



# PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA (SI2PMT)

*Elektrotehnički fakultet  
Katedra za telekomunikacije  
Beograd, 2011/2012.*



# **-III-**

# **Linearni sistemi**

# Sistemi za prenos signala

- \* **Sistem** je opšti naziv za entitet sastavljen od međusobno povezanih uređaja, u kome se obavlja transformacija ulaznog signala u signal na izlazu iz sistema.
- \* Ulazni i izlazni signal po pravilu su *funkcije vremena*, mada mogu da budu i funkcije drugih argumenata.
- \* **Podela**
  - **Linearni**
    - Signal na izlazu je linearna transformacija ulaznog signala.
      - homogenost  $f[kx(t)] = kf[x(t)]$ ;
      - aditivnost  $f[x_1(t) + x_2(t)] = f[x_1(t)] + f[x_2(t)]$ .
    - Linearnost dozvoljava da se odziv sistema predstavi kao suma špojedinanih odziva na pobudu pojedinačnim komponentama (sabircima!) pobudnog signala.
  - **Nelinearni**
    - Ne zadovoljavaju gornje uslove.

# Osobine sistema

- \* **Izvor nema memoriju** ako signal u trenutku  $t$  zavisi samo od ulaznog signala u trenutku  $t$  (ne zavisi od prethodnih trenutaka).
- \* **Vremenska invarijantnost**  
$$F[x(t)] = y(t) \rightarrow F[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

Ako je na ulazu u linearan vremenski invarijantan sistem prisutana (kompleksna) pobuda na samo jednoj učestanosti, na izlazu se pojavljuje odziv na istoj toj učestanosti (samo na njioj!)
- \* **Kauzalnost** – odziv u posmatranom trenutku ne zavisi od odziva u prethodnim trenucima, uključujući tu i tekući.
- \* **Stabilnost** – ako konačna pobuda proizvodi konačan odziv.

# Uvod u linearne sisteme – signal pobude

- \* Ako na ulazu sistema za prenos postoji nekakav signal  $x(t)$ , on se naziva **pobuda**.

- Pobuda se može predstaviti kao zbir prostoperiodičnih komponenti.

$$x(t) = \sum_i x_i(t)$$

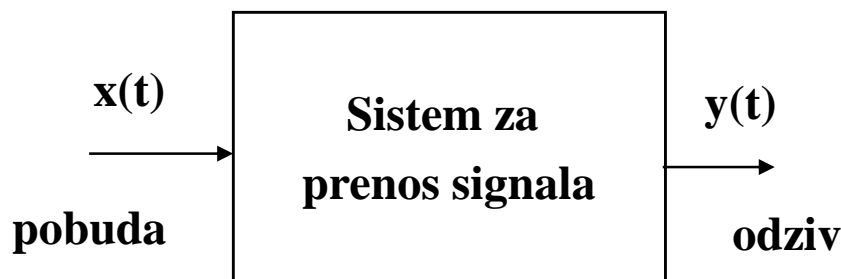
- Svaka prostoperiodična komponenta je oblika

$$x_i(t) = X_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i)$$

- \* Signal  $y(t)$  koji se pojavi na njegovom izlazu je tada **odziv**.

- Odziv se, kao i svaki drugi signal, takođe rastaviti na nekakve prostoperiodične komponente (u opštem slučaju broj ovih komponenti i njihove učestanosti ne moraju biti iste kao kod pobudnog signala).

- \* Sistem za prenos se tada posmatra kao crna kutija (*black box*) koja je **potpuno opisana pobudom i odzivom**.



# Uvod u linearne sisteme – vremenski domen

## \* Za linearne vremenski varijantne sisteme važi:

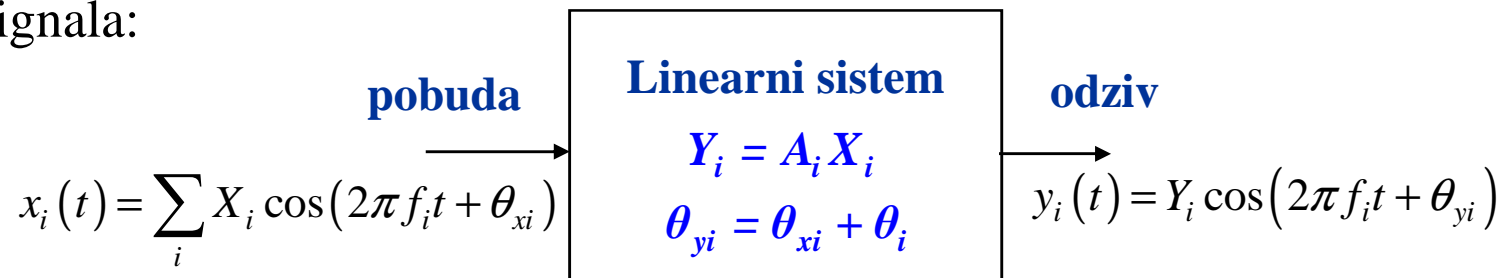
- Ako pobudi  $x(t)$  odgovara odziv  $y(t)$ , tada pojačanoj i zakašnjenjnoj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow Ax(t-t_0) \rightarrow Ay(t-t_0)$$

- Kod linearnih sistema prenosa pobudi prostoperiodičnim signalom na jednoj učestanosti odgovara takođe prostoperiodični signal na istoj učestanosti (u opštem slučaju, sa promenjenom amplitudom i početnim faznim stavom)

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega_i t + \theta_{xi}) \rightarrow y_i(t) = Y_i \cos(\omega_i t + \theta_{yi})$$

- Pošto je pobuda složena, odziv se može napisati kao zbir prostoperiodičnih komponenti koje imaju iste učestanosti kao komponente pobudnog signala:



# Primer linearnog sistema

- \* **Za linearne vremenski varijantne sisteme važi:**

- Ako pobudi  $x(t)$  odgovara odziv  $y(t)$ , tada pojačanoj i zakašnjenj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude

- \* **Primer sa prošlog časa:**

$$x(t)=0.2*\sin(2*\pi*100*t)+\sin(2*\pi*200*t)+0.7*\sin(2*\pi*50*t)$$

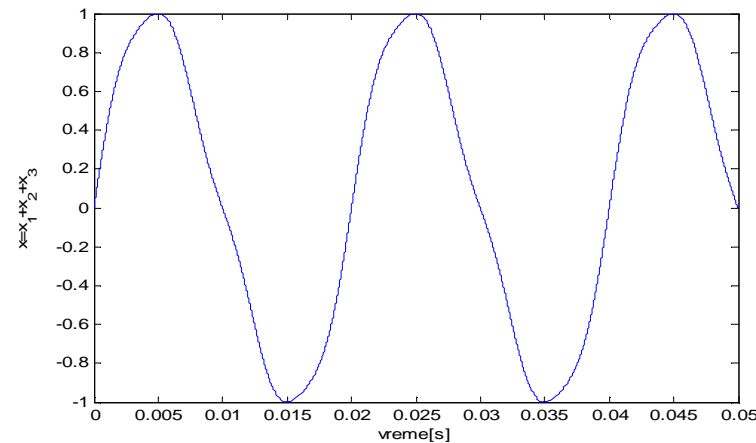
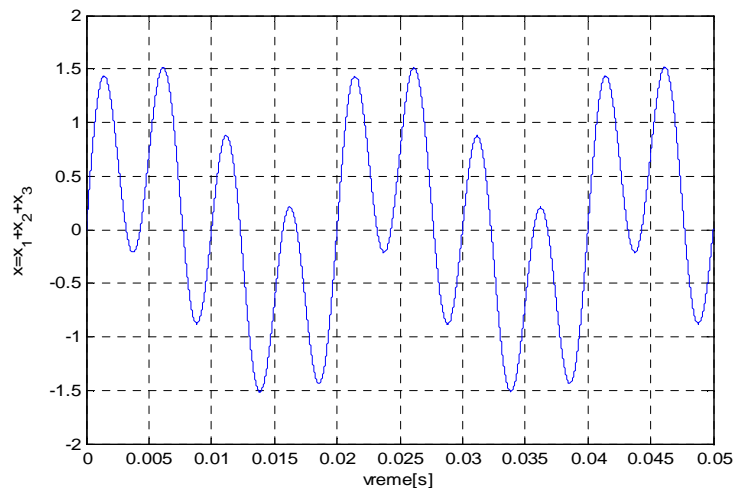
$$y(t)=0.2*\sin(2*\pi*100*t)+0.1*\sin(2*\pi*200*t)+1*\sin(2*\pi*50*t)$$

- \* **Pojaćanje na pojedinim učestanostima**

$A(50\text{Hz})=1/0.7=1.4286$  – pojaćanje komponente na niskim učestanostima

$A(100\text{Hz})=0.2/0.2=1$  – nema promene amplitude/snage na učestanosti 100Hz

$A(200\text{Hz})=0.1/1=0.1$  – amplituda komponente oslabljena 10 puta (snaga 100 puta)



# Zapis pojačanja/slabljenja u decibelima

- \* Ako je pojačanje amplitude  $A$  (apsolutna vrednost), tada je pojačanje snage signala  $A_p=A^2$ , slabljenje je  $1/A$  a slabljenje snage  $1/A^2$  pa je:

- Pojačanje u decibelima:  $a=20\log_{10}(A) [\text{dB}]=10\log_{10}(A_p) [\text{dB}]$
- Slabljenje u decibelima:  $a_t=-20\log_{10}(A) [\text{dB}]=-10\log_{10}(A_p) [\text{dB}]$

- \* Prethodni primer

$$A(50\text{Hz})=1.43, A_p(50\text{Hz})=2.05 \rightarrow a=3.11\text{dB}>0$$

$$A(100\text{Hz})=1, A_p(100\text{Hz})=1 \rightarrow a=0$$

$$A(200\text{Hz})=0.1, A_p(200\text{Hz})=0.01 \rightarrow a=-20\text{dB}<0$$

- \* Kada je pojačanje veće od jedan (signal je zaista pojačan), vrednost u decibelima je veća od nule a kada je pojačanje manje od jedan (signal je oslabljen), vrednost u decibelima je manja od nule. Za slabljenje važi obrnuto pravilo.

