

1. Ispitati osobine (posedovanje memorije, kauzalnost, linearnost, stacionarnost, stabilnost i invertibilnost) sistema opisanih sledećim ulazno-izlaznim relacijama:

a) $y(t) = \tan(x(t))$

b) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

c) $y(t) = Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

d) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$

e) $y(t) = x(t)u(t)$

f) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t - 1)d\tau$

g) $y(t) = x(t/3)$

h) $y[n] = Ev\{x[n]\} - Od\{x[n]\}$

i) $y[n] = e^{x[n]}$

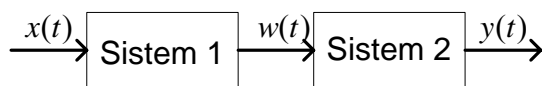
j) $y[n] = x[n+1]x[n-1]$

k) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+2} x[k]$

l) $y[n] = x[2n]$

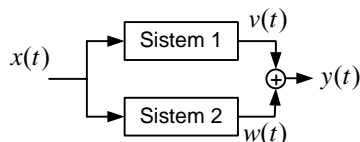
m) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+2} x[k]\delta[k]$

2. Posmatra se kaskadna veza dva sistema prikazana na slici. Odrediti istinitost svakog od navedenih iskaza; ako je iskaz neistinit, navesti kontraprimer koji to potvrđuje.



- Ako su sistemi 1 i 2 stacionarni, onda je i njihova kaskadna veza stacionaran sistem.
- Ako su sistemi 1 i 2 nestacionarni, onda je i njihova kaskadna veza nestacionaran sistem.
- Ako su sistemi 1 i 2 linearni, onda je i njihova kaskadna veza linearan sistem.
- Ako su sistemi 1 i 2 nelinearni, onda je i njihova kaskadna veza nelinearan sistem.
- Ako su sistemi 1 i 2 stabilni, onda je i njihova kaskadna veza stabilan sistem.
- Ako su sistemi 1 i 2 invertibilni, onda je i njihova kaskadna veza invertibilan sistem.
- Ako sistemi 1 i 2 poseduju memoriju, onda njihova kaskadna veza ne može biti bezmemorijski sistem.
- Ako je jedan od sistema kauzalan, a drugi nekauzalan, onda je njihova kaskadna veza nekauzalan sistem.
- Ako je jedan od sistema stabilan, a drugi nestabilan, onda je njihova kaskadna veza nestabilan sistem.
- Ako je jedan od sistema invertibilan, a drugi neinvertibilan, onda je njihova kaskadna veza neinvertibilan sistem.

3. Rešiti zadatak 2 za slučaj paralelne veze dva sistema prikazane na slici.



4. Operacija odabiranja signala $x(t)$ može se opisati sledećom ulazno-izlaznom relacijom:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT) .$$

a) Ispitati osobine sistema (kauzalnost, linearnost i stacionarnost) opisanog datom relacijom.

b) Ako je $x(t) = \cos 2\pi t$, skicirati izlazni signal $y(t)$, za $T = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{8}$.

c) Pošto je $y(t) = 0$ za svako t osim $t = kT$, odabiranje nije invertibilna operacija, u opštem slučaju. Međutim, ako se raspolože određenom apriornom informacijom o signalu $x(t)$, u nekim slučajevima moguće je rekonstruisati signal $x(t)$ na osnovu signala $y(t)$. Na primer, ako je poznato da je signal $x(t)$ polinomijalne forme $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N$, gde je N poznato, moguće je rekonstruisati signal $x(t)$ na osnovu $N+1$ -nog odbirka $x(kT)$. Pokazati na koji način se mogu odrediti koeficijenti $a_k, k = 0, 1, \dots, N$, a time i ulazni signal $x(t)$ za svako t , na osnovu odbiraka $x(kT), k = 0, 1, \dots, N$.

