

1. Skicirati sledeće kontinualne signale:

a) $x(t) = 2u(t) - u(t-1)$ i $\frac{dx(t)}{dt}$,

b) $x(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-1)$ i $\frac{dx(t)}{dt}$,

c) $x(t) = t \cdot [u(t+1) - u(t-2)]$ i $\frac{dx(t)}{dt}$,

d) $x(t) = \delta(t+\pi) - 2\delta(t-\pi)$ i $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$,

e) $x(t) = \cos(\pi t) \cdot [\delta(t+1) + \delta(t-1)]$ i $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$,

f) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$ (povorka Dirakovih impulsa),

g) $x(t) = e^{-bt} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \right] u(t+\varepsilon)$, ($b > 0$, $0 < \varepsilon < T$),

gde su $u(t)$ – jedinična odskočna funkcija, a $\delta(t)$ – jedinični Dirakov impuls.

2. Nacrtati sledeće diskretne signale:

a) $x[n] = u[n] - 2u[n-4]$ i $y[n] = x[n] - x[n-1]$

b) $x[n] = 2u[n+1] + u[n] - 3u[n-2]$

c) $x[n] = (1-n)(u[n+2] - u[n-3])$

d) $x[n] = \delta[n+2] - 2\delta[n-1]$ i $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$

e) $x[n] = n^2 (\delta[n+2] - 2\delta[n-2])$ i $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$

f) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$

g) $x[n] = \cos \frac{\pi n}{N} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \right] u[n]$

3. Izračunati sledeće integrale:

a) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) u(\tau) d\tau$

b) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) \delta(\tau) d\tau$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos \tau) \delta(\tau) d\tau$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos \tau) u(\tau-1) \delta(\tau) d\tau$

e) $\int_0^2 \exp(t^2 - 3t + 2) \delta(t-1) dt$

4. Dokazati sledeće jednakosti:

a) $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$, ($a \neq 1$)

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, ($|a| < 1$). Koristeći ovaj rezultat, izračunati $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$, za $x(t)$ iz zadatka 1(g).

5. Nacrtati sledeće kontinualne sinusoidalne signale:

a) $\sin 2\pi t$

b) $\sin(2\pi t - \pi/4)$

c) $\sin(2\pi t + \pi/4)$

d) $\sin(2\pi t + \pi/2)$

e) $\sin 4\pi t$

f) $\operatorname{Re}[e^{j4\pi t}]$

6. Skicirati sledeće diskretne signale. Odrediti period svakog signala.

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $\cos(\pi n / 4)$ | b) $\cos(9\pi n / 4)$ | c) $\sin(\pi n / 3)$ | d) $\sin(4\pi n / 7)$ |
| e) $\sin(\pi n / 2)$ | f) $\cos(\pi n)$ | g) $\cos(2\pi n)$ | h) $\sin(n)$ |

7. Svaka od datih realnih diskretnih sinusoida može se napisati u obliku $A \cos(\Omega_0 n + \phi)$. Ako je prvi odbirak svake od sinusoida dat za $n = 0$, naći parametre A , Ω_0 i ϕ sekvenci:

- | | |
|---|---|
| a) $\{0, 1, 0, -1, \dots\}$ | b) $\{1, 1, -1, -1, \dots\}$ |
| c) $\{0, 1, -1, \dots\}$ | d) $\{0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots\}$ |
| e) $\{1, 2, 1, -1, -2, -1, \dots\}$ | f) $\{-1, 1, \dots\}$ |
| g) $\{1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, \dots\}$ | h) $\{1, -\sqrt{2}, 1, 0, -1, \sqrt{2}, -1, 0, \dots\}$ |

8. Pretpostaviti da je $x(t)$ periodični signal sa periodom T . Odrediti da li su sledeći signali periodični i ako jesu, odrediti njihovu periodu.

- | | |
|---------------------------------|------------------------|
| a) $x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$ | b) $y(t) = e^{x(t)}$ |
| c) $x(t^2)$ | d) $y(t) = x(2 - t/3)$ |

Takođe ispitati periodičnost sledećih diskretnih signala, ako je $x[n]$ periodičan sa periodom N .