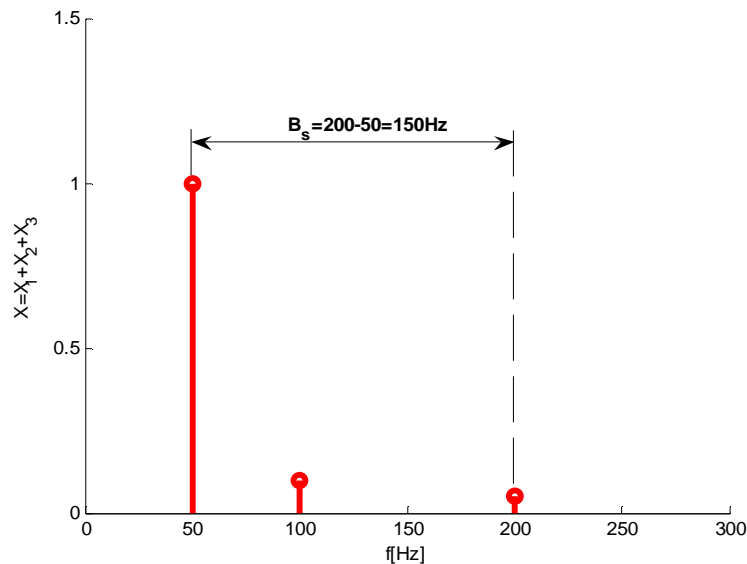
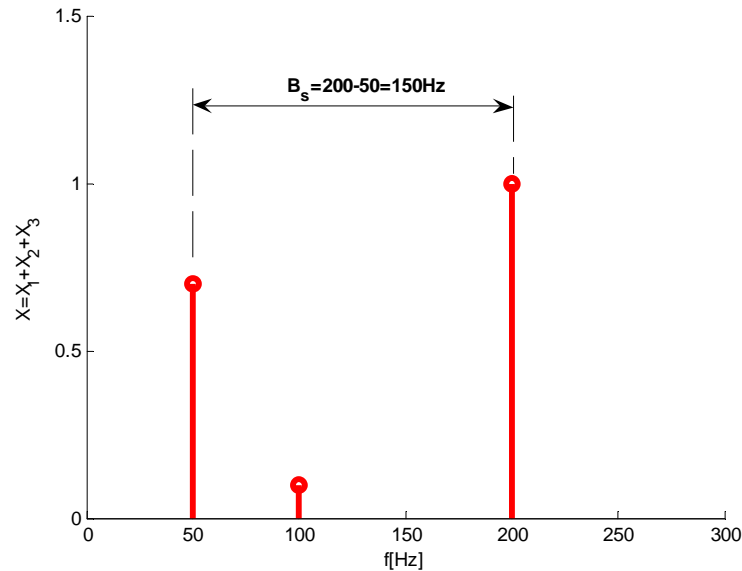
- \* Tipične vrednosti:

- \*  $A_p=2 \Rightarrow a=3\text{dB}$ ,  $A_p=4 (A=2) \Rightarrow a=6\text{dB} (a_t=-6\text{dB})$
- \*  $A_p=.5 \Rightarrow a=-3\text{dB}$ ,  $A_p=.25 (A=0.5) \Rightarrow a=-6\text{dB} (a_t=6\text{dB})$
- \*  $A_p=10 \Rightarrow a=10\text{dB}$ ,  $A_p=100 (A=10) \Rightarrow a=20\text{dB} (a_t=-20\text{dB})$
- \*  $A_p=0.1 \Rightarrow a=-10\text{dB}$ ,  $A_p=0.01 (A=0.1) \Rightarrow a=-20\text{dB} (a_t=20\text{dB})$

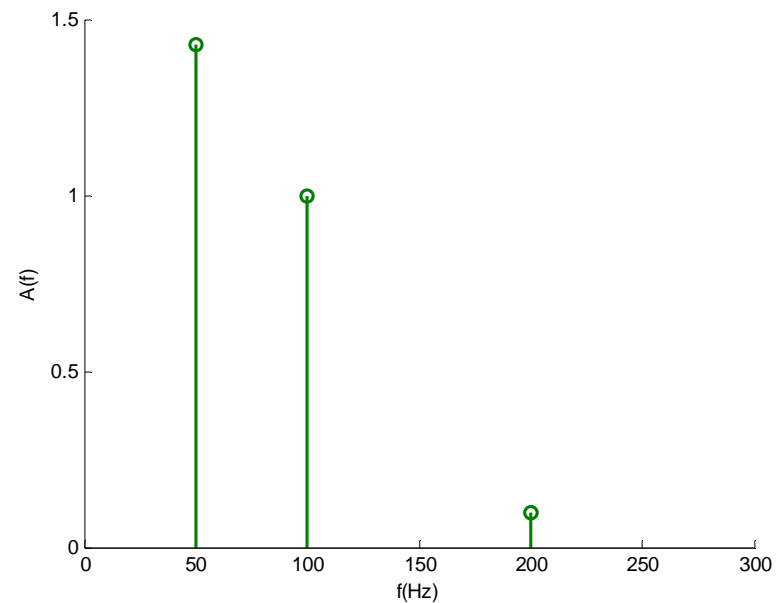
# Uvod u linearne sisteme - spektar

- \* Ako **spektar signala pobude** ima komponente na učestanostima  $f_1, f_2, \dots, f_N$ , tada se komponente u spektru signala odziva mogu pojaviti samo na ovim istim učestanostima!
- \* Za svaku komponentu u spektru (na učestanosti  $f_i$ ) može se odrediti pojačanje i promena faznog stava koje unosi sistem za prenos, da bi se od pobudnog signala dobio signal koji predstavlja odziv.
- \* Unapred se ne zna da li će na ulaz sistema biti doveden periodičan signal (diskretan spektar - komponente na samo nekim učestanostima) ili aperiodičan signal (kontinualan spektar - komponente na svim učestanostima)
- \* Zato treba odrediti pojačanje i promenu faze na bilo kojoj učestanosti  $f$ 
  - \* Pojačanje linearnog sistema na učestanosti  $f$  obeležava se sa  $A(f)$  i definiše kao odnos amplituda komponenata odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj.  $A(f) = Y(f)/X(f)$ .
  - \* Fazni pomeraj koji unosi linearni sistem na učestanosti  $f$  obeležava se sa  $\theta(f)$  i definiše kao odnos amplituda komponenata odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj.  $\theta(f) = \theta_y(f) - \theta_x(f)$ .

# Primer linearnog sistema



- \* Sve ovo se mnogo lakše vidi ako se uporede spektri signala na ulazu i izlazu sistema.
- \* U ovom slučaju nije bilo promene faznog stava pa fazna karakteristika nije ni prikazana.
- \* Ovako se dobija pojačanje sistema na onim učestanostima na kojim postoje komponente signala sa ulaza. Koliko je pojačanje na drugim učestanostima?