5. Izračunati i nacrtati izlaz $y(t)$ linearnog stacionarnog sistema, ako je poznat ulaz $x(t)$ i impulsni odziv $h(t)$.

- $x(t) = e^{at}u(-t)$; $h(t) = e^{-bt}u(t)$; $a, b > 0$
- $x(t) = e^{-at}u(t-1)$; $h(t) = e^{-bt}u(t+2)$; $a, b > 0$
- $x(t) = u(t+1) - t(t-2)$; $h(t) = u(t+2) - u(t-1)$
- $x(t) = e^{j\omega_0 t}u(t)$; $h(t) = e^{-j\omega_0 t}u(t)$
- $x(t) = te^{-at}u(t)$; $h(t) = e^{-at}u(t)$; $a > 0$
- $x(t) = e^{-at}u(t)$; $h(t) = \delta(t) - e^{-aT}\delta(t-T)$; $a, T > 0$

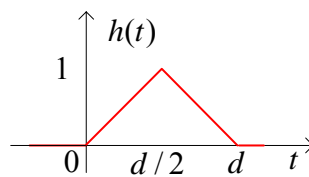
6. Izračunati i nacrtati odskočni odziv $s(t)$ sledećih linearnih stacionarnih sistema, opisanih impulsnim odzivom.

- $h(t) = e^{at}u(1-t)$; $a > 0$
- $h(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2)$; $t_1 < t_2$
- $h(t) = \delta(t-t_1) - \delta(t-t_2)$; $t_1 < t_2$
- $h(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$
- $h(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$
- $h(t) = \cos(2\pi)(u(t) - u(t-1))$
- $h(t) = \sin(\pi)(u(t) - u(t-3))$

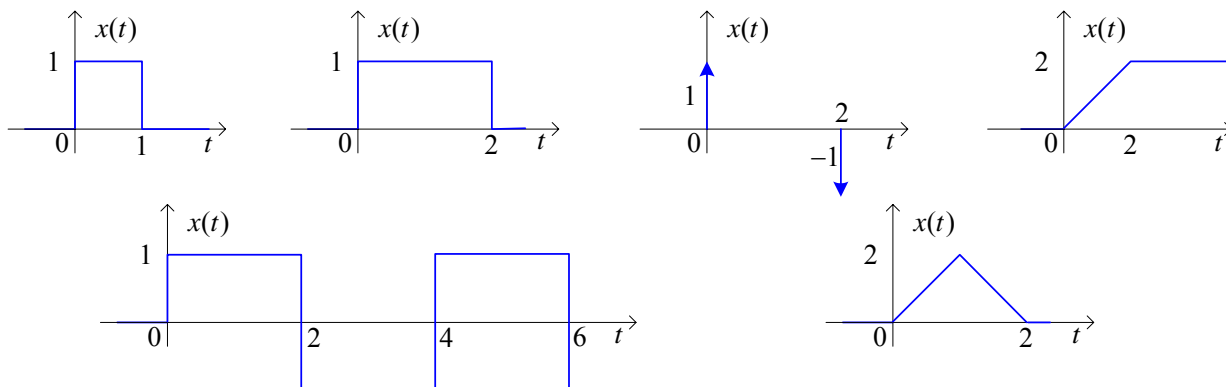
7. Izračunati i nacrtati odziv $y(t)$ sledećih sistema, ako je pobuda $x(t)$ povorka impulsa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k).$$

- $h(t) = u(t) - u(t-d)$; $d = 1, 2$ i 3
- $h(t) = \sin(\pi)(u(t) - u(t-d))$; $d = 1, 2$ i 3
- $h(t) = \delta(t) - \delta(t-d)$; $d = 1, 2$ i 3
- $h(t)$ dato slikom, za $d=1, 2, 3$ i 4 :



8. Za linearan stacionaran sistem čiji je odskočni odziv $s(t) = \sin(\pi) \cdot u(t)$, izračunati i nacrtati odziv na svaki od prikazanih pobudnih signala (u nekim slučajevima može biti korisno posmatrati kaskadu datog sistema i diferencijatora ili integratora).

