

увод

Ω - скуп исхода

$A, B, C \subset \Omega$ - догађаји

$\emptyset \subset \Omega$ - ништа догађај
сигуран догађај

$A \cup B$ A или B - ако се реализује Γ исход у A или B онда је и уједиња реализована

$A \cap B$ AB - " A и B "

$A \setminus B$ " A , али не B "

$AB = \emptyset$ A и B су неједноставно искључиви

A - сигурни догађај

$A \subset B$ сваки из A је у B " $A \Rightarrow B$ "

[1.] Наведити се дајуће догађаје исхода не издрже из
уједиња заредом. Реализује се из мерења пулса.

Описати скуп свих исхода Ω и догађаје:

A - у 4 сажаву Γ

B - у 1 сажаву Π

C - број n вата је од броја n

D - n је двојка з сајма

E - у 1 сажаву Π и Π је двојка з сајма

F - у 1 сажаву Π или у 4 Γ

- Наћи E и F преко A, B, C, D

$\Omega = \{PP, GPP, PGPP, GPGR, \dots, GG, PGG, GPGG, PGPGGG, \dots\}$

$A = \{PGPGPP, PGPGPPGP, PGPGPPGP, \dots, GPGG, PGPGGG, PGPGGG, \dots\}$

$B = \{PP, PGG, PGPG, \dots\}$

$$C = \{ \underbrace{GG}_{2 \text{ из } 3}, \underbrace{PGG}_{2 \text{ из } 3}, \dots \}$$

$$D = \{ PGPP, GP GPP, PGPGPG, GP GPGPG \}$$

$$E = BD$$

$$F = A \cup B$$

Аксиоме

$$1) P(\Omega) = 1$$

$$2) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$3) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

ако су $A_1, A_2, \dots$ (којима није предвиђено ништа)
међу собом искључиве

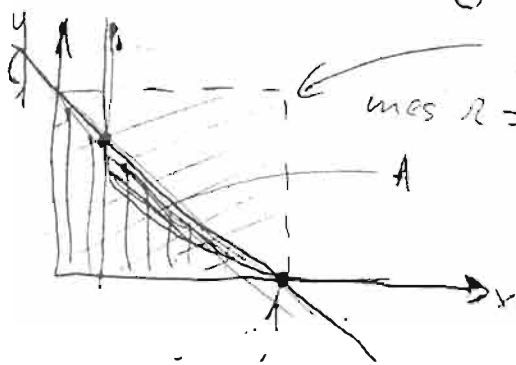
Теорема класичне вероватноће:

$$P(A) = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } \Omega}$$

[2] На случајан начин бирају се 2 броја из интервала $[0, 1]$. Колика је вероватноћа да је збир већи од 1 а производ већи од $\frac{2}{9}$?

$$x \in [0, 1]$$

$$y \in [0, 1]$$



Скуп свих могућих исхода

$$\text{mes } \Omega = 1$$

$$A: \begin{cases} x + y < 1 \\ xy > \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$y = 1 - x$$

$$x(1-x) = \frac{2}{9}$$

$$x - x^2 - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$$

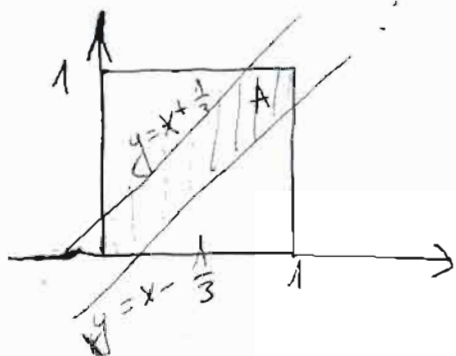
$$y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{mes}(A) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left((1-x) - \frac{2}{3x} \right) dx$$

$$\text{mes}(A) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \ln 2$$

Две особе треба да се нађу између 9 и 10 на неком месту. Договор је да свака особа дође у случајно време између 9 и 10, чека 20 мин и одлази ако се друга особа не појави. Наћи вероватноћу да ће се две особе срећи

x - време доласка прве особе - $y \in [0, 1)$
 y - време доласка друге особе - $y \in [0, 1)$



$$|x - y| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x - y < \frac{1}{3}$$

$$y < x + \frac{1}{3}$$

$$y > x - \frac{1}{3}$$

$$\text{mes}(\Omega) = 1$$

$$\text{mes } A = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$$

Једнако вероватноћи исхода

14. У кутији су 5 белих, 3 црне и 2 плаве кугле. На случајан начин бирају се две: 1 - са вратима, 2 - без врата

Наћи вероватноћу да је 1 кугла бела и друга црна

$$1) |\Omega| = 10 \cdot 10 = 100$$

$$|A| = 5 \cdot 3 = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{100} \leftarrow \text{број поволајних}$$

$$\frac{15}{100} \leftarrow \text{број свих исхода}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} |\Omega| = 10 \cdot 9 = 90 \\ |A| = 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right\} P(A) = \frac{15}{90}$$

5. Штета је вероватноћа, да а у 4 бацава 1 коцка
бар једном појави 6 и да е у 24 бацава са 2
коцкице бар једном појави 2 шестиче.

A - бар једна 6
A' - нема 6

$$|\Omega| = 6^4 \quad |A'| = 5^4$$

$$P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

B - бар 2 шестиче

$$|\Omega| = 36^{24} \quad |B'| = 35^{24}$$

$$P(B') = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$P(A) > P(B)$$

6. Из шипа од 52 карте се на случајан начин бирају 4
1) са вратама
2) без вратава

Колика је вероватноћа да су све 4 различне боје?

$$1) P(A) = \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52^4}$$

$$2) P(A) = \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \leftarrow \text{варијације}$$

од којих барем 4 карте: 40 комбинација $\binom{4}{1}$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{13^4 \cdot 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \leftarrow \text{комбинације}$$

10. Произвођа спреда замишљају у 4 кутије. Како
вероватноћа да ће мање 2 кутије бити празне

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot (2^{10} - 2)}{4^{10}}$$

$$\underbrace{\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_2 \quad \underbrace{\quad}_3 \quad \underbrace{\quad}_4$$

? 2 кака су сва у 1 или два у другој кутији

18) Из кутије са n белих и m црних кутија извлаче
се по случајном начину k кутија ($k \leq m+n$)

а) Кака вероватноћа да се у k извлечених кутија
налази r белих

б) Кака суму $\sum_{r=0}^k \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} = S$

а) $P(A_r) = \frac{\binom{n}{r} \binom{m}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$

б) $\frac{S}{\binom{m+n}{k}} = \sum_{r=0}^k \frac{\binom{n}{r} \binom{m}{k-r}}{\binom{m+n}{k}} = \sum_{r=0}^k P(A_r) =$

$= P(A_0 \cup \dots \cup A_k) = P(\Omega) = 1$

$S = \binom{m+n}{k}$

1. Доказати

$$1) \binom{n}{c} = \binom{n}{n-c}$$

или, $k + (n-k) = n$

$$2) \binom{n+1}{c} = \binom{n}{c} + \binom{n}{c-1}$$

2) $n+1$ е. - бирамо k или фиксирамо 1 е., од преостанутих бирамо c : $\binom{n}{c}$
+ бирамо 1 е. - бирамо $c-1$ е. - бирамо $c-1$ е. од преостанутих $c-1$: $\binom{n}{c-1}$

Условна вероватноћа, независност, формула опште вер.,
Бајесова формула

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

- Ако реал. догађај A не зависи од реал. B $P(A|B) = P(A)$

$$\Rightarrow \underbrace{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}_{\text{независност}}$$

2. Из шипа од 32 карте а. на случајан начин бирамо 1 карту.
Нека је догађај A да је изабран $\spadesuit$, а догађај B да је изабран $\heartsuit$. Да ли су оба догађаја независна?

$$P(AB) = \frac{1}{32}$$

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

3. Из шипа од 32 карте а. на случајан начин бирамо 2 карте.
1) са враћањем 2) без враћања

A - изабран бар један $\spadesuit$
 B - изабран бар један $\heartsuit$

Да ли су оба догађаја независна.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\text{немає } A) = 1 - \frac{28^2}{32^2} = \frac{15}{64}$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{24^2}{32^2} = \frac{7}{16}$$

7 (доп. 1 А и доп. 1 С) = має А и має С

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(\overbrace{A^c B^c}^{\text{немає } A \text{ и } C}) = 1 - \frac{21^2}{32^2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{105}{64}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \checkmark$$

$$2) P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{28 \cdot 21}{32 \cdot 31} = \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \dots P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$A_1, \dots, A_n$ су незав. від паровина ако $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ за все $i, j \in \{1, \dots, n\}, j > i$. $A_1, \dots, A_n$ су незав. у групі ако за будь-якої підгрупи $\{k=2, \dots, n\}$

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} \text{ мають } P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

нез. у групі $\Rightarrow$ нез. від паровина

3. Багатою се 2 ходові приєднання коучує и редукції горафай. А - на I коучує 4, В - на I коучує 6 С - збір горафайх др. ф.

Уважати всі є незав. др. А, В и С.

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$C = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\} \quad P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(\{46\}) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A \text{ и } B \text{ су нез.}$$

$$P(A \cap C) = P(\{43\}) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(C) \Rightarrow A \text{ и } C \text{ су нез.}$$

$$P(B \cap C) = P(\{1, 6\}) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(C) \Rightarrow B \text{ и } C \text{ су незав.}$$

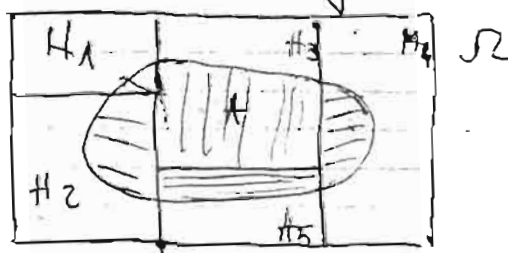
$\Rightarrow A, B$ и C су независни по паровима.
 Да ли A, B и C су и независни у групи према
 претпоставци још и. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

$$0 \neq \frac{1}{216}$$

Формула опште вероватноће

A - догађај, $H_1, \dots, H_n$ - догађаји који чине општу окупност
 $(A \subset H_1 \cup \dots \cup H_n (= \Omega))$: могуће исходе.

$$P(A) = P(A|H_1) + P(A|H_2) + \dots + P(A|H_n)$$



$$A = A|H_1 \cup A|H_2 \cup \dots$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

Бајесова формула $P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \begin{cases} P(A) \neq 0 \\ \end{cases}$

$$= \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A|H_j)}$$

4. Сипреци A, B и C сагају по једанпут у чиб независно
 један од другог. Вероватноћа одозва за сип. A је $\frac{4}{5}$,
 за B $\frac{3}{4}$, а за C $\frac{2}{3}$. Ако је изашао одозва један,
 шта је вероватноћа да је C промашио.

A - дог. да је A одозва $P(A) = \frac{4}{5}$

B - " " B " " $P(B) = \frac{3}{4}$

C - " " C " " $P(C) = \frac{2}{3}$

D - вероватноћа да је одозва један и одозва

$$P(C^c|D) = \frac{P(C^c D)}{P(D)}$$

$$(ABC^c, A^c B C^c, A^c B^c C)$$

$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

$$P(D) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C^c) + \dots$$

$$P(D) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

$$C^c D = A \cap B^c \cap C^c \cup A^c \cap B \cap C^c, \quad P(C^c D) = \frac{7}{60}$$

$$P(C^c | D) = \frac{P(C^c D)}{P(D)} = \frac{7}{9}$$

5. 3 кутије садрже по 10 кутица. У I кутији 6 белих и 4 црне, у II 8 белих и 2 црне, у III 5 белих и 5 црних. На случајан начин се бира кутија, а затим из ње случајан узорак од 3 кутице. Сређени вероватноћу да узорак садржи 2 црне кутице.

68.
4 ц.

88.
2 ц.

58.
5 ц.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

A - од 3 кутице у узорку, 2 су црне, а 1 бела

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \frac{36 + 8 + 50}{\binom{10}{3}}$$

$$P(A|H_2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}$$

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$$

6. На савањашу а продају телевизора четири марке 3 различите фабрике, A, B и C. 30% телевизора је из фабрике A, 30% из B, а 40% из C. Фабрике A, B и C односно имају по 5%, 2% и 1% дефеката.

1) Ако је на случајан начин изабран 1 телевизор са савањаша, каква вероватноћа да је неисправан

2) Ако је суграјна изабрана међу зор и еи сара
 тада вероватноћа да је он произведен у А.

1) А - иа. произведен у фабрици А $P(A)=0.3$ $P(D|A)=0.05$
 В - " " " " " " " " $P(B)=0.3$ $P(D|B)=0.02$
 С - " " " " " " " " $P(C)=0.4$ $P(D|C)=0.01$

D - вероватноћа да је суграјна изабрана тв неисправна

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C)$$

$$= 0.3 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.01 =$$

$$= 0.015 + 0.006 + 0.004 = 0.025$$

$$2) P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0.015}{0.025} = \frac{3}{5}$$

3. Вероватноћа да ће суграјна А решити неки задатак
 је $P(A)=0.7$, а за суграјна $P(B)=0.9$.

1) тада вероватноћа да ће овај зад. бити решен ако
 се решавају оба суграјна, независно 1 од другог

2) Ако је зад. решен, колика је веров. да га је решио В?

1) R - задатак решен

$$R = A \cup B, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.9 - 0.3 \cdot 0.9 = 0.97$$

$$2) P(B|A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.9}{0.97} = \frac{90}{97}$$

$$P(B|(A \cup B)) = \frac{P((A \cup B)|B) \cdot P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)}$$

$P((A \cup B)|B) = 1$ - вероватноћа да је задатак решен,
 под условом да га је решио В

У весице је највише могуће 5 одговора:
 Катјугаи би зта одговор (са вер.р) ии аугаи
 бира 1 од 5 одговора. Ако је катјугаи јас
 шата одговор, тада вероватноћа да је зтао.

A - катјугаи зта; $P(A) = p$ $P(A|B) = ?$

B - је шата одговор

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{5}}$$

AB зтао
 $P(AB) = P(A) = p$

$$= \frac{5p}{4p+1}$$

$$P(B|A^c) = \frac{1}{5}$$

$$P(A^c) = 1-p$$

2. У кутији су 3 кулнице од којих свака може
 бити бела или црна. Сви могући садржаји кутије су
 једнако вероватни (ЗВ, 2В и 1С, итд...). Из кутије
 4 пута, са враћањем, бирамо 1 кулницу. Ако је 3 пута
 извучена В, а једном С, какв ну вероватноћу садржи
 кутије.

H_0 - 3В

H_1 - 2В, 1С

H_2 - 1В, 2С

H_3 - 3С

A 3В, 1С
 $P(H_i|A) = ?$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=0}^3 P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

$$P(A|H_0) = 0 = P(A|H_3)$$

$$P(A|H_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{32}{81}$$

извлачење у коме је извучена С

$$P(A|H_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{81}$$

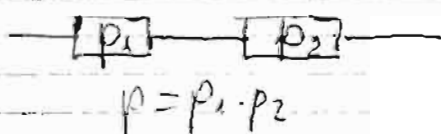
$$P(K_1|A) = \frac{P(A|K_1)}{P(A|K_1) + P(A|K_2)} = \frac{\frac{32}{81}}{\frac{40}{81}} = \frac{4}{5}$$

$$P(K_2|A) = \frac{P(A|K_2)}{P(A|K_1) + P(A|K_2)} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{40}{81}} = \frac{1}{5}$$

Познатош компюттерна система је вер. да је на кон. исправна
 — || — система је бр. од познатих компоненти
 (што је вер. да систем ради)

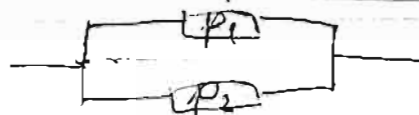
Разликујемо 2 основна случаја:

Сис. регистрованих компоненти.



$$p = p_1 \cdot p_2$$

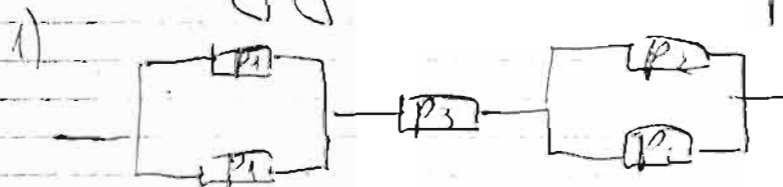
Сис. паралелно пов. комп.



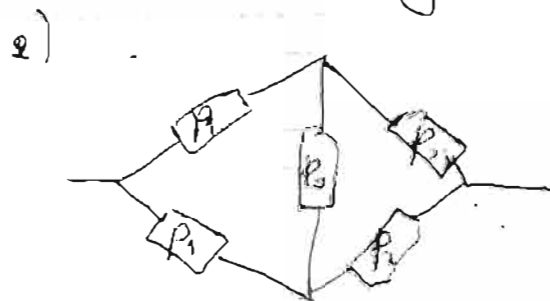
$$p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

$$(p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2))$$

8. Наћи познатош система предвиђеног ка слици:



$$(p_1 + p_2 - p_1 p_2) \cdot p_3 \cdot (2p_2 - p_2^2)$$



2) разликујемо 2 случаја: кад комп. са позн. p_3 ради (H_1)
 — || — не ради (H_2)

$$p(H_1) = p_3, \quad p(H_2) = 1 - p_3$$

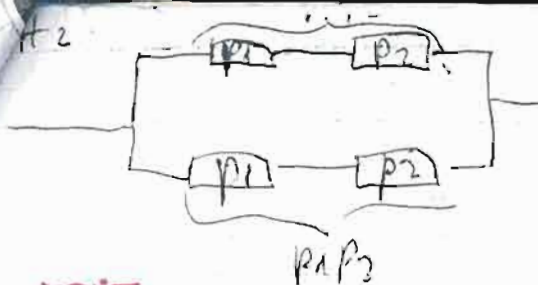
A - систем ради

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot p(H_1) + P(A|H_2) \cdot p(H_2)$$

A|H₁



$$P(A|H_1) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \cdot (2p_2 - p_2^2)$$



$$P(A|H_2) = 2p_1p_2 - (p_1p_2)^2$$

→ ISPIT

! 4. Kontrolišite preilog ušacima otkriva bolest sa ver. 0,99, a ga je uzimajuć rezultat kod zdravih sa ver. 0,02. Ako je uziman ga 5% uzimajuć rezultat od sve bolesti, tada ver. ga je ušaca bolest, ako je ušac ukazuje ga, je li i ako je ušac ukazuje ga, nije.

$$\frac{0,005}{0,995} B \quad \frac{0,99}{0,01} T_B$$

$$\frac{0,995}{0,99} Z \quad \frac{0,02}{0,98} T_Z$$

✓

$$P(B|T_B) = ?$$

$$P(B|T_Z) = ?$$

$$P(B|T_B) = \frac{P(T_B|B) \cdot P(B)}{P(T_B)}$$

$$P(T_B|B) \cdot P(B) + P(T_B|Z) \cdot P(Z)$$

$$P(T_B|B) = 0,99$$

$$P(B) = 0,005$$

$$P(T_B|Z) = 0,02$$

$$P(Z) = 0,995$$

СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЛИВЕ $X, Y, \dots$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- случајна променлива је апстрактна слика исхода у неку реалну бројеву.

I_A - индикатор функција A .

$I_A(\omega) = 1$ ако се доде A реализовало при исходу ω

$I_A(\omega) = 0$ - - - - - није

I_A је бинарна сл. променлива

Бернуајева и Биномова

случај се одаје вредности $x \in \{0, 1\}$ и саопшћено веров. $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$$p(X=1)=p, p(X=0)=1-p$$

$$X \sim \text{Bern}(p)$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Биномова расподела

- и независн. у случају да је још 1 а резу. са вер. p ; X број реализација године у свих n експ.

Саопшћено:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & nq^{n-1}p & \binom{n}{2}p^2q^{n-2} & \dots & \binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

$$P(X=0) = (1-p)^n = q^n$$

$$P(X=1) = q^{n-1} \cdot p \cdot n$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & nq^{n-1}p & \binom{n}{2}p^2q^{n-2} & \dots & \binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

$$\text{или } P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

1. Наћи коју има средњу га P даје у $\frac{1}{3}$ случаја се даје
1) 500 гула 2) 700 гула. Коју играју број је највероватнији

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$1) n=500, p=\frac{1}{3}$$

$$2) n=700, p=\frac{1}{3}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$$p^k q^{n-k}$$

$$P(X=k-1) \leq P(X=k)$$

$$\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} (1-p) \leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p$$

$$k(1-p) \leq p(n-k+1)$$

$$k_p \leq u_p - k_p + p$$

$$k \leq (u+1)p$$

1) $n=500$

$(u+1)p = 167$, $u+X$ се гостинице за 166 и 167

2) $n=700$, $(u+1)p \notin N$ $u+X$ је за $K=233$

2. Из кутије са 3 црне и 5 белих кутија извлаче 2

1) без бр 2) са бр. Нека је X број извлечених белих кутија. Наћи закон расподеле случајне променљиве X .

$$\Omega = \{CC, CB, BC, BB\}, X \in \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{28} & \frac{15}{28} & \frac{10}{28} \end{pmatrix}$$

$\Sigma = 1$

13.04.2007.

2) Наћи функцију расподеле променљиве X .

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{28}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{18}{28}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

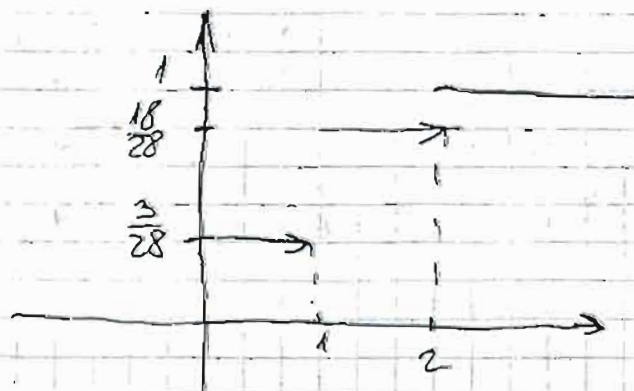
Напр. $x = -3$

$$P(X \leq -3) = 0$$

$$P(X \leq 0) = P(X=0) = \frac{3}{28}$$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{3}{28} + \frac{15}{28} = \frac{18}{28}$$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{28} + \frac{15}{28} + \frac{10}{28} = 1$$



3. Из култице са 4 култице пунерике са 1, 2, 3 и 4 се једна по једна (на случајан начин, без враћања) две се не извуче култица са партицип. бројем. Како је случајна променљива X - збир извлечених бројева, а Y - број извлечених дефинитивних бројева исхода, на који законе разишете случајни вектор (X, Y) и случајних променљивих X и Y . Да ли су X и Y независне?

$$\Omega = \{1, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 4, 1, 2, 4, 3, 4, 2, 1, 4, 2, 3\}$$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

$$X \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$Y \in \{1, 2, 3\}$$

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
5	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
7	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{6}$
9	0	0	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$P((X, Y) = (1, 1)) = P(X=1, Y=1)$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

X и Y су независне ако је: $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$ за две могуће x_i и y_j од X и Y .
 $P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4} \neq P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Није независно!

4. Из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ где је $n \geq 2$, на случајан начин бирају се 2 броја, X и Y . Како је $U = \max\{X, Y\}$, а $V = |X - Y|$. Како законе разишете случајних променљивих U и V . Како и вероватноћу да је $0.4 < U \leq 3.33$ кад год је $V > 1.84$.

$$1, \dots, u\}$$

$$u \in \{2, 3, \dots, u\}$$

$$P(u=2) = \frac{1}{\binom{u}{2}}$$

$$P(u=3) = \frac{2}{\binom{u}{2}}$$

$$\vdots$$

$$P(u=k) = \frac{k-1}{\binom{u}{2}}, \quad k=2, 3, \dots, u$$

$$P(0.4 < u \leq 3.33) = P(u=2) + P(u=3) = \frac{3}{\binom{u}{2}}$$

$$V \in \{1, 2, \dots, u-1\}$$

$$P(V=1) = \frac{u-1}{\binom{u}{2}}$$

$$P(V=2) = \frac{u-2}{\binom{u}{2}}$$

$$1, 2, 4, \dots, u-2, u$$

$$P(V=k) = \frac{u-k}{\binom{u}{2}}, \quad k=1, 2, \dots, u-1$$

$$P(u=2) = \frac{1}{\binom{u}{2}}$$

$$P(u=3) = \frac{2}{\binom{u}{2}}$$

$$P(V > 1.84) = P(V=2) + \dots + P(V=u-1)$$

$$= 1 - P(V=1) = 1 - \frac{u-1}{\binom{u}{2}}$$

5. Zbog toga A se u eksperimentu realizuje a verovatnoća p (0 < p < 1). Eksperimenti se nezavisno ponavljaju dok se:

- 1) zbog toga A ne realizuje prvih n puta
- 2) zbog toga A ne realizuje ni nakon k puta
- 3) zbog A, zbog A^c ne realizuje z puta uzastopno
- 4) prvih n puta ne realizuje ni za A ni za A^c

Imamo zatim razloge stoga je promenljiva X, koja predstavlja broj izvedenih eksperimenta

$$\Omega = \{A, A^c A, A^c A^c A, \dots, A^c A^c \dots A^c A, \dots\}$$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p = q^{n-1} p, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{-- isključivo razlog}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

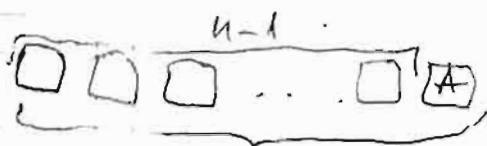
$$2) \mathcal{I} = \left\{ \underbrace{AA \dots A}_k, \underbrace{A^c A \dots A}_{k+1}, \dots \right\}$$

$$X \in \{1, k+1, \dots\}$$

$$P(X=k) = p^k$$

$$P(X=k+1) = q p^k \cdot k$$

$$P(X=n) = p^k \cdot q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}, n=k, k+1, \dots$$



независимых событий или вероятности разложения

$$H_n \text{ и } H_{n-1} - k-1 \times A, n-k \times A^c$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

$$3) \mathcal{I} = \left\{ \begin{matrix} AA & A^c A \\ A^c A^c & A A^c \end{matrix}, \begin{matrix} AA^c AA \\ A^c A A^c A^c \end{matrix}, \dots \right\} \quad X \in \{2, 3, \dots\}$$

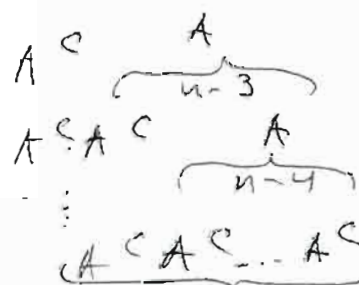
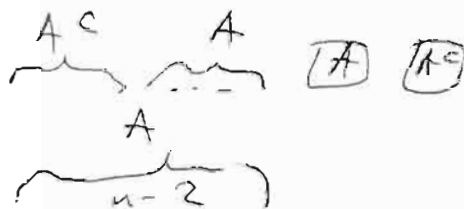
$$P(X=n) = ? \quad \underbrace{A \ A \dots A \ A \ A}_{2n} \quad \underbrace{A^c \ A \dots A \ A^c \ A^c}_{2n+1}$$

$$P(X=2n) = p^{2n} q^{n-1} + q^{2n} p^{n-1} = p^{n-1} q^{n-1} (p^2 + q^2), n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{A \ A \dots A \ A \ A}_{2n-1} \quad \underbrace{A \ A^c \dots A \ A^c \ A^c}_{2n+1}$$

$$P(X=2n+1) = p^{2n} q^n + q^{2n+1} p^n = p^n q^n (p+q), n \in \mathbb{N}$$

$$4) \mathcal{I} = \{ AAAC, AAAA^c, A^c AA^c, A^c AAA^c, A^c A^c AA^c, \dots \}$$



$$P(X) = p^2 \left(1 + \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} + \dots + \left(\frac{q}{p} \right)^{n-2} \right) =$$

$$p^{u-1} q \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{u-1}}{1 - \frac{q}{p}}, u=2,3,\dots \quad \frac{q}{p} \neq 1 \Leftrightarrow p \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{za } p = \frac{1}{2}: P(X=u) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{u-2}} + \frac{1}{2^{u-2}} + \dots + \frac{1}{2^{u-2}} \right) \\ = \frac{n-1}{2^n}, u=2,3,\dots$$

13.04.07.

Непрерывная случайная величина X
 $f_X(x)$ - плотность вероятности беров. а. с. X
 $F_X(x)$ - ф-я распр. бер. с. X
 $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

$P \in (0,1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Например: Unit (a,b)

Exp $(\lambda), \lambda > 0$
 $N(\mu, \sigma^2)$

1. Плотность вероятности с. с. X gamma je ca:

$$f_X(x) = \begin{cases} a x^{a-1} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти коэф. a , функцию распр. $F_X(x)$ и $P(X \in [0,1])$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a x^{a-1} e^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} d(-e^{-x}) = \dots = 2$$

$$\left(\int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx = \Gamma(u) = (u-1)! \right)$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2} x^2 e^{-x} dx = 1 - e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X \in (0, 1)) = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 e^{-x} dx \text{ или}$$

$$P(X \in (0, 1)) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - \frac{5}{2e}$$

ако имамо ϕ -ју где год само зачетно, ако не
падно интервал дугачине.

2. Дугачина живота (у година) неке компаније је
непрех. сл. вр. X са густином $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Колика је вероватноћа да комп. ради дуже од 100?
Ако знамо да је комп. већ радила 50, колика је
вер. да ће радити још дуже од 150?

$$\int_{100}^{+\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}} dx (= P(X > 100)) = \lambda \cdot \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \Big|_{100}^{+\infty} = \lambda \cdot 100 \cdot e^{-1} = \frac{100}{100} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}} dx = \lambda \cdot \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \Big|_0^{+\infty} = 100 \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

$$P(X > 150 | X > 50) = \frac{P(X > 150, X > 50)}{P(X > 50)} = \frac{P(X > 150)}{P(X > 50)} =$$

$$= \frac{\int_{150}^{+\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx}{\int_{50}^{+\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx} = \frac{-e^{-\frac{x}{100}} \Big|_{150}^{+\infty}}{-e^{-\frac{x}{100}} \Big|_{50}^{+\infty}} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-1}$$

$X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Задана двохмерна густина розподілу а.р. X та Y задає:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x-y} & ; x, y > 0 \\ 0 & , \text{інакше} \end{cases}$$

1) Належить густина сумарних а.р. X та Y .

2) Чи є X та Y незалежними?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^{+\infty} xe^{-x-y} dy = xe^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = xe^{-x}, x > 0$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \quad f_X(x) = 0, x < 0$$

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-x-y} dx = e^{-y} \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = e^{-y}, y > 0$$

$$f_Y(y) = 0, y < 0$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{істинно}$$

8. Задана двохмерна густина розподілу а.р. X та Y задає: $f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x-y} & , x, y > 0 \\ 0 & , \text{інакше} \end{cases}$

1) Належить густина сумарних а.р. X та Y .

2) Чи є X та Y незалежними?

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$X \text{ та } Y \text{ незалежні} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & , y > 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases} \quad xe^{-x-y} = x \cdot e^{-x} \cdot e^{-y} \quad \forall (x,y > 0)$$

$$0 = 0 \quad \checkmark \quad (\text{істинно})$$

9. Нехай X — неперервна сумарна а.р. з густиною f , тоді густина сумарних а.р. $|X|$ задає:

$$f_X(x)$$

$$Y = |X|$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \quad (\text{за } y \geq 0) \\ = F_X(y) - F_X(-y)$$

За $y < 0$: $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = 0$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_X(y) - F_X(-y), & y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ f_X(y) + f_X(-y), & y \geq 0 \end{cases}$$

$$(F_X(y) - F_X(-y))'_y = f_X(y) - f_X(-y) \cdot (-1)$$

10. Если X и Y независимые случайные величины с $U_{unif}[0,1]$ распределением, найти функцию плотности случайной величины $X+Y$.

$$X \sim U_{unif}[0,1]$$

значит, что

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

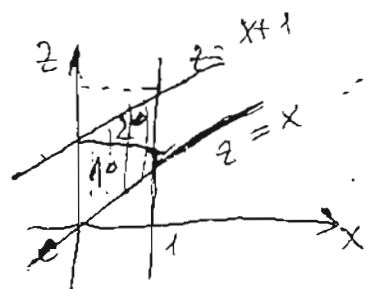
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 c dx = c \cdot 1 = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

$Z = X+Y$ так как X и Y независимы,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot f_X(z-y) dy$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq z-x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$x \leq z \leq x+1$$

$$1^{\circ} 0 \leq z \leq 1 \quad \int_0^z 1 \cdot dx = z = f_Z(z)$$

$$2^{\circ} 1 \leq z \leq 2 \quad \int_{z-1}^1 1 \cdot dx = 1 - z + 1 = 2 - z = f_Z(z)$$

$$r(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z, & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z \notin [0, 2] \end{cases}$$

конволютанта интервалов будет само-за собой
самое простое упражнение независимое!

11. Если X и Y независимые случайные величины,
где $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, а $Y \sim \text{Poiss}(\mu)$, ($\lambda, \mu > 0$). Найти
распределение суммы независимых $X + Y$.

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda), \lambda > 0$$

$$P(X=u) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^u}{u!}, u=0,1,2,\dots$$

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu), \mu > 0$$

$$P(Y=u) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^u}{u!}, u=0,1,2,\dots$$

$$Z = X + Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = e^{-\lambda-\mu}$$

$$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=1) + P(X=1) \cdot P(Y=0) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} \mu + e^{-\lambda} \cdot 1 \cdot e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu} (\lambda + \mu)$$

$$P(Z=k) = P(X=0, Y=k) + P(X=1, Y=k-1) + \dots + P(X=k, Y=0) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} + \dots + e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{k-k}}{(k-k)!} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i! (k-i)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \right) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}, k=0,1,\dots$$

$$Z \sim \text{Poiss}(\lambda + \mu)$$

12. Нека је X случајна променљива са $\text{Exp}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$.
 Наћи расподелу случајне променљиве $Y = [X]$.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$Y = [X] \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(Y=n) = P([X]=n) = P(X \in [n, n+1)) = P(n \leq X < n+1) =$$

$$= \int_n^{n+1} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_n^{n+1} = -e^{-\lambda(n+1)} + e^{-\lambda n} =$$

$$= e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda}) = q^n p$$

$$F_1 - e^{-\lambda} = p$$

20.04.07.

13. Наћи математичко очекивање и варијансу случајне променљиве X , ако:

1) $X \sim \text{Unif}(a, b)$

2) X има геометријску расподелу са вероватноћом успеха p

3) X има "независну" дискретну расподелу са вероватноћом успеха p .

Математичко очекивање

X - дискр.

$$EX = \sum_i x_i p_i$$

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$X \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$EX = \frac{1+2+\dots+6}{6} = 3.5$$

Непр. $f_X(x)$ - гуауиана

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

пример: $X \sim \text{Unif}[3, 5]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [3, 5] \\ 0, & x \notin [3, 5] \end{cases}$$

$$EX = \int_3^5 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_3^5 = 4$$

$$\text{Var } X = E(X - EX)^2$$

"гуауиана"

$$\text{Var } X = E(X^2) - (EX)^2$$

Оснoвнe сoбoднe сoчeтaннa и гуауианa:

1) $E(\text{const.}) = \text{const.}$

2) $E(a \cdot X) = a \cdot EX$

3) $E(X + Y) = EX + EY$

4) $E(XY) = EX \cdot EY$, ако су X и Y нез.

5) $E(g(X)) = \int g(x) \cdot f_X(x) dx$ (X - непр. са гуау. $f_X(x)$).

$$E(X_1, X_2, \dots) = (EX_1, EX_2, \dots)$$

(Var X)

1) $\text{Var}(\text{const.}) = 0$

2) $\text{Var}(X + \text{const.}) = \text{Var } X$

3) $\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \text{Var } X$

4) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y$ ако су X и Y незав.

13.

1) $X \sim \text{Unif}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

UNIFORMNA

RA SPODRUGA

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var } X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{a+b}{2}$$

I метод: найти ϕ -f-у расч. за x^2 , учитывая, что $y = x^2$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0, \text{ за } y \leq 0$$

$$\text{Нпр. } (a, b) = (3, 5) \Rightarrow X^2 \in (9, 25)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 9 \\ \dots, & 9 \leq y \leq 25 \\ 1, & y \geq 25 \end{cases}$$

$$P(X^2 \leq y) = P(9 \leq X^2 \leq y) = P(3 \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(3) \quad (y \in (9, 25))$$

II метод: $X^2 = g(X)$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\text{Var } X = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) XGeom.

$$P(X=n) = q^{n-1} \cdot p, n \in \mathbb{N}$$

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} p = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = ?$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Var } X = E(X^2) - (EX)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot q^{n-1} p$$

Зная расч. за X^2 : $P(X^2 = n^2) = P(X=n) + P(X=-n) = q^{n-1} p, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (x^{n+1})'' = \left(x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' = \left(x \cdot \frac{1}{1-x} \right)''$$

$$= \left(x \cdot \frac{1}{1-x} \right)' = \left(\frac{x - x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1 - 2x + x^2}{(1-x)^3}$$

$$E(X^2) = p \cdot \left(\frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2} \right) = p \cdot \frac{2-p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\text{Var } X = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$3) X \in \{k, k+1, \dots\}$$

$$P(X=k) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$\underbrace{\dots}_{X_1} \underbrace{\dots}_{X_2} \dots \underbrace{\dots}_{X_k}$$

$$X = X_1 + \dots + X_k$$

- незав. сл. вар.

са једн. рас.

$$\text{незав. рас.} \rightarrow \text{---||---} \quad \text{---||---} \quad \text{---||---}$$

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_k) = E X_1 + \dots + E X_k = k \cdot \frac{1}{p}$$

$$\text{Var } X = \text{Var } X_1 + \dots + \text{Var } X_k \quad (\text{нез. сл!})$$

$$= k \cdot \frac{q}{p^2}$$

15. Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне случајне променљиве са $Unit(0,1)$ рас. једн. Нека је $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Наћи $E(Y+Z)$.

$$E(Y+Z) = E Y + E Z$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y)$$

$$= P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) = P(X_1 \leq y) P(X_2 \leq y) \dots$$

$$P(X_n \leq y) = F_{X_1}(y) F_{X_2}(y) \dots F_{X_n}(y) =$$

$$= (F_{X_1}(y))^n$$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X_1}(x) dx = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$x > 0: \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^x 1 \cdot dx = x$$

$$(F_X(y))^n = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^n, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^n, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} ny^{n-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^1 ny^n dy + \int_1^{\infty} 0 =$$

$$= \frac{ny^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq z) =$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) =$$

$$= 1 - P(X_1 > z) \dots P(X_n > z) = 1 - (P(X_1 > z))^n =$$

$$= 1 - (1 - \underbrace{P(X_1 \leq z)}_{F_X(z)})^n = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - (1-z)^n, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} n(1-z)^{n-1}, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{where} \end{cases}$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 n \cdot z (1-z)^{n-1} dz = n \int_0^1 (1-t) t^{n-1} dt$$

$$= n \left[\int_0^1 t^{n-1} dt - \int_0^1 t^n dt \right] = n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = n \frac{1}{n(n+1)}$$

$$E(Y+Z) = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$$

1) Зададим закон совместного распределения вероятностей (X, Y) следующим образом:

$X \backslash Y$	0	1	3	Σ
0	$1/3$	$2/3$	0	$1/3$
1	0	$1/3$	$2/3$	$1/3$
3	$2/3$	0	$1/3$	$1/3$
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

1) Найти $E X, E Y, E(XY)$

2) Найти $P(X, Y)$

3) Да ли X и Y независимы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3} = EY$$

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 9 \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$E(XY) = 0 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

$$2) P(X, Y) = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}}$$

X, Y не являются независимыми

3) Независиме $\Rightarrow$ Непорелисане

~~А~~

$$P(X=0, Y=3) = P(X=0) \cdot P(Y=3)$$

$0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ Нису независне

Нека с.в.р. $X \sim N(7, 25)$. Наћи $P(X^2 - 5X < 0)$

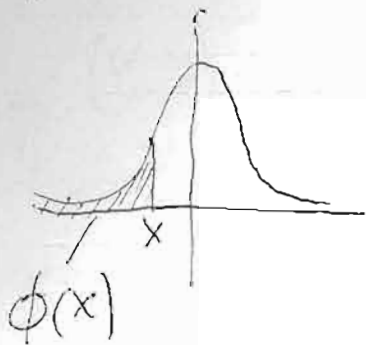
$$X \sim N(7, 25) \quad N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{X-7}{5} = Z \sim N(0, 1)$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

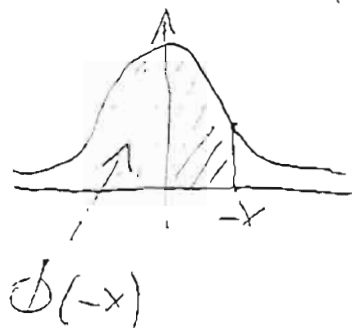
$$P(X^2 - 5X < 0) = P(0 < X < 5) = P\left(-\frac{7}{5} < Z < -\frac{2}{5}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{5}\right)$$

-0.4 -1.4



$$Z \sim N(0, 1)$$

$$f_Z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$= 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

③ Нека су X и Y независне с.в.р. и нека $X \sim N(0, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$. Наћи $P(X, X+Y)$

$$\rho(X, X+Y) = \frac{E(X(X+Y)) - E(X)E(X+Y)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var}(X+Y)}}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y \rightarrow \text{at } \sigma \text{ су. Нез.}$$

$$E(X(X+Y)) = E(X^2 + XY) = E(X^2) + E(XY)$$

$$\downarrow EX \cdot EY \Rightarrow 0$$

$$EX = 0$$

$$\text{Var } X = \sigma_1^2 = E(X^2) - \underbrace{(EX)^2}_0$$

$$\rho(X, X+Y) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

II. Напиши

$$E(X^2) + E(XY) - (EX)^2 - EX \cdot EY = \text{Var } X + \text{Cov}(X, Y)$$

① Дана су $X_1, \dots, X_5$ независимые и. прот. с. и. с. $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Найти ожидаемые значения и дисперсии у вариационной тизы $X_{(3)}$.

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq X_{(4)} \leq X_{(5)}$$

$$F_3(x) = P(X_{(3)} \leq x) = P(\underbrace{X_{(3)} \leq x}_{\text{именно 3 прот. су} \leq x} \leq X_{(4)}) + P(\underbrace{X_{(4)} \leq x}_{\text{именно 4 прот. су} \leq x} < X_{(5)}) + P(\underbrace{X_{(5)} \leq x}_{\text{обах 5 су} \leq x}) =$$

$$= \binom{5}{3} (P(X \leq x))^3 \cdot P(X > x)^2 + \binom{5}{4} (P(X \leq x))^4 P(X > x) + \binom{5}{5} (P(X \leq x))^5$$

$$= 10 F_x^3(x) (1 - F_x(x))^2 + 5 F_x^4(x) (1 - F_x(x)) + F_x^5(x)$$

$$f_x(x) = 10 \cdot [3 F_x^2(x) + f_x(x) (1 - F_x(x))^2 + F_x^3(x) \cdot 2(1 - F_x(x)) \cdot (-f_x(x))] + 5 [4 F_x^3(x) \cdot f_x(x) (1 - F_x(x)) + F_x^4(x) \cdot (-f_x(x))] + 5 F_x^4(x) \cdot f_x(x)$$

$$f_x(x) \left\{ 10(3F_x^2(x)(1-F_x(x)) - 2F_x^3(x)(1-F_x(x))) + \right. \\ \left. + 5(4F_x^3(x)(1-F_x(x)) - F_x^4(x)) + 5F_x^4(x) - \right. \\ \left. - 30f_x(x) \cdot F_x^2(x)(1-F_x(x))^2 \right.$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 30 \cdot \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^2 e^{-2\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$EX_{(3)} = \int_0^{+\infty} x f_3(x) dx$$

* Практика теорема

Неједнакоста Маркова:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon} \quad \text{за свако } \varepsilon > 0$$

(под условом да имају EX и да је $P(X \geq 0) = 1$)

Неједнакоста Чебешев:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2} \quad \text{за свако } \varepsilon > 0$$

(под условом да имају $\text{Var } X$)

Централна гранична теорема

Нека су $X_1, \dots, X_n$ независне, и истог расподеле и.вр. са $EX_i = \mu$, $\text{Var } X_i = \sigma^2$ (за свако $i = 1, \dots, n$).

Онда $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ конвергује

у расподели и.вр. $Z \sim N(0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

$$Z_n \approx Z \quad (n \geq 30)$$

$$Z_n = \frac{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{успех да има ситатз. Норм. раштрз}$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

① Број апела који суђује да изађе на испит је и. пром. X са $EX = 75$

a) Како веров. да ће суђује да изађе на испит више од 85.

b) Ако је $\text{Var } X = 25$ колика је $P(X \in (65, 85))$?

c) Колико суђује да изађе на испит да би веров. да је просек апела био у $(70, 80)$? ($\text{Var } X = 25$)

d) Може ли се c) решити применом ЦГТ?

a) $P(X > 85) (= P(X \geq 86))$ очекивање од X је 75

$$P(X > 85) \leq \frac{EX}{85} = \frac{75}{85} \approx \frac{15}{17}$$

$$b) P(X \in (65, 85)) = P(-10 < X - 75 < 10)$$

$$= P(|X - 75| < 10) = 1 - P(|X - 75| \geq 10)$$

EX

$$\leq \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

вероватноћа да ће се наћи у овом интервалу је $\geq \frac{3}{4}$

$$X_1, \dots, X_n$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \in (70, 80)\right) \geq 0.9$$

$$EY = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} (EX_1 + \dots + EX_n) = \frac{n \cdot 75}{n} = 75$$

$$\text{Var } Y = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} (\text{Var } X_1 + \dots + \text{Var } X_n) = \frac{n \cdot 25}{n^2} = \frac{25}{n}$$

$$P(70 < Y < 80) = P(|Y - \underbrace{75}_{EY}| < 5) = 1 - P(|Y - 75| > 5) \geq \frac{n-1}{n} \leq \frac{25/n}{25} = \frac{1}{n}$$

$$104 - 10 \geq 94$$

$$\boxed{n \geq 10}$$

$$\begin{aligned} c) \quad P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \in (70, 80)\right) &= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - 75n}{n} \in (-5, 5)\right) \\ &= P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - 75n}{5\sqrt{n}} \in \left(-\frac{5\sqrt{n}}{5}, \frac{5\sqrt{n}}{5}\right)\right) \\ &= P\left(Z \in \left(-\frac{5\sqrt{n}}{5}, \frac{5\sqrt{n}}{5}\right)\right) \geq 0.9 \\ &= P(Z \in (-\sqrt{n}, +\sqrt{n})) \geq 0.9 \\ &= P(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = \Phi(\sqrt{n}) - \Phi(-\sqrt{n}) \\ &= \Phi(\sqrt{n}) - 1 + \Phi(\sqrt{n}) \geq 0.9 \\ &\quad \Phi(\sqrt{n}) \geq 0.95 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 1.65$$

$$n \geq 2.72$$

$$n_{\min} = 3$$

- Ne može y. c. bi. jer se primenjuje za $n \geq 30$,
a mi smo dobili da je $n = 3$

② "фер" хотит дава се 500 игри. Хоту бер
не број годинетих p разликувањето од очекувањето
броја за време од 30.

$$X \sim \text{број } p \text{ у } 500 \text{ давања}$$

$$X \sim \text{Bin}(500, 1/2) \quad E X = 250$$

$$P(|X - 250| > 30) \leq \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$$

I начин: $(P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}) \quad \text{Var } X = npq = 500 \cdot \frac{1}{4} = 125$

II начин:

Моабр-Лапласово теорема Т-вакту ако
 $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$(X = X_1 + \dots + X_n)$$

$$X_i \sim \text{Bern}(p); i = 1, \dots, n$$

независне

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx Z \sim N(0, 1)$$

$n \geq 30$

$$\frac{X - 250}{\sqrt{125}} \approx Z$$

$$P(|X - 250| > 30) = P\left(\left|\frac{X - 250}{\sqrt{125}}\right| > \frac{30}{\sqrt{125}}\right) \quad -\frac{6}{\sqrt{5}} < Z < \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$= P(|Z| > \frac{6}{\sqrt{5}}) = 1 - P(|Z| \leq \frac{6}{\sqrt{5}}) =$$

$$= 1 - (\Phi(\frac{6}{\sqrt{5}}) - \Phi(-\frac{6}{\sqrt{5}})) = 2(1 - \Phi(\frac{6}{\sqrt{5}}))$$

$\underbrace{1 - \Phi(\frac{6}{\sqrt{5}})}_{\downarrow}$

$$= 2(1 - \Phi(2.68)) = 2 \cdot 0.00968$$

$\downarrow$
0.99032

количина се дава 30 пута. Уредити највећу
 да тако да смо са вер. др. 0.96 сигурно
 да смо добити не мање од k шкатула.
 преништи применити Нормалне апроксимације
 и тласотове аир.)

$$X \sim \text{дрож } 6$$

$$X \sim \text{Bin}(30, 1/6)$$

$$P(X \geq k) \geq 0.96$$

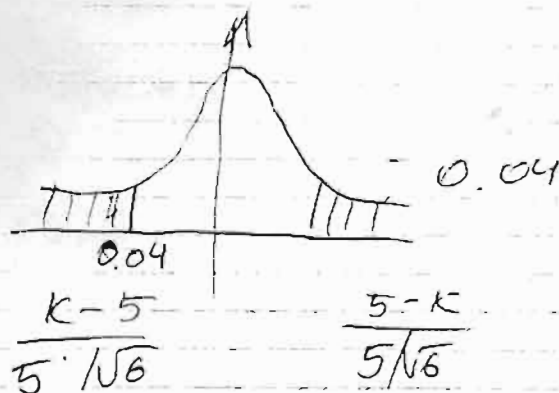
$$1 - P(X < k) \geq 0.96$$

$$P(X < k) \leq 0.04$$

$$P\left(\frac{X - 5}{\sqrt{5 \cdot \frac{5}{6}}} < \frac{k - 5}{5/\sqrt{6}}\right) \leq 0.04$$

$$P\left(Z < \frac{k - 5}{5/\sqrt{6}}\right) \leq 0.04$$

$$\Phi\left(\frac{k - 5}{5/\sqrt{6}}\right) \leq 0.04$$



$$\Phi\left(\frac{5 - k}{5/\sqrt{6}}\right) \geq 0.96$$

$$\frac{5 - k}{5/\sqrt{6}} \geq 1.75$$

$$5 - k \geq \frac{5 \cdot 1.75}{\sqrt{6}}$$

$$k \leq 1.4 \quad k_{\max} = 1$$

Васинова адр.

$$\text{Bin}(n, p) \sim \text{Poiss}(np)$$

$$\lambda = np$$

"и велико, p мало"

$$\left[\begin{array}{l} n \geq 30 \\ np \leq 5 \end{array} \right]$$

$$X \sim \text{Bin}\left(30, \frac{1}{6}\right) \sim \text{Poiss}(5)$$

$$P(X \geq k) \geq 0.96$$

$$P(X \leq k) \leq 0.04$$

$$k-1=0$$

$$\boxed{k=1}$$

$$P(X=0) + \dots + P(X=k-1) \leq 0.04$$

$$e^{-5} + 5e^{-5} \} > 0.04$$

④ Имаше и компюттери, свака има време живота са $\text{Exp}\left(\frac{1}{10}\right)$. Ако Q , одне откога једне компютере се претпоставује заминује новим, колку треба да најмање и да биде са вер. бар 0.99 биде сину до те укупно време живота свих компютери биде бар 1100.

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$P(X_1 + \dots + X_n \geq 1100) \geq 0.99$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{1100 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0.99$$
$$\cong z$$

$$\mu = EX = \frac{1}{\lambda} = 10$$

$$\sigma^2 = \text{Var} \cong \frac{1}{\lambda^2} = 100$$

$$P\left(z \geq \frac{1100 - 10n}{10\sqrt{n}}\right) \geq 0.99$$

$$1 - P\left(z < \frac{110 - n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.99$$

$$\Phi\left(\frac{110 - n}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.01$$

$$\Phi\left(\frac{n - 110}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{n - 110}{\sqrt{n}} \geq 2.33$$

$$n - 2.33\sqrt{n} - 110 \geq 0$$

$$\sqrt{n}_{1/2} = \frac{2.33 \pm \sqrt{2.33^2 + 440}}{2}$$

$$\sqrt{n} = 11.718$$

$$\sqrt{n} \geq 11.718$$

$$n \geq 137, \dots$$

$$n_{\min} = 137$$