- | | |
|---------------------------------|-------------------|
| e) $x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$ | f) $y[n] = x[2n]$ |
| g) $y[n] = x[n]u[n]$ | h) $y[n] = x[nN]$ |
- i) Ako je $x[2n]$ periodičan, da li je uvek i $x[n]$ periodičan?

9. Neka je $x(t)$ periodični kontinualni signal sa periodom T , i neka je $x[n]$ diskretni signal dobijen diskretizacijom kontinualnog signala $x(t)$

$$x[n] = x(nT_s)$$

gde je T_s period diskretizacije. Pokazati da će ta sekvenca $x[n]$ takođe biti periodična jedino ako je odnos T/T_s racionalan broj.

10. Za kompleksne sinusoidalne signale definisane sa:

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 > 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kaže se da su u *harmonijskom odnosu*. Signal $x_0(t)$ predstavlja *konstantan (dc) signal* u vremenu. Signali $x_1(t)$ i $x_{-1}(t)$ zovu se *fundamentalne sinusoide (komponente)*, a ostali sinusoidalni signali $x_k(t)$ za $k = \pm 2, \pm 3, \dots$ zovu se *harmonici*.

a) Naći vezu između fundamentalne frekvencije ω_0 i frekvencije k -tog harmonika.

b) Naći vezu između fundamentalnog perioda $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ i perioda k -tog harmonika.

c) Pokazati da je svaki signal oblika $x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$, gde su a_k proizvoljne konstante, periodičan sa periodom T .

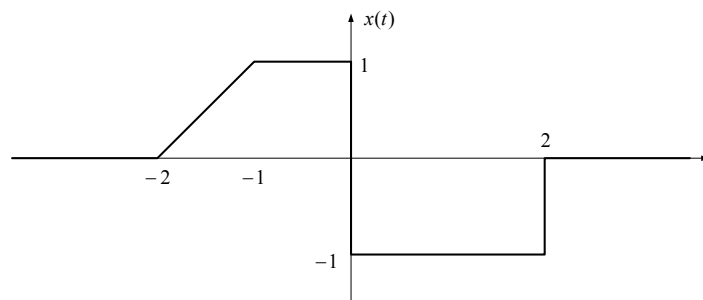
d) Napisati sledeće signale u formi $x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$:

$$x_1(t) = \cos 2\pi t$$

$$x_2(t) = \cos^2 2\pi t$$

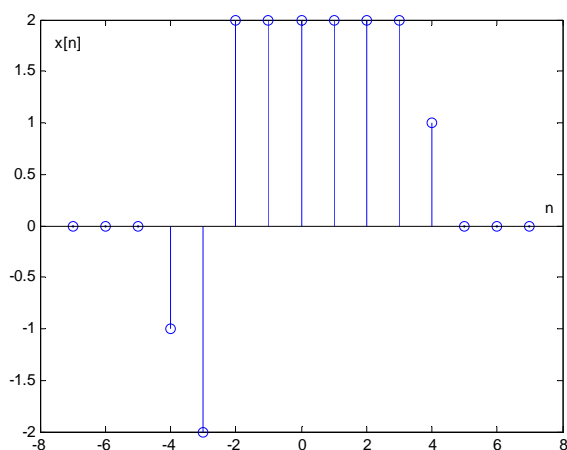
$$x_3(t) = \sin 2\pi t + \cos 4\pi t$$

11. Ako je $x(t)$ dat kao na slici, nacrtati sledeće signale:



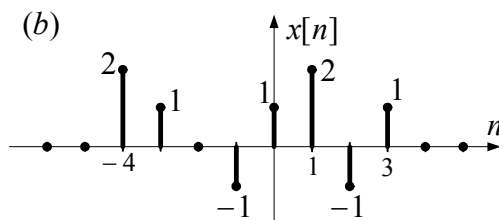
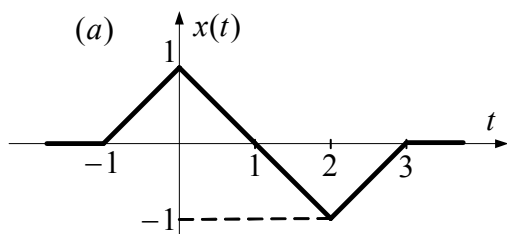
- | | |
|---|---|
| a) $y(t) = x(t-1)$ | b) $y(t) = x(1-t)$ |
| c) $y(t) = x(t/2-2)$ | d) $y(t) = x(2t+1)$ |
| e) $y(t) = x(1-2t)$ | f) $y(t) = x(t)x(-1-t)$ |
| g) Od $\{x(t)\}$ i Ev $\{x(t)\}$ | h) $y(t) = (x(t) - x(t-1))u(-t)$ |
| i) $y(t) = x(t)u(T-t)$, za $T = -2, -1, 0, 1, 2$ | j) $y(t) = x(T-t)u(t)$, za $T = -2, -1, 0, 1, 2$ |

12. Ako je $x[n]$ dat kao na slici, nacrtati sledeće signale:



- | | | |
|---|---------------------------|---------------------------|
| a) $y[n] = x[n-2]$ | b) $y[n] = x[2-n]$ | c) $y[n] = x[1-n/2]$ |
| d) $y[n] = x[2n+3]$ | e) $y[n] = x[2-2n]$ | f) $y[n] = x[n+1]x[-1-n]$ |
| g) Ev $\{x[n]\}$ i Od $\{x[n]\}$ | h) $y[n] = x[n] - x[n-1]$ | i) $y[n] = x[n]u[N-n]$ |
| j) $y[n] = x[N-n]u[n]$ za $N = -4, -2, 0, 2, 4$ | | |

13. Izračunati i nacrtati parni i neparni deo sledećih signala:



- | | |
|--|---|
| (c) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$, | (d) $x(t) = e^{-bt}u(t)$, ($b > 0$), |
| (e) $x[n] = \delta[n-2]$, | (f) $x[n] = a^n u[n]$. |

14. Dokazati sledeće osobine parnih i neparnih signala:

a) Ako je $x(t)$ neparan signal, onda je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$

b) Ako je $x(t)$ neparan signal, a $y(t)$ paran signal, tada je $z(t) = x(t)y(t)$ neparan signal.

c) Ako je $x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$ i $x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t) dt$$

d) Pokazati gore pokazane osobine i za odgovarajuće parne i neparne diskretne signale.

15. Na osnovu datih sledećih parnih ili neparnih delova signala $x(t)$ ili $x[n]$, uz dodatni uslov da $x(t) = 0$ za $t < 0$ ili $x[n] = 0$ za $n < 0$, odrediti i skicirati kompletan signal $x(t)$ ili $x[n]$. (Ako je potrebna bilo kakava dodatna informacija konstatovati je i učiniti ono što je moguće).

a) $x_e(t) = e^{-b|t|}$ b) $x_o(t) = \sin \omega_0 t$ c) $x_e[n] = u[n+2] - u[n-3]$ d) $x_o[n] = n$

16. Dokazati da je:

a) Konvolucija kontinualnih vremenskih signala asocijativna i distributivna operacija.

b) Konvolucija diskretnih vremenskih signala asocijativna i distributivna operacija.

17. Naći i nacrtati $y[n] = x[n] * h[n]$ za sledeće signale:

a) $x[n] = a^n u[n]$, $h[n] = b^n u[n]$ za $a \neq b$

b) $x[n] = h[n] = a^n u[n]$

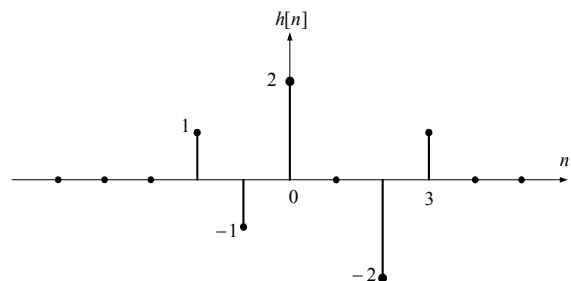
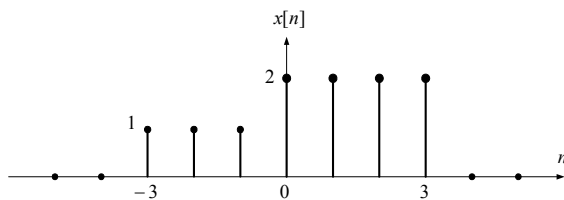
c) $x[n] = a^n u[n]$, $h[n] = b^{-n} u[-n]$