# Veza spektara signala na ulazu i izlazu linearnog sistema

## \* Periodični signali:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn(2\pi f_0)t} \rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nf_0) e^{\theta(nf_0)} X_n e^{jn(2\pi f_0)t}$$

$$Y_n = A(nf_0) e^{\theta(nf_0)} X_n$$

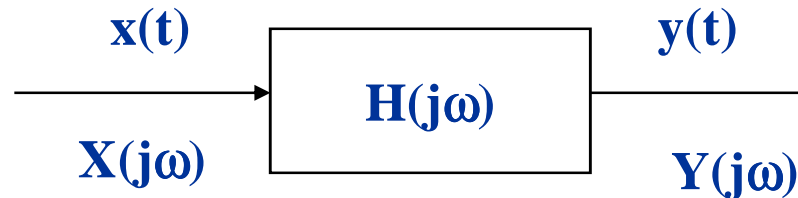
## \* Aperiodični signali:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) e^{jft} df \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf) e^{jft} df$$

$$Y(jf) = A(f) e^{\theta(f)} X(jf)$$

# Prenosna funkcija linearnog sistema

- \* Oblik spektra:



- \* Ako se **prenosna funkcija** linearnog sistema označi sa  $H(jf)$ , tada se može pisati izraz:

$$Y(jf) = H(jf)X(jf)$$

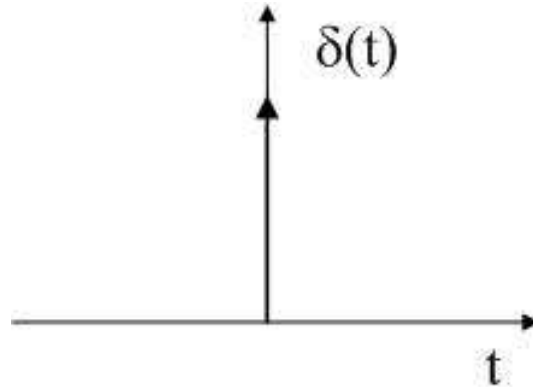
- \* Prenosna funkcija sistema može se rastaviti na amplitudsku i faznu karakteristiku ( $A(f)$  određuje pojačanje a  $\theta(f)$  promenu faze pobudne komponente na proizvoljnoj učestanosti  $f$ )

$$H(jf) = A(f)e^{j\theta(f)}$$

- \* Prenosna funkcija je isključivo karakteristika sistema za prenos i ni na koji način ne zavisi od pobude ili odziva!
  - Ipak, ona se ne može odrediti ako na ulazu nemamo nikakvu pobudu!
  - Kakva pobuda je optimalna (poželjno da to bude aperiodičan signal)?

# Delta impuls

- \* Impuls izuzetno kratkog trajanja i teorijski beskonačno velike amplitude, ali tako da njegova površina ima jediničnu vrednost.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- \* Furijeova transformacija funkcije  $\delta(t)$  jednaka je konstanti, koja pritom ima jediničnu vrednost.
- \* Zato je spektar Delta impulsa (aperiodičan signal) kontinualan i definisan na svim učestanostima.
  - \* Pritom je amplitudski spektar jednak jedinici a na svakoj učestanosti je početni fazni stav jednak nuli.
  - \* Spektar Delta impulsa je kontinualan, ravan i beskonačno širok!

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

# Impulsni odziv linearnog sistema

- \* **Impulsni odziv** predstavlja odziv sistema na pobudu delta impulsom:



- \* Spektar signala na izlazu je tada jednak prenosnoj funkciji:

$$Y(jf) = X(jf)H(jf) = \Delta(jf)H(jf) = H(jf)$$

- Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls a na izlaz priključi spektralni analizator, na njemu možemo očitati prenosnu funkciju sistema.
  - Sličan rezultat se dobija ako se na ulaz dovede pravougaoni impuls kratkog trajanja.
- \* Izraz za impulsni odziv zavisi samo od prenosne funkcije:
  - Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls a na izlaz priključi osciloskop (jednostavniji uređaj!), na njemu možemo očitati impulsni odziv sistema.
  - Furijeovom transformacijom impulsnog odziva može se dobiti  $H(jf)$  i obrnuto:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H(jf) e^{jft} df$$

## Kako opisati signal na izlazu?

\* **Spektar signala na izlazu** sistema za prenos jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije

- Da bi ga odredili treba poznavati spektar signala na ulazu (karakteristika signala koji se prenosi) i prenosnu funkciju (karakteristika sistema za prenos).

$$Y(jf) = X(jf)H(jf)$$

\* **Signal na izlazu sistema** za prenos jednak je konvoluciji ulaznog signala i impulsnog odziva

- Da bi odredili vremenski oblik izlaznog signala treba poznavati vremenski oblik ulaznog signala koji treba preneti i impulsni odziv sistema (karakteristika sistema za prenos).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

# Idealan sistem za prenos (vremenski domen)

- \* Signal sa ulaza ne sme biti izobličen, tj. u veoma sličnom obliku treba da se pojavi na izlazu:
  - Amplituda mu je promenjena (pojačanje ne mora biti jedinično, dovoljno je da je konstantno tj. isto na svakoj učestanosti);
  - Zakašnjen je u vremenu (kašnjenje ne mora biti nula, tj. odziv se ne mora pojaviti u istom trenutku kada i pobuda).



$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

# Idealan sistem za prenos (frekvencijski domen)

\* Spektar signala na izlazu je tada

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(\tau)e^{-j\omega(t_0+\tau)} d\tau \\ &= Ae^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = Ae^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}$$

\* Prenosna funkcija idealnog sistema:

- Pojaćanje je konstantno na svim učestanostima;
- Fazna karakteristika je linearna funkcija učestanosti.
- Konstanta  $t_0$  koja određuje nagib krive fazne karakteristike naziva se **grupno kašnjenje**!

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Ae^{-j\omega t_0}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A = \text{const.} \\ \theta(\omega) &= -\omega t_0 \pm n\pi \end{aligned}$$

# Idealan sistem za prenos - primer

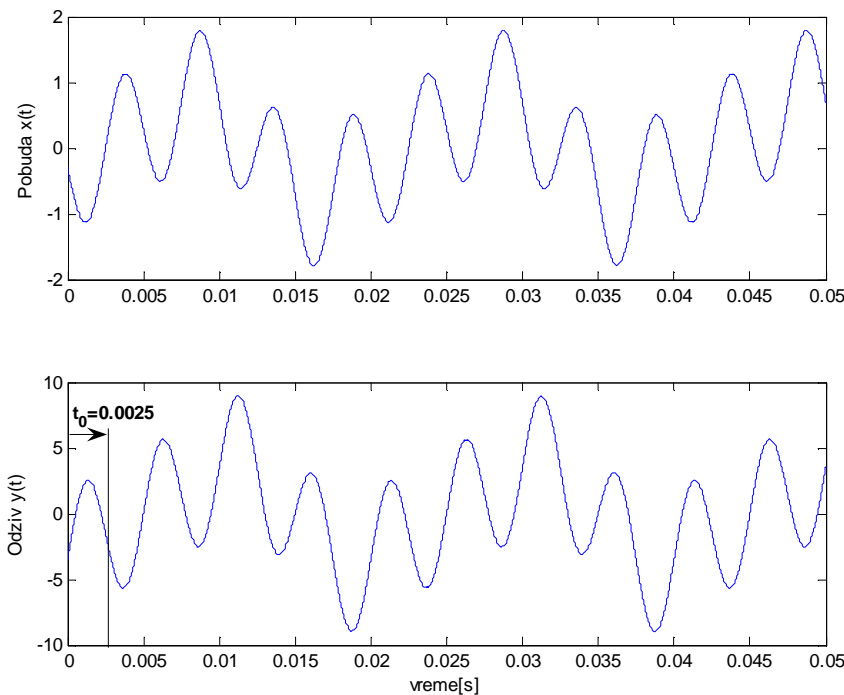
## \* Primer sa prošlog časa:

$$x(t) = 0.2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t) + 0.7 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$y(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t - \pi/2) + 5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t - \pi) + 3.5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t - \pi/4)$$

## \* Pojačanje na pojedinim učestanostima

- amplituda svake komponente pojačana 5 puta -  $A(50\text{Hz}) = A(100\text{Hz}) = A(200\text{Hz}) = 5$
- fazni stav svake komponente smanjuje se za  $\pi/4 \cdot (f[\text{Hz}]/50) = 2\pi \cdot f[\text{Hz}] / 400$  pa je grupno kašnjenje u ovom slučaju  $t_0 = 1/400 = 0.0025\text{s}$ .

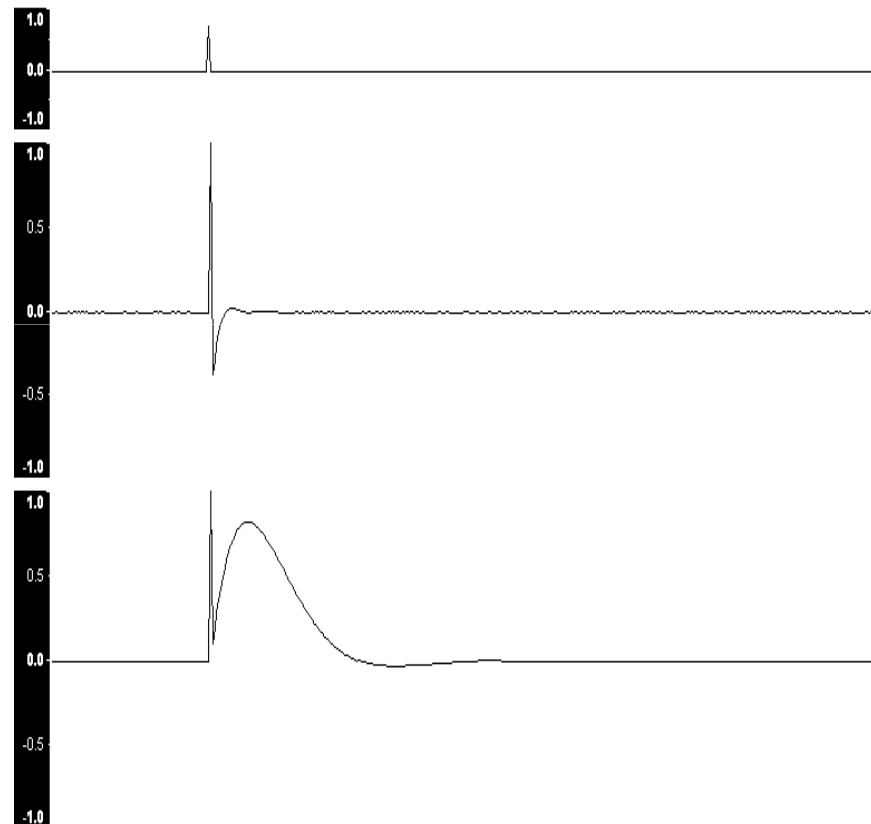


# Realan sistem za prenos

## \* Da bi sistem za prenos bio idealan:

- **Amplitudska karakteristika funkcije prenosa mora biti ravna na svim učestanostima** (ovo dovodi do iste promene amplitude svih spektralnih komponenti signala koji se prenosi!).
- **Fazna karakteristika funkcije prenosa mora biti linearna na svim učestanostima** (što dovodi samo do kašnjenja signala na izlazu sistema u poređenju sa onim na ulazu!).
- Kada se na ulazu pojavi Delta impuls, na izlazu bi trebalo da se pojavi pojačan/oslabljen i zakašnjen za  $t_0$  (ali ne i razliven) Delta impuls.