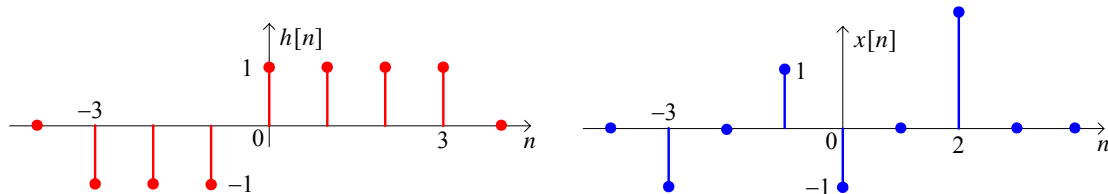


9. Idealni Hilbertov transformator je linearan stacionaran sistem koji na pobudu $x(t) = \cos \omega_0 t$ daje odziv $y(t) = \sin \omega_0 t$, za svako $\omega_0 \geq 0$. Naći odziv ovog sistema na sledeće pobudne signale:

- $x(t) = \cos(\omega_0 t + \pi/4)$
- $x(t) = \sin \omega_0 t$
- $x(t) = (\sin \omega_0 t)^2$
- $x(t) = (\cos \omega_0 t)^3$
- $x(t) = e^{j\omega_0 t}$
- $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

10. Koristeći princip superpozicije izračunati i nacrtati odziv $y[n]$ sledećih sistema na datu pobudu:

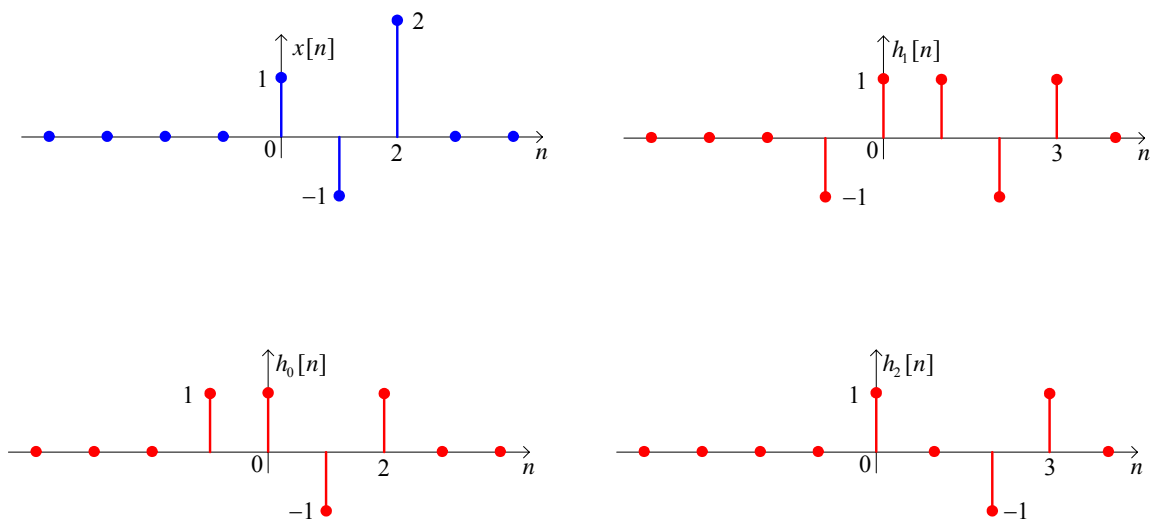
- a) $h[n] = u[n-1]$; $x[n] = u[n+2] - u[n-3]$
 b) $h[n] = u[-n]$; $x[n] = u[n-2] - u[n-5]$
 c) $h[n] = a^n u[n]$; $x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$
 d) $h[n] = u[n+2] - u[n-6]$; $x[n] = \delta[n+2] - \delta[n-1]$
 e) signali $h[n]$ i $x[n]$ dati sledećim slikama



11. Izračunati konvoluciju $y[n] = x[n] * h[n]$ i nacrtati odziv za svaki od sledećih slučajeva:

- a) $x[n] = a^n u[-n]$; $a > 1$; $h[n] = u[n]$
 b) $x[n] = a^n u[-n-1]$; $a > 1$; $h[n] = u[1-n]$
 c) $x[n] = a^n (u[n+2] - u[n-5])$; $h[n] = \delta[n+1] - a^2 \delta[n-1]$
 d) $x[n] = h[-n] = a^n u[n]$; $0 < a < 1$
 e) $x[n] = (ja)^n u[n]$; $h[n] = (-ja)^n u[n]$

12. Generalizacija principa superpozicije može se iskoristiti za nalaženje odziva linearnog nestacionarnog sistema. Ako je $h_k[n]$ odziv linearnog nestacionarnog sistema na impulsnu pobudu $\delta[n-k]$ i ako se ulaz sistema napiše u obliku $x[n] = \sum_k a_k \delta[n-k]$, tada je izlaz sistema $y[n] = \sum_k a_k h_k[n]$. Na osnovu datih relacija, naći izlaz $y[n]$ linearnog nestacionarnog sistema čiji su ulaz $x[n]$ i impulsni odzivi $h_k[n]$, $k = 0, 1, 2$ dati sledećim slikama:



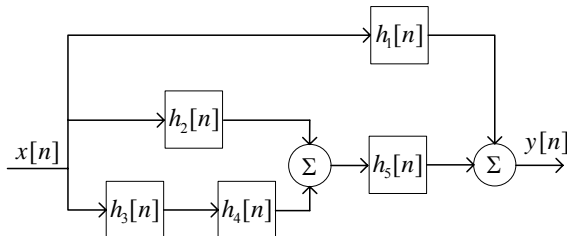
13. Za svaku od sledećih LTI ulaz/izlaz relacija, odrediti odgovarajuće impulsne odzive i ispitati da li su kauzalni i/ili stabilni:

- a) $y(t) = \int_t^\infty x(\tau) d\tau$
 b) $y(t) = \int_0^\infty e^\tau x(t-\tau-1) d\tau$
 c) $y[n] = 0.2 \sum_{k=-2}^2 x[n-k]$
 d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^\infty 2^{k-n} x[k+2]$

14. Ispitati da li su sledeći LTI sistemi stabilni:

- a) $h(t) = (1/t)u(t-1)$ b) $h(t) = [\cos \omega_0 t]u(t)$ c) $h(t) = (t-1)^{-2}u(-t)$ d) $h(t) = e^{-at}$, $a > 0$
 e) $h[n] = (n+1)2^{-n}u[n]$ f) $h[n] = 2^n u[1-n]$ g) $h[n] = (-1)^n u[n]$ h) $h[n] = (1/n!)u[n]$

15. Naći impulsni odziv sistema prikazanog na sledećoj slici pri čemu su odgovarajući $h_i[n]$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ impulsni odzivi LTI sistema.



16. U praksi se često pojavljuje slučaj kauzalnog sistema na čiji se ulaz dovodi kauzalan signal. Posmatrajmo kauzalni diskretni LTI sistem $h[n]$ sa kauzalnim ulazom $x[n]$, tj.

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

$$x[n] = 0, \quad n < 0$$

- a) Napisati konvolucionni izraz kojim dobijamo signal na izlazu vodeći računa o kauzalnosti sistema i signala na ulazu.
 b) Napisati konvolucionu sumu eksplicitno za $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$ i $y[3]$.
 c) Napisati jednačine iz tačke b) u obliku vektorske jednačine

$$y = Hx$$

gde su x i y vektori kolone

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad y = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix}$$

a) H matrica 4x4. Izvesti generalnu formu matrice H i odrediti H ako je $h[n] = a^n u[n]$.

d) Pokazati da, ako je $h[0] \neq 0$, možemo odrediti ulaz $x[n]$ za $n = 0, 1, 2, \dots, N$ na osnovu datih $y[n]$ i $h[n]$ za $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

e) Odrediti $x[n]$ ako je $y[n] = \cos(\pi n / 2)u[n]$, a $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

17. Pokazano je da za svaki invertibilan LTI sistem $h[n]$ postoji odgovarajući inverzni sistem $h_I[n]$ koji zadovoljava jednačinu

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

- a) Pokazati da, ako je $h[n]$ kauzalan, i $h_I[n]$ će biti kauzalan ako važi $h[0] \neq 0$,
 b) Napisati jednačine za $h_I[n]$, $n = 0, 1, 2, 3$, pod pretpostavkom da je $h[n]$ kauzalan i da važi $h[0] \neq 0$,
 c) Naći inverzne sisteme $h_I[n]$ za svaki od sledećih kauzalnih sistema:

(i) $h[n] = a^n u[n]$

(ii) $h[n] = \sin[(n+1)\pi / 4]u[n]$

(iii) $h[n] = u[n] + u[n-1]$

(iv) $h[n] = r[n] = (n+1)u[n]$

18. Posmatrajući rednu vezu diferencijatora i/ili integratora sa kontinualnim LTI sistemom $h(t)$, dokazati sledeće korisne relacije:

