

1. Naći Laplaceovu transformaciju i odrediti oblast konvergencije za sledeće signale:

- a) $x(t) = [\sin \omega_0 t] u(-t)$ b) $x(t) = \sin(\omega_0 t + \pi/4) u(t)$ c) $x(t) = \delta(t+T) - \delta(t-T)$
d) $x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ e) $x(t) = t e^{-at} u(t), a > 0$ f) $x(t) = e^{-a|t|} \cos \omega_0 t, a > 0$

2. Sledeći signali imaju Laplaceove transformacije koje nisu racionalne funkcije konačnog reda. Odrediti $X(s)$ za svaki od navedenih signala:

- a) $x(t) = e^{-at} [u(t) - u(t-T)]$, b) $x(t) = \cos(2\pi t) [u(t) - u(t-5)]$, c) $x(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$,
d) $x(t) = \delta(t) + e^{-aT} \delta(t-T)$, e) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} \delta(t-nT)$.

3. Naći inverzne Laplaceove transformacije i na taj način odrediti signale u vremenskom domenu $x(t)$ za sledeće funkcije:

- a) $X(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 2}, \operatorname{Re}\{s\} > 2$ b) $X(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 2}, -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2$
c) $X(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 2}, \operatorname{Re}\{s\} < -1$ d) $X(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \operatorname{Re}\{s\} < 0$
e) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$ f) $X(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^2 + 5s + 6}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$
g) $X(s) = \frac{2s^2}{s^4 - 1}, 0 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$ h) $X(s) = \frac{4s}{s^4 + 4}, -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$

4. Dokazati sledeće osobine Laplaceove transformacije koje važe za parni ili neparne signale:

- a) Ako je $x(t)$ parna funkcija, tj. $x(t) = x(-t)$, tada je $X(s) = X(-s)$,
b) Ako je $x(t)$ neparna funkcija, tj. $x(t) = -x(-t)$, tada je $X(s) = -X(-s)$,
c) Ako je $x(t)$ neparna funkcija, tada je $X(s)$ jednako 0 za $s = 0$,
d) Ako je $x(t)$ ili parna ili neparna funkcija, tada za svaki pol funkcije $X(s)$, $s = s_k$, postoji i odgovarajući pol $s = -s_k$,
e) Ako je $x(t)$ parna ili neparna funkcije, tada je oblast konvergencije $X(s)$ ili $-a < \operatorname{Re}\{s\} < a$ ili je čitava s ravan (ukoliko oblast konvergencije uopšte postoji).

5. a) Dokazati da se, ako je signal $x(t)$ kauzalan i ako ne sadrži impulse (ili singularitete visokog reda) za $t = 0$, početna vrednost $x(0^+)$ može odrediti na sledeći način

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

b) Naći početne vrednosti $x(t)$ u sledećim slučajevima:

- (i) $X(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$ (ii) $X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$
(iii) $X(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$ (iv) $X(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$

6. Dokazati ako je signal $x(t)$ kauzalan i ako $X(s)$ ima sve polove u levoj poluravni, osim eventualno jedan pol u $s = 0$, asimptotska vrednost signala za $t \rightarrow \infty$ se može odrediti iz izraza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

7. Naći Laplaceove transformacije i oblasti konvergencije za sledeće signale:

- a) $e^{-at}u(t-t_0)$ b) $\text{Ev}\{e^{-at}u(t)\}, a > 0$ c) $e^{j\omega t}u(t)$ d) $\frac{d}{dt}(e^{-a|t|}), a > 0$
e) $[\cos \omega_0 t]u(-t)$ f) $r(t) = u(t) * u(t)$ g) $t^2 e^{-at}u(t)$ h) $\int_{-\infty}^t e^{a\tau}u(-\tau)d\tau, a > 0$

8. Naći izlaz $y(t)$ sistema $H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s-3}$ za svaki od sledećih ulaznih signala, pretpostavljajući da je sistem stabilan:

- a) $x(t) = u(t)$ b) $x(t) = u(-t)$ c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$ d) $x(t) = e^{-2|t|}$
e) $x(t) = \delta(t) + e^{-2t}u(t)$ f) $x(t) = \delta(t) - u(t)$ g) $x(t) = \delta(t) + u(-t)$ h) $x(t) = \delta(t) - 3u(-t)$

9. Naći odskočne odzive $s(t)$ sledećih sistema:

- a) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \text{Re}\{s\} > -1$ b) $H(s) = \frac{1}{s^2-1}, -1 < \text{Re}\{s\} < 1$
c) $H(s) = \frac{s}{s^2-1}, -1 < \text{Re}\{s\} < 1$ d) $H(s) = \frac{1}{s^2+1}, \text{Re}\{s\} > 0$
e) $H(s) = \frac{s}{s^2+1}, \text{Re}\{s\} > 0$ f) $H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2}, \text{Re}\{s\} > -1$