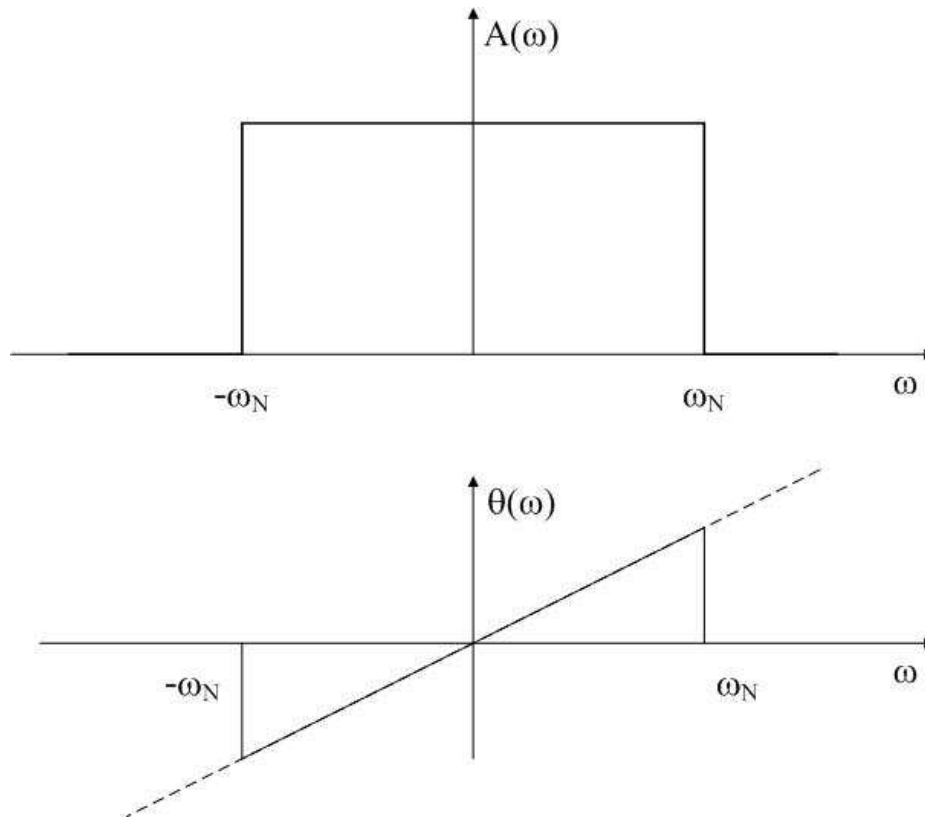
## ● Realan sistem (pobuda i impulsni odziv tipičnog audio sistema):



# Filtar propusnik niskih učestanosti (NF filter)

\* **NF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi iznad granične učestanosti  $f_N$  (tj. kružne granične učestanosti  $\omega_N = 2\pi f_N$ )

- Naziva se i LP filter (*low pass filter*).
- Kada  $\omega_N \rightarrow \infty$ , filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| \leq \omega_N$$
$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_N$$

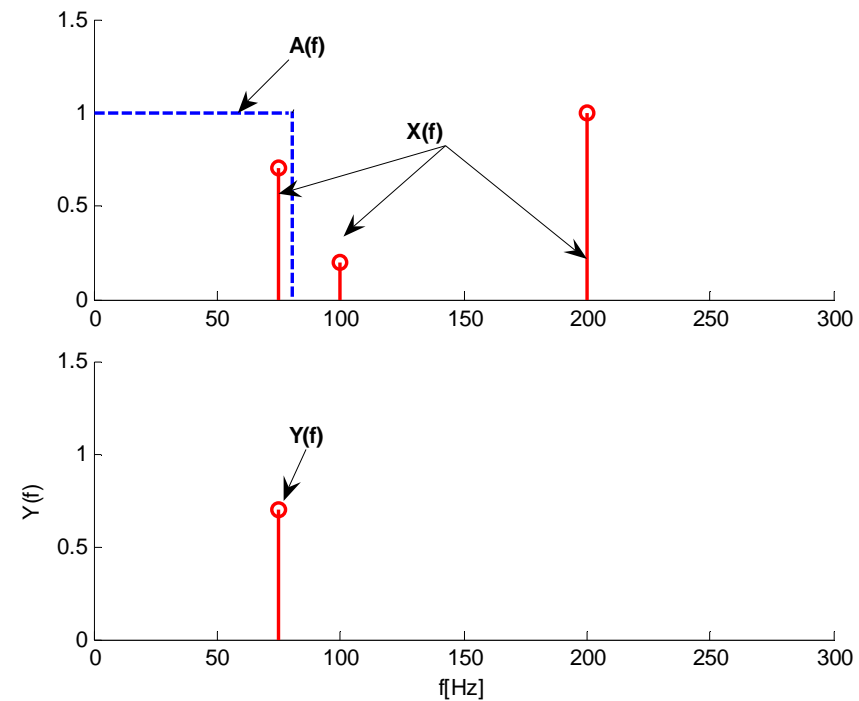
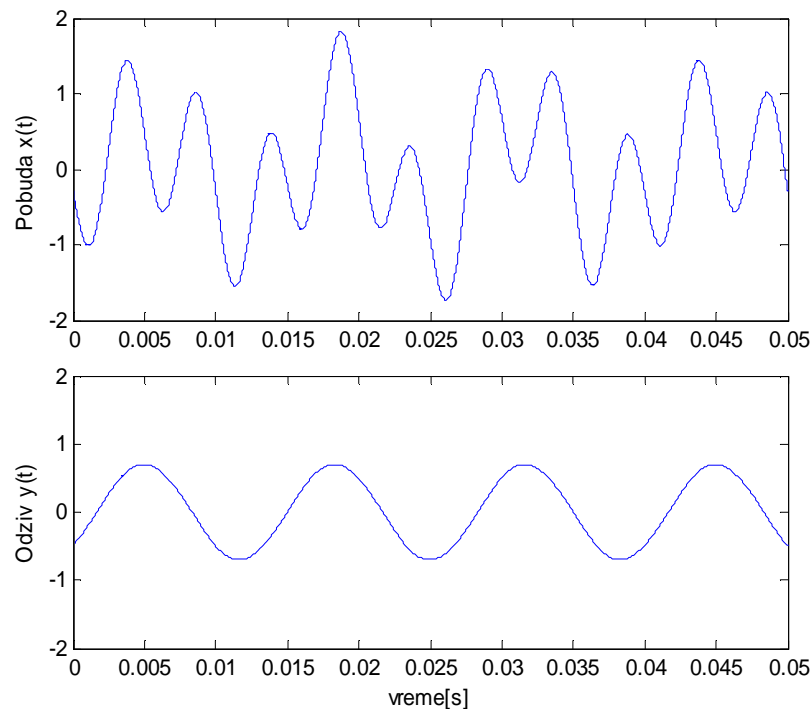
# Idealni NF filter – primer 1