d) $x[n] = h[n] = u[n+n_1] - u[n-n_2]$ za $n_1, n_2 > 0$

e) $x[n] = (-1)^n (u[n] - u[n-7])$ i $h[n] = u[n+3]$

f) $x[n] = a^n u[n]$, $h[n] = \delta[n] - \delta[n-6]$,

g) $x[n]$ i $h[n]$ prikazane na sledećim slikama



18. Odrediti i skicirati $y(t) = x(t) * h(t)$ za sledeće signale:

a) $x(t) = e^{-at} u(t)$ i $h(t) = e^{-bt} u(t)$ ako je $a \neq b$

b) $x(t) = h(t) = e^{-at} u(t)$

c) $x(t) = h(-t) = e^{-at} u(t)$

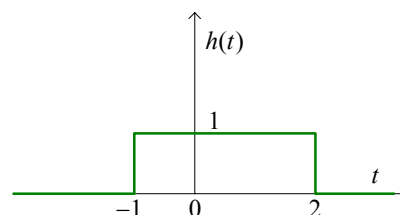
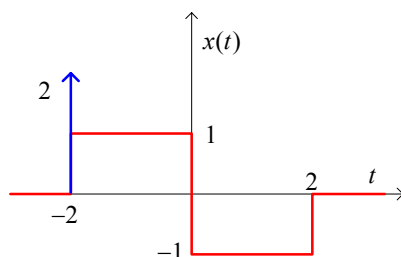
d) $x(t) = h(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2)$ ako je $t_2 > t_1 > 0$

e) $x(t) = t^k u(t)$ i $h(t) = u(t)$ za cijeli broj $k > 1$

f) $x(t) = u(t+2) - u(t-3)$ i $h(t) = \delta(t+2) + \delta(t-1)$

g) $x(t) = (\sin \omega_0 t) u(t)$ i $h(t) = u(t)$

h) $x(t)$ i $h(t)$ kao na slici.



19. Dokazati da važe sledeće osobine konvolucije $y(t) = x(t) * h(t)$ kontinualnih vremenskih signala $x(t)$ i $h(t)$:

a) Ako je $x(t)$ parna, a $h(t)$ neparna, tada je $y(t)$ neparna funkcija.

b) Ako su $x(t)$ i $h(t)$ neparne, tada je $y(t)$ parna funkcija.

c) Ako je $x(t)$ periodična funkcija, tada je i $y(t)$ periodična funkcija.

d) Skaliranje signala u vremenu: $y(ct) = cx(t) * h(ct)$, za $c > 0$.

e) Inverzija vremena: $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.

f) Pomeranje signala u vremenu: $y(t - t_1 - t_2) = x(t - t_1) * h(t - t_2)$.

g) Ako je površina ispod krive $x(t)$ $A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$, a površine A_h i A_y definisane analogno, dokazati da važi $A_y = A_x A_h$.

h) Ako je centar gravitacije (ili vreme kašnjenja) signala $x(t)$ definisan sa $D_x = \frac{A_{tx}}{A_x}$, gde je A_{tx} površina ispod krive $tx(t)$, a veličine D_h i D_y definisane analogno, dokazati da važi $D_y = D_x + D_h$.

i) Pokazati da osobine navedene u tačkama (a)-(h) važe i za konvoluciju diskretnih vremenskih signala: $y[n] = x[n] * h[n]$.

20. Ako su $x(t)$ i $h(t)$ periodični signali sa istom periodom T , onda konvolucija $y(t) = x(t) * h(t)$ ne konvergira. U tom slučaju može se modifikovati originalna definicija konvolucije i, u tom slučaju, definisati *periodična konvolucija*

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_0^T x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

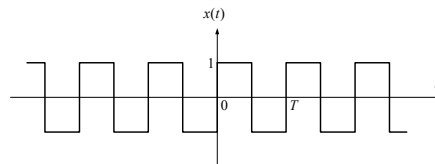
a) Pokazati da je $y(t)$ takođe periodičan signal sa periodom T .

b) Pokazati da interval integracije može biti bilo koji interval dužine T , tj.

$$y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

za proizvoljno izabranu tačku t_0

c) Izračunati i nacrtati periodičnu konvoluciju povorke bipolarnih kvadratnih četvrtki (pogledati sliku) sa samom sobom (tj. $h(t) = x(t)$)



Periodična konvolucija dva periodična diskretna signala $x[n]$ i $h[n]$ sa istom periodom N se definiše na sličan način

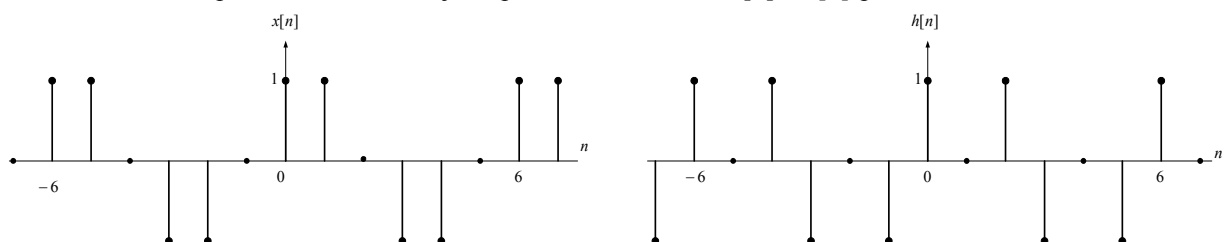
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k]$$

d) Ponoviti tačke a) i b) za slučaj diskretnih signala; pokazati da je $y[n]$ takođe periodičan signal sa periodom N i da važi

$$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x[k]h[n-k]$$

za proizvoljno izabranu tačku n_0 .

e) Izračunati i nacrtati periodičnu konvoluciju za periodične sekvence $x[n]$ i $h[n]$ prikazane sledećim slikama



21. Važna operacija u obradi signala je korelacija, vrlo slična konvoluciji. Funkcija kros-korelacije za dva signala je definisana kao

$$\phi_{xw}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) w^*(\tau) d\tau,$$

gde $w^*(t)$ označava kompleksnu konjugovanu vrednost signala $w(t)$. U specijalnom slučaju kada je $w(t) = x(t)$, funkcija

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) x^*(\tau) d\tau$$

se naziva autokorelacionom funkcijom signala $x(t)$.

- Pokazati da je definicija kros-korelacije ekvivalentna sa $\phi_{xw}(t) = x(t) * w^*(-t)$ i da se zbog toga autokorelaciona funkcija može napisati kao $\phi_{xx}(t) = x(t) * x^*(-t)$.
- Naći vezu između relacija $\phi_{xw}(t)$ i $\phi_{wx}(t)$ i takođe između $\phi_{xx}(t)$ i $\phi_{xx}(-t)$.
- Pokazati da ako $x(t)$ uzima realne vrednosti, onda je $\phi_{xx}(t)$ parna funkcija.
- Neka je $y(t)$ jednako zakašnjenom signalu $x(t-t_0)$. Izraziti $\phi_{yw}(t)$, $\phi_{yx}(t)$ i $\phi_{yy}(t)$ preko $\phi_{xw}(t)$ ili $\phi_{xx}(t)$.
- Naći i skicirati kros-korelacionu funkciju $\phi_{xw}(t)$ za $x(t) = e^{-at}$, $a > 0$ i $w(t) = u(t-2)$.
- Naći i skicirati autokorelacionu funkciju za $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$.
- Naći $\phi_{xx}(t)$ za kompleksni signal $x(t) = e^{(j\omega_0 - a)t}u(t)$.