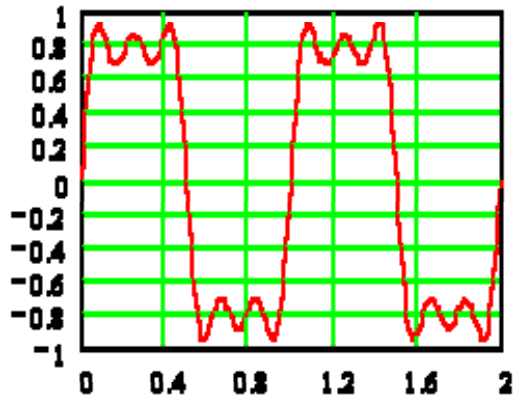
$$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T)$$



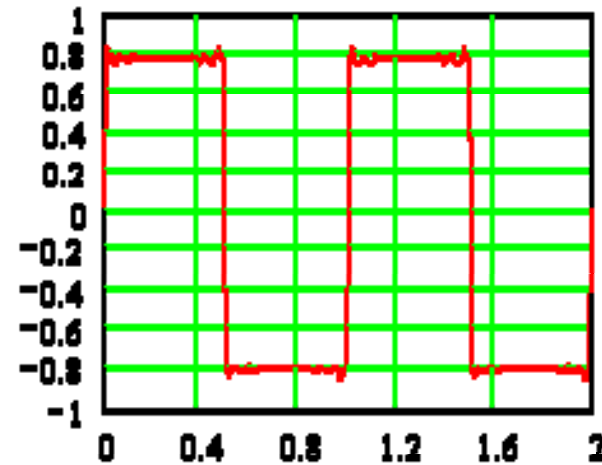
$$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T) + (1/3) * \sin(6\pi t/T)$$



$$S(t) = 1 * \sin(2\pi t/T) + (1/3) * \sin(6\pi t/T) + (1/5) * \sin(10\pi t/T)$$



Zbir prvih 79 spektralnih komponenti



# Pregled osobina periodičnih signala

## \* Najvažnije osobine:

- **Spektar je diskretan**
  - Spektar pokazuje amplitude i faze kosinusoida čijim se zbirom može odrediti polazni periodični signal;
  - Rastojanje komponenti u spektru iznosi  $f_0=1/T$  i ni u kom slučaju ne može biti manje od toga;
  - Broj komponenti u spektru može biti beskonačan (ali ne mora!).
- **Deo snage koji “nosi” odgovarajuća spektralna komponenta srazmeran je kvadratu njene amplitude;**
- **Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od  $n$ );**
- **Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od  $n$ ;**
- **Neke komponente u spektru su manje bitne – ako ne uđu u zbir, signal rezultat neće mnogo odstupati od originalnog periodičnog signala.**

# Korelacija periodičnih signala

- \* **Korelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , koji imaju istu periodu  $T$ , i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraj  $\tau$ .
- \* **Definicija korelacije**

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

- \* **Furijev transformacioni par**

$$R_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X_n)_1^* (X_n)_2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$(X_n)_1^* (X_n)_2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Autokorelacija periodičnih signala

- \* **Autokorelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) signala  $x_1(t)$ , koji ima periodu  $T$ , sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomeraj  $\tau$ .
- \* Definicija autokorelacije

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

- \* Furijeov transformacioni par

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$|X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Konvolucija periodičnih signala

- \* **Konvolucija** pokazuje stepen poklapanja signala  $x_1(t)$  i signala  $x_2(t)$ , kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za proizvoljni pomeraj  $\tau$ .
- \* Definicija korelacije

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

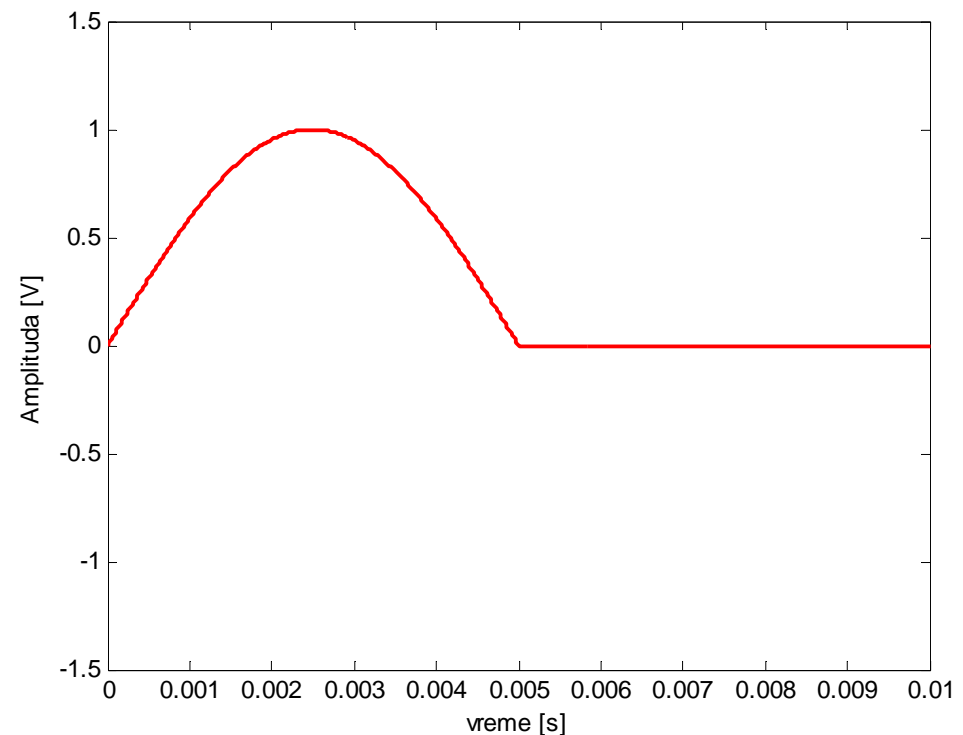
- \* Furijeov transformacioni par

$$\rho_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X_n)_1 (X_n)_2 e^{jn\omega_0\tau}$$
$$(X_n)_1 (X_n)_2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Šta ako signal nije periodičan?

- \* Ako signal nije periodičan, da li je moguće takav signal predstaviti zbirom određenog broja kosinusoida?
- \* Za sada ćemo se ograničiti samo na signale koji nisu periodični ali jesu deterministički – mogu se predstaviti nekom matematičkom funkcijom.
- \* Primer:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi ft), & t \in [0, 1/(2f)] \\ 0, & t \notin [0, 1/(2f)] \end{cases}$$



# Harmonijska analiza aperiodičnih signala

- \* Ovi signali nisu periodični - ne postoji  $T$  tako da je  $x(t)=x(t+T)$ .
  - Može se smatrati da im je perioda beskonačna.
  - Zato  $f_0=1/T \rightarrow 0$ , spektralne komponente se približavaju a spektar postaje kontinualan!

- \* Signal  $x(t)$  se ipak može predstaviti u obliku

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_n(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

- \* Pri čemu je sa  $X_n$  označen spektar signala

$$X_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

a spektar postoji pod uslovom da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

# Harmonijska analiza aperiodičnih signala

- \* Spektar se opet može napisati u kompleksnom obliku

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

i rastaviti na

- spektar amplituda, označen sa  $|X(j\omega)|$  ;
- spektar faza, označen sa  $\theta(\omega)$ .

pri čemu važi:

$$\theta(\omega) = \arg \{ X(j\omega) \}$$

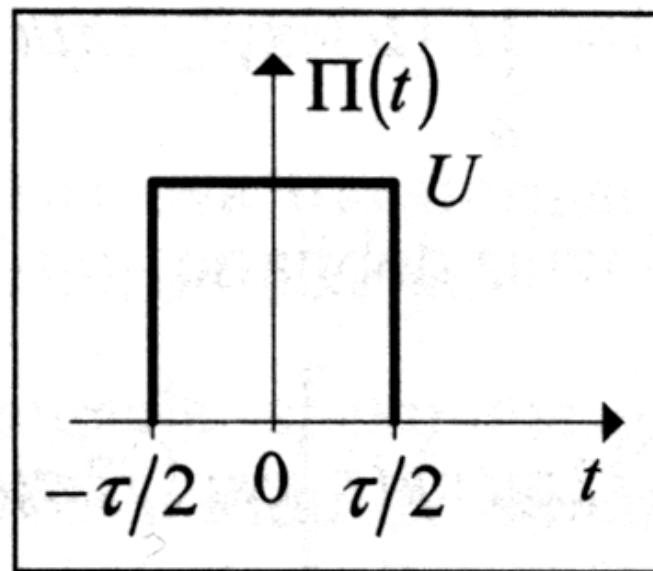
$$|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$$

$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$$

# Usamljeni pravougaoni impuls

- \* Signal dobijen od periodične povorke pravougaonih impulsa kada  $T \rightarrow \infty$ .

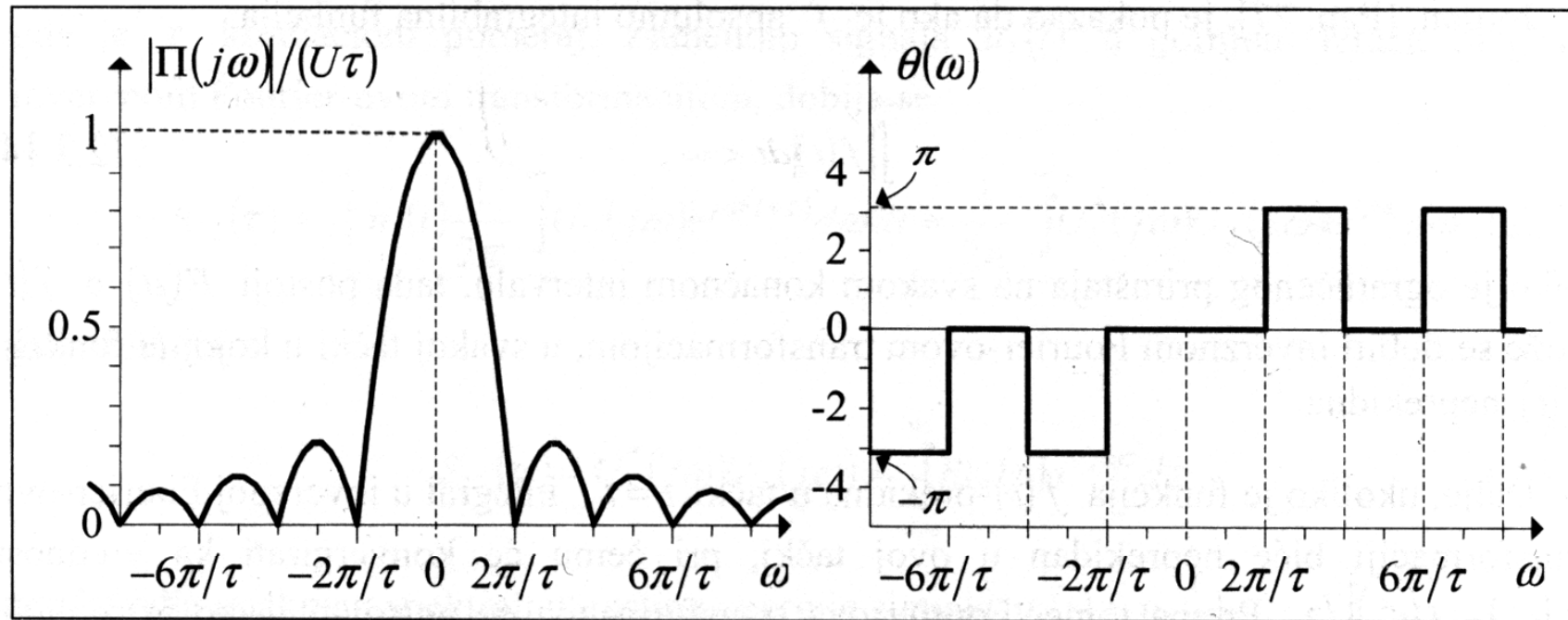
$$u_P(t) = \begin{cases} U, & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



# Usamljeni pravougaoni impuls

- Spektar pravougaonog unipolarnog impulsa

$$\Pi(j\omega) = U\tau \frac{\sin(\omega\tau / 2)}{\omega\tau / 2} e^{j\theta(\omega)}$$



# Osobine spektra aperiodičnih signala

## \* Najvažnije osobine:

- Spektar je kontinualan (ne postoje samo neke već sve komponente u spektru);
  - Ovo praktično pokazuje da se aperiodični signal može odrediti zbirom beskonačnog broja sinusoida čije se učestanosti razlikuju za beskonačno malu vrednost.
- Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od  $n$ );
- Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od  $n$ ;
- Spektar snage jednak je kvadratu amplitudskog spektra;
- Neke od komponenti su više a neke manje istaknute;
- Ako se odseče deo komponenti koje nose manji deo snage, signal će biti dosta verno rekonstruisan.

# Korelacija aperiodičnih signala

- \* **Korelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) dva aperiodična signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , i to kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraj  $\tau$ .
- \* Definicija korelacije

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

- \* Furijeov transformacioni par

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$X_1^*(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Autokorelacija aperiodičnih signala

- \* **Autokorelacija** pokazuje sličnost (stepen poklapanja) aperiodičnog signala  $x_1(t)$  sa njegovom kopijom zakašnjenom u vremenu za proizvoljni pomeraj  $\tau$ .
- \* Definicija autokorelacije

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

- \* Furijeov transformacioni par

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$|X(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau$$

# Konvolucija aperiodičnih signala

- \* **Konvolucija** pokazuje stepen poklapanja dva aperiodična signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ , kada je umesto jednog od njih uzet njegov odraz u ogledalu zakašnjen za pomeraj  $\tau$ .
- \* Definicija korelacije

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

- \* Furijeov transformacioni par

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$X_1(j\omega) X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

# Još neke osobine determinističkih signala

## \* Bez obzira da li je signal periodičan ili aperiodičan:

- Furijeova transformacija korelacije dva signala jednaka je proizvodu amplitudskog spektra jednog i konjugovanog amplitudskog spektra drugog signala;
- Furijeova transformacija **autokorelacije** signala jednaka je **spektru snage** signala;
- Furijeova transformacija **konvolucije** dva signala jednaka je **proizvodu amplitudskih spektara** dva signala.
- Pošto pomeraj može biti proizvoljan, korelacija, autokorelacija i konvolucija su uvek **kontinualne funkcije**
  - Za periodične signale one se dobijaju sabiranjem diskretnih komponenti (u opštem slučaju beskonačne sume);
  - Za aperiodične signale navedene veličine se dobijaju integraljenjem kontinualnih funkcija.

# Dodatne osobine *Fourier*-ove transformacije

- \* Ako posmatramo dva aperiodična realna signala  $x(t)$  i  $y(t)$ , za koje je moguće definisati spektre  $X(j\omega)$  i  $Y(j\omega)$ , respektivno, kao i kompleksne konstante  $a, b$  tada važe sledeći izrazi (osobine):

- Linearnost

$$F\{ax(t) + by(t)\} = aF\{x(t)\} + bF\{y(t)\} = aX(j\omega) + bY(j\omega).$$

- pomeranje (translacija) u vremenskom domenu

$$F\{x(t - t_0)\} = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$F\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(y)e^{-j\omega(y+t_0)} dy = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(y)e^{-j\omega y} dy = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- pomeranje (translacija) u domenu učestanosti

$$F\{x(t)e^{-j\omega_0 t}\} = X(j(\omega + \omega_0))$$

$$F\{x(t)e^{-j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = X(j(\omega + \omega_0))$$

# Dodatne osobine *Fourier*-ove transformacije

- širenje (ekspanzija) u domenu učestanosti.2

$$F\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-j\omega y/a} dy / a = \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

- *Fourier*-ova transformacija izvoda.

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$$

- *Fourier*-ova transformacija integrala.

$$F\left\{\int x(t) dt\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$