## \* Primer sa prošlog časa

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

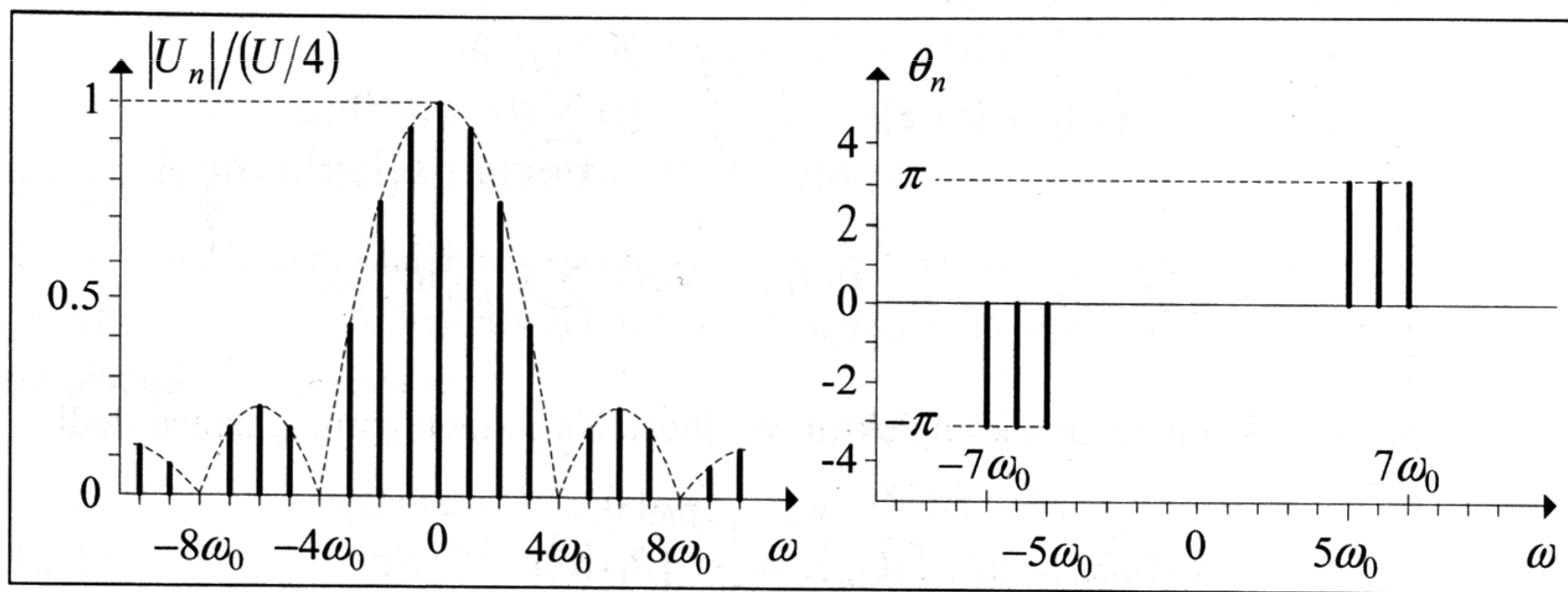
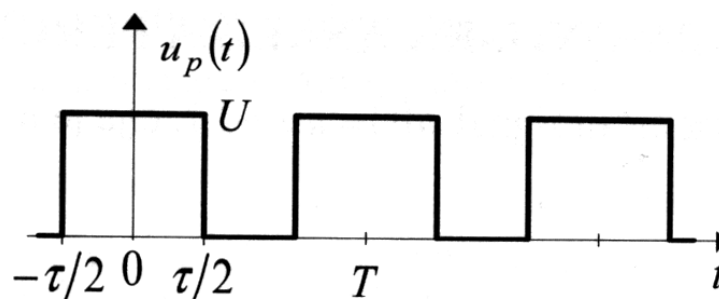
## \* Signal se filtrira kroz NF filter granične učestanosti 80Hz (pojaćanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$ ).

- Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 0.7 na učestanosti 75Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).



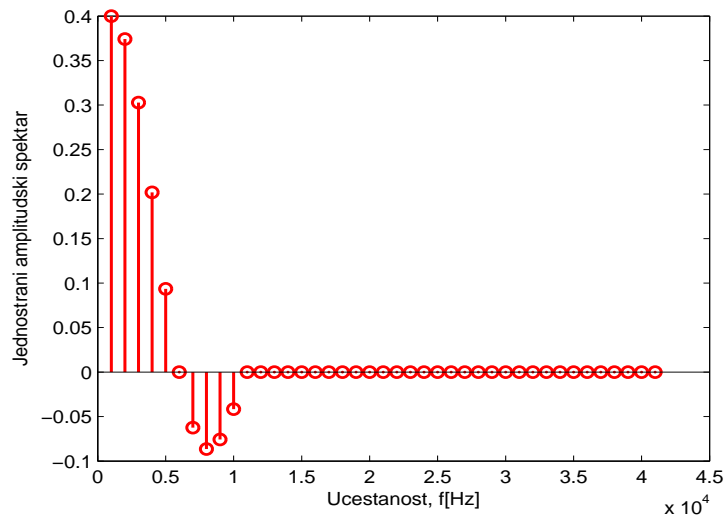
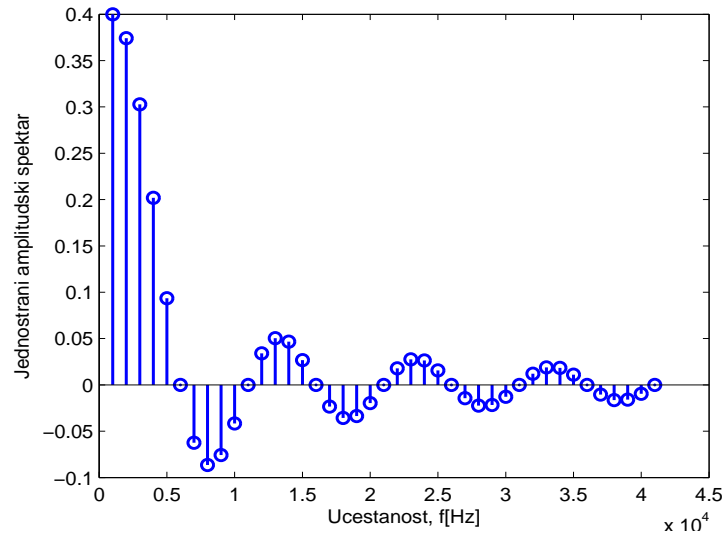
## Idealni NF filter – primer 2

\* Pobudni signal je **periodična povorka impulsa**:

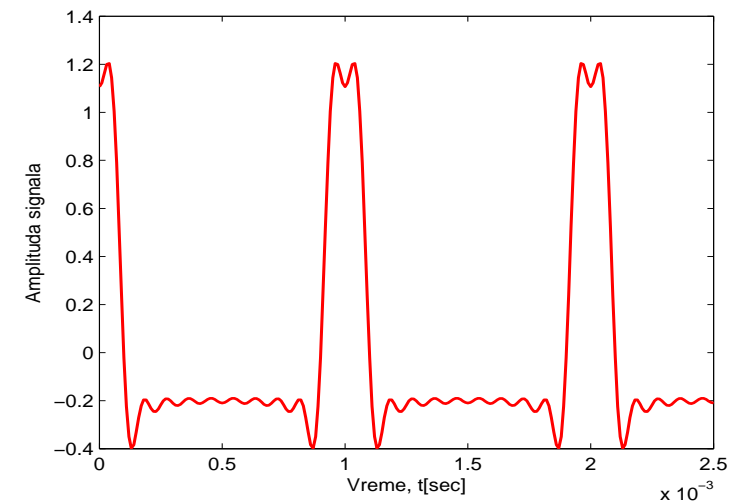
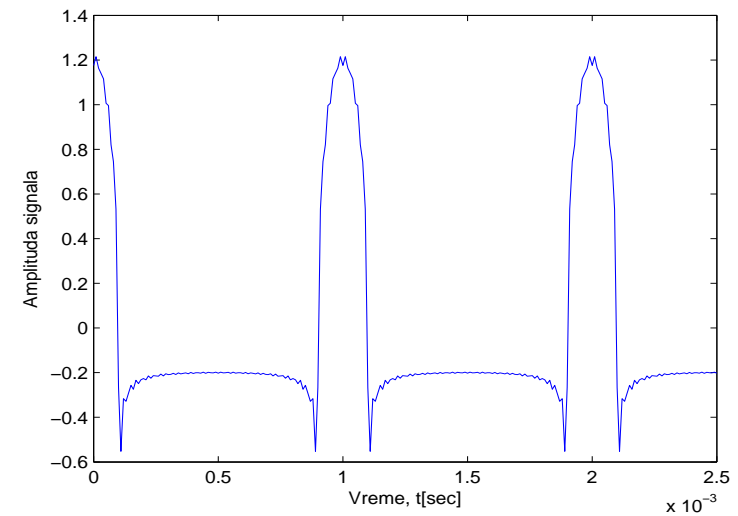


# Idealni NF filter – primer 2

## \* Spektar:



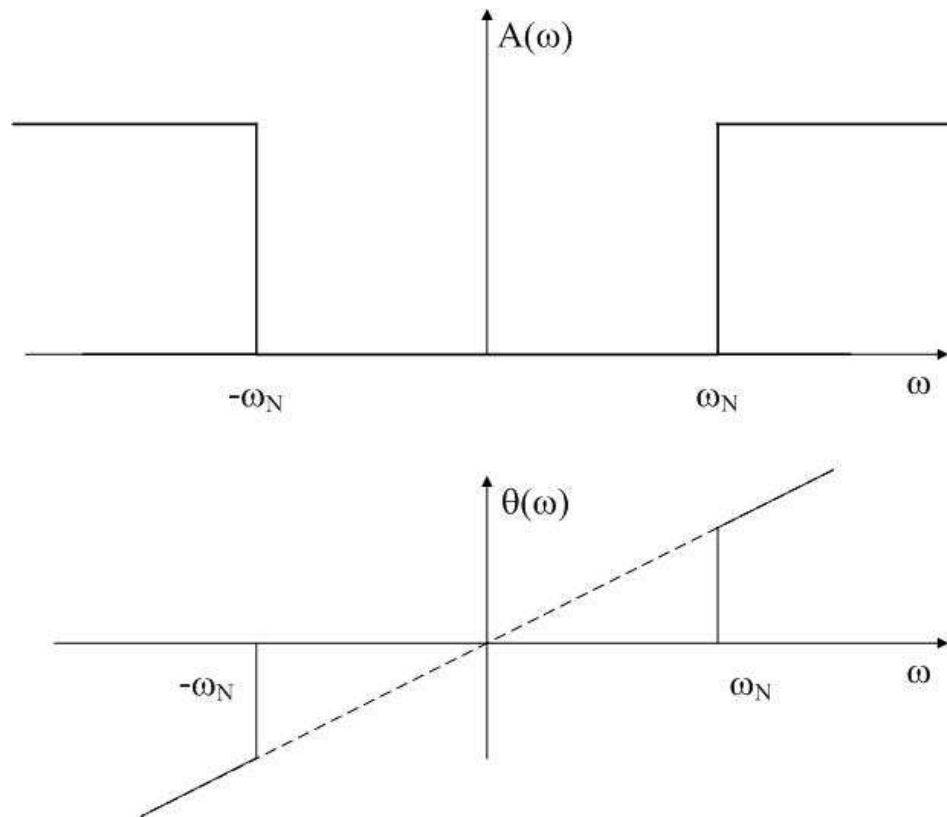
## • Vreme:



# Filtar propusnik visokih učestanosti (VF filter)

\* **VF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi ispod granične učestanosti  $f_N$  (tj. kružne granične učestanosti  $\omega_N = 2\pi f_N$ )

- Naziva se i HP (*high pass filter*).
- Kada  $\omega_N = 0$ , filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_N$$
$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad |\omega| > \omega_N$$

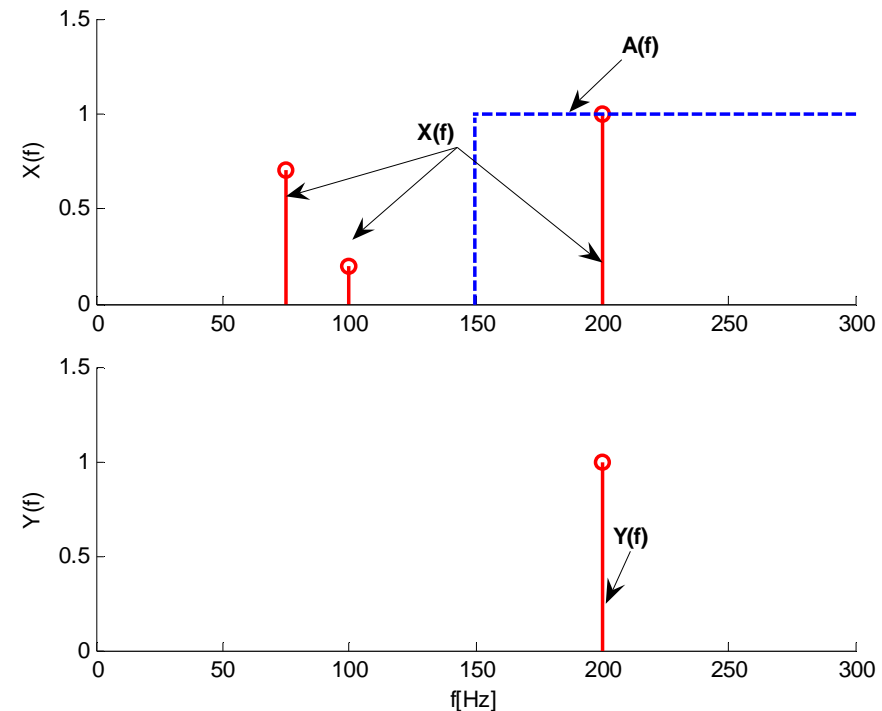
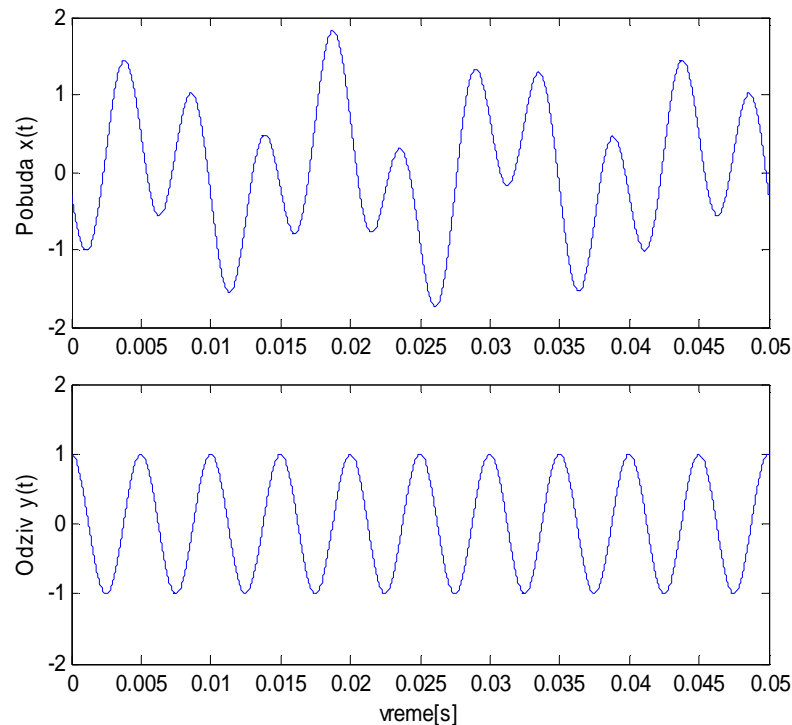
# Idealni VF filter – primer 1

## \* Primer sa prošlog časa

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

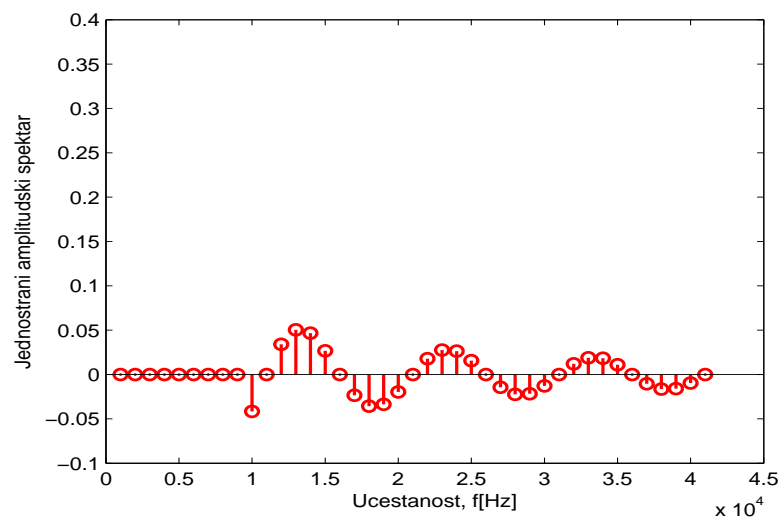
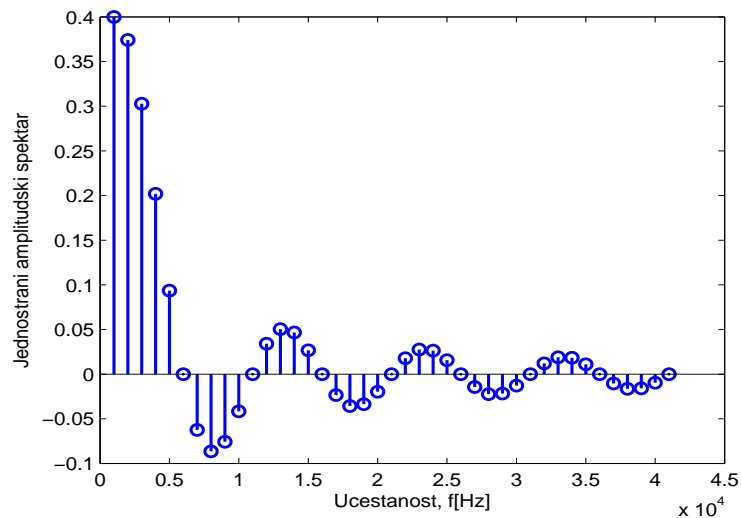
## \* Signal se filtrira kroz VF filter granične učestanosti 150Hz (pojaćanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$ ).

- Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 1 na učestanosti 200Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).