10. U sledećim problemima se pojavljuju višestruki polovi u funkcijama $Y(s) = H(s)X(s)$. Naći $y(t)$ u sledećim slučajevima:

- a) $h_1(t) = -u(t)$ i $h_2(t) = e^{-at}u(t), a > 0$ b) $h_1(t) = h_2(-t) = e^{-at}u(t), a > 0$
c) $h_1(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$ i $h_2(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$

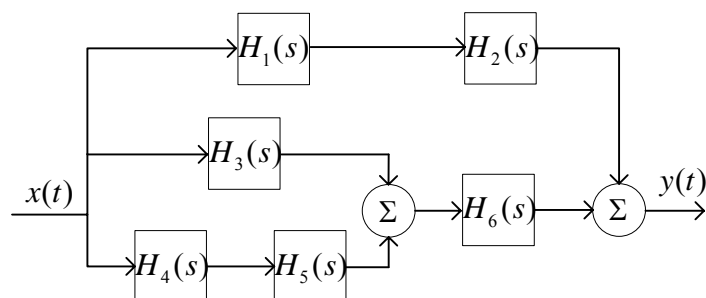
11. Za svaki par sledećih sistema naći $H_p(s)$ i $h_p(t)$ paralelne veze ta dva sistema, a zatim i $H_c(s)$ i $h_c(t)$, tj. redne veze dva sistema:

- a) $h_1(t) = -u(t)$ i $h_2(t) = e^{-at}u(t), a > 0$ b) $h_1(t) = h_2(-t) = e^{-at}u(t), a > 0$
c) $h_1(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$ i $h_2(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$

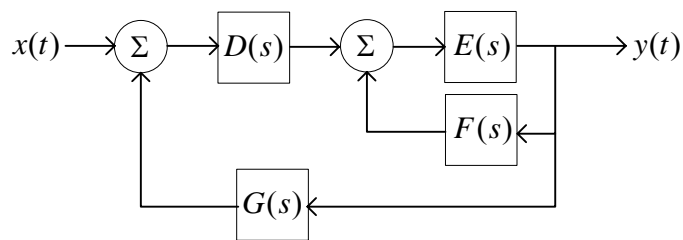
12. Odrediti funkciju prenosa sistema prikazanog na slici $H(s)$ u zavisnosti od pojedinačnih funkcija prenosa $H_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

b) Izračunati $H(s)$ kada je

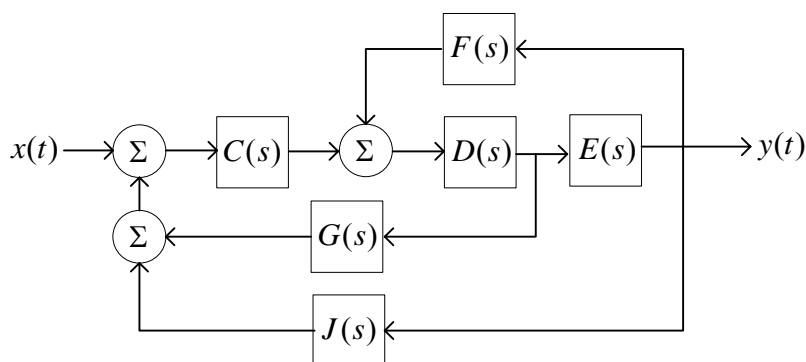
$$h_1(t) = u(t), h_2(t) = 3e^{-3t}u(t), h_3(t) = h_5(t) = e^{-2t}u(t), h_4(t) = e^{-t}u(t) \text{ i } h_6(t) = \delta(t) - 2e^{-3t}u(t)$$



13. Naći funkciju prenosa sledećih sistema sa povratnom spregom:



a)



b)

14. Za svaki od sledećih sistema, naći odgovarajuće inverzne Laplaceove transformacije $H_I(s)$. Koji inverzni sistemi su stabilni?

a) $h(t) = 2\delta(t) - u(t) - 3e^{-2t}u(t)$

b) $h(t) = \delta(t) - e^{-|t|}$

c) $h(t) = e^t[u(t) - u(t-T)]$

15. Skicirati Bodeove amplitudske karakteristike sledećih sistema drugog reda:

a) $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 20s + 100}$

b) $H(s) = \frac{10s}{s^2 + 14,14s + 100}$

c) $H(s) = \frac{s + 0,1}{s^2 + 11s + 10}$

d) $H(s) = \frac{s^2 + 10s + 100}{100(s^2 + s + 1)}$

e) $H(s) = \frac{s + 14,14s + 100}{s^2 + 101s + 100}$