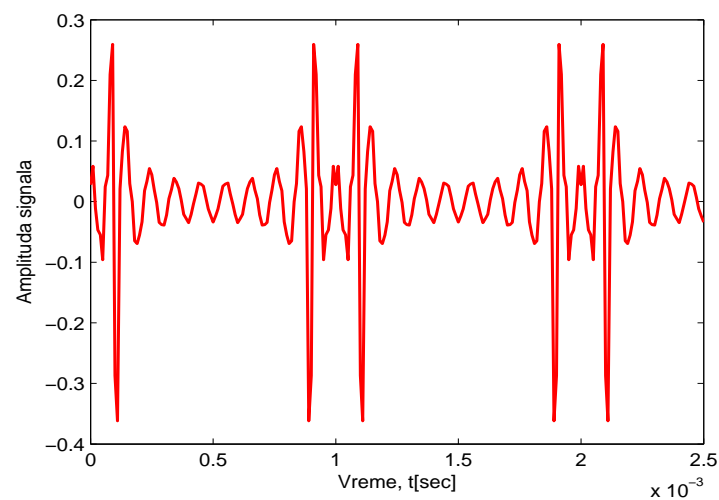
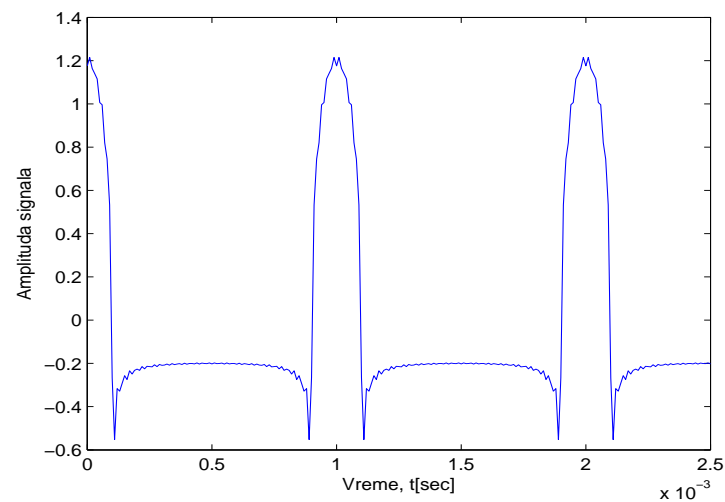


# Idealni VF filter – primer 2

## • Spektar



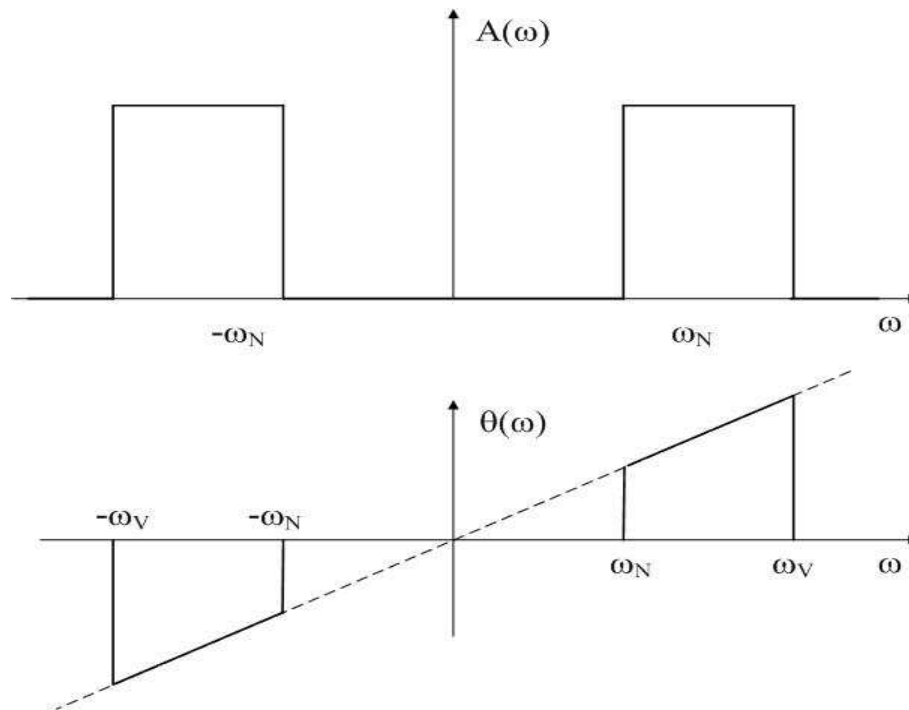
## • Vreme



# Filtar propusnik opsega učestanosti

\* **Filtar propusnik opsega učestanosti** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi između graničnih učestanosti  $f_N$  i  $f_V$  (tj. kružnih graničnih učestanosti  $\omega_N = 2\pi f_N$  i  $\omega_V = 2\pi f_V$ ).

- Naziva se i BP (*band pass filter*).
- Kada  $\omega_N = 0$  a  $\omega_V \rightarrow \infty$ , filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_N$$

$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad \omega_N < |\omega| \leq \omega_V$$

$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_V$$

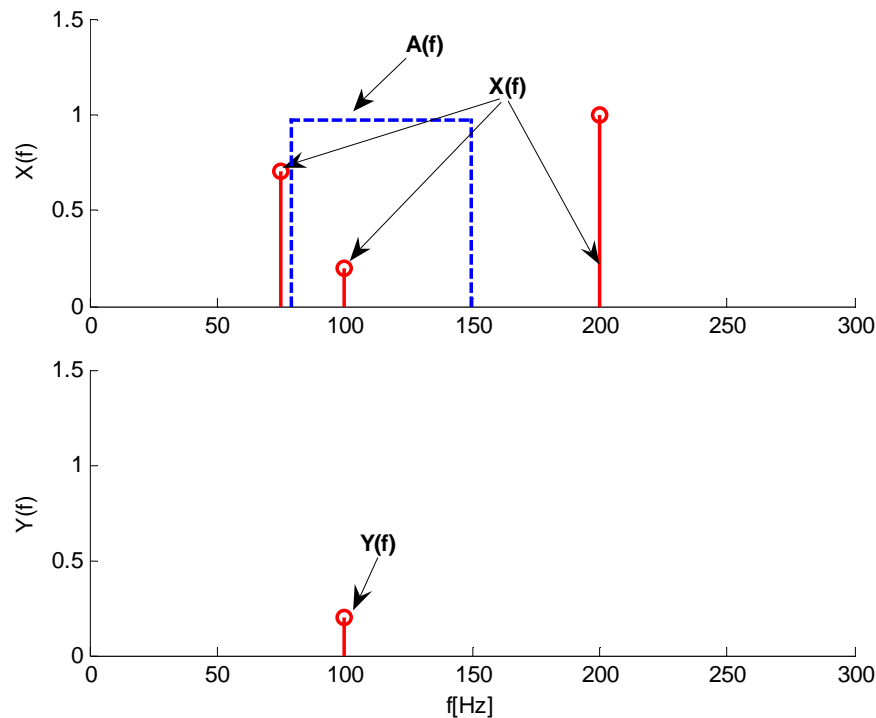
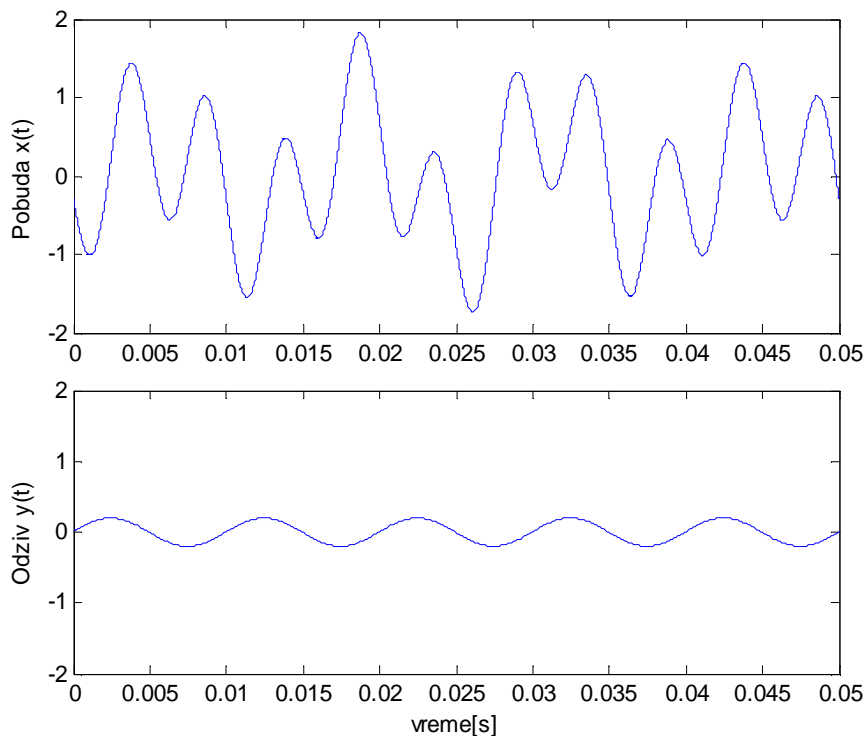
# Idealni filter propusnik opsega – primer

## \* Primer sa prošlog časa

$$x(t)=0.2*\cos(2\pi*100t)+\cos(2\pi*200t+\pi/2)+0.7*\cos(2\pi*75t+5\pi/4)$$

## \* Signal se filtrira kroz filter propusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojaćanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$ ).

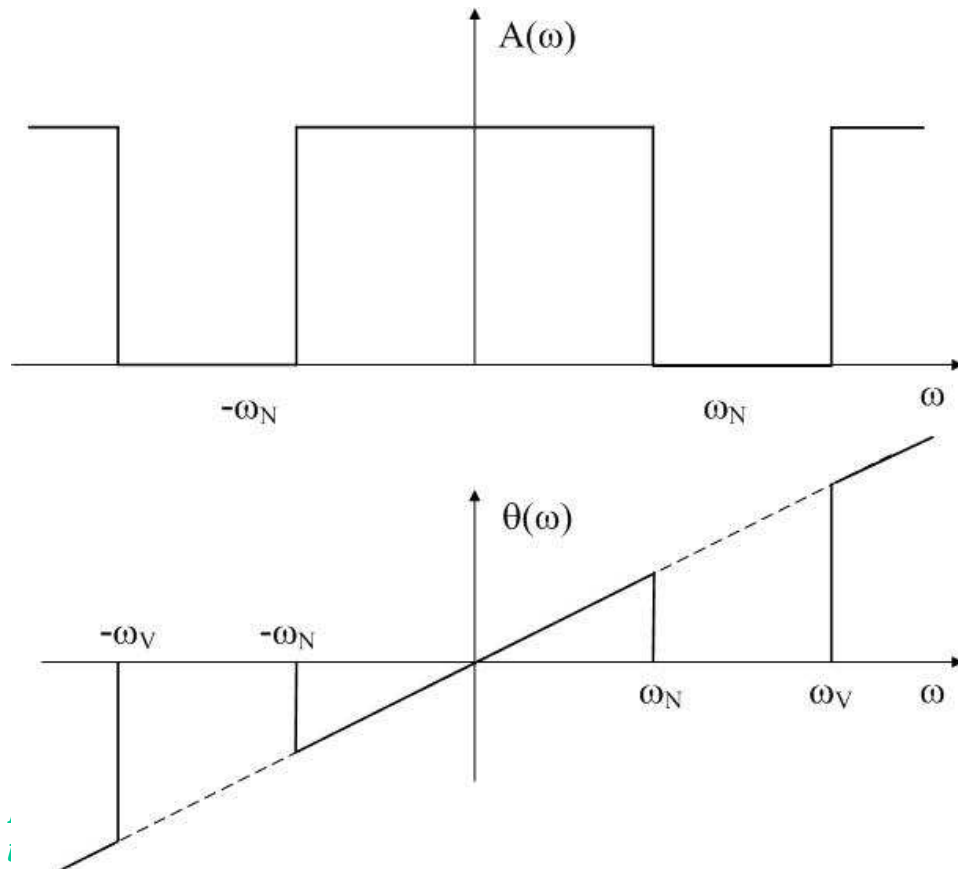
- Na izlazu filtra pojavljuje se komponenta amplitude 0.2 na 100Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).



# Filtar nepropusnik opsega učestanosti

\* **Filtar nepropusnik opsega učestanosti** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi u opsezima  $(0, f_N)$  i  $(f_V, \infty)$  tj. kružnih graničnih učestanosti  $(0, \omega_N)$  i  $(\omega_V, \infty)$ .

- Naziva se i NP(*noch pass filter*).
- Kada  $\omega_N = \omega_V$ , filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| \leq \omega_N$$

$$H(j\omega) = Ae^{-j\omega t_0}, \quad \omega_N < |\omega| \leq \omega_V$$

$$H(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_V$$

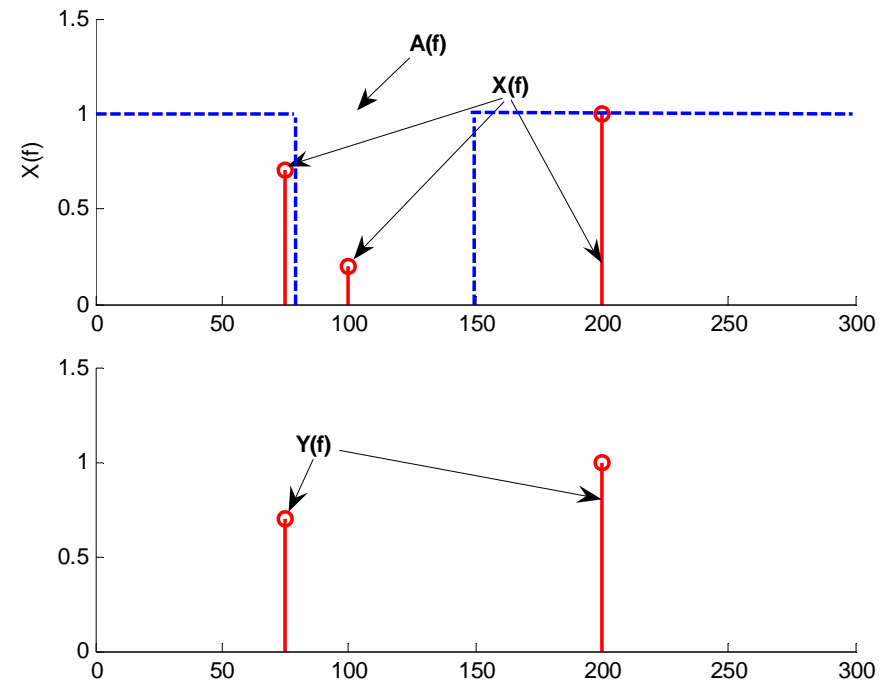
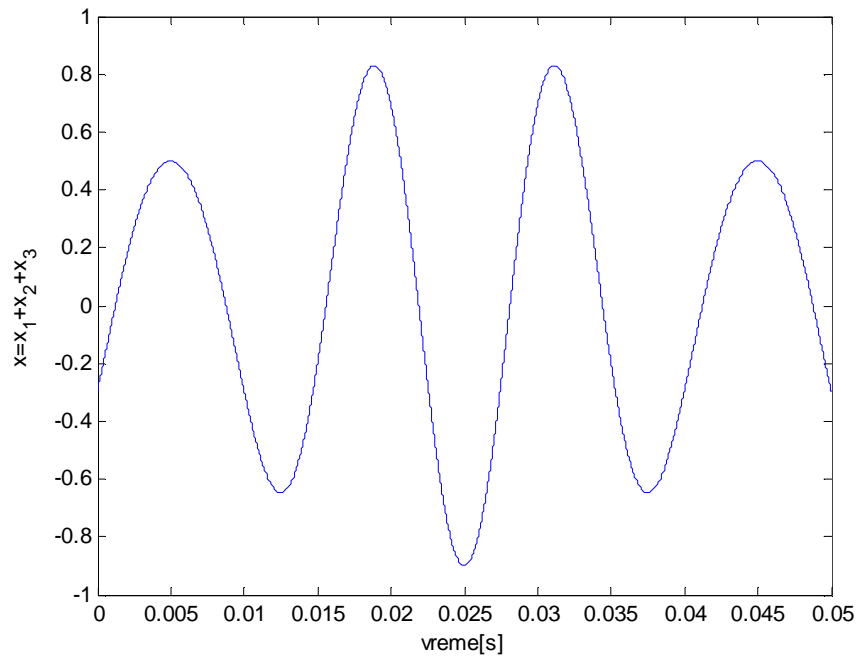
# Idealni filter nepropusnik opsega – primer

## \* Primer sa prošlog časa

$$x(t)=0.2*\cos(2\pi*100t)+\cos(2\pi*200t+\pi/2)+0.7*\cos(2\pi*75t+5\pi/4)$$

## \* Signal se filtrira kroz filter nepropusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojaćanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$ ).

- Na izlazu filtra pojavljuju se dve komponente na učestanostima 75Hz i 200Hz (komponenta na učestanosti 100Hz nije unutar propusnog opsega filtra).



# Ekvilajzeri – primer (Winamp)

- \* Cilj pojačati niske tonove a potisnuti visoke komponente u spektru (NF filter).
- \* Svaki ekvilajzer zadužen za deo opsega (oko 60Hz, 170Hz, 310Hz, 600Hz, 1kHz,...).
- U gornjem desnom uglu (desni klik na displej) izabrati *Oscilloscope* – na displeju je prikazan vremenski oblik signala, što su niži tonovi više pojačani, signal je više zaobljen.
- U gornjem desnom uglu (desni klik na displej) izabrati *Spectrum analyzer* – na displeju je prikazan spektar signala –jasno se vidi efekat filtriranja audio signala.



# Linearni sistemi - pregled

## \*Najvažnije osobine:

- Odziv bilo kog sistema na Delta impuls je njegov impulsni odziv!
- Furijeova transformacija impulsnog odziva je prenosna funkcija posmatranog sistema.
  - **Spektar signala** na izlazu sistema jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije sistema.
  - **Signal (njegov vremenski oblik)** na izlazu dobija se kao konvolucija signala na ulazu i impulsnog odziva sistema.
- Filtar propušta samo neke komponente spektra signala na njegovom ulazu (dok ostale “odseca”):
  - **NF filtar** – propušta niske učestanosti;
  - **VF filtar** – propušta visoke učestanosti;
  - **Propusnik opsega** – propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;
  - **Nepropusnik opsega** – ne propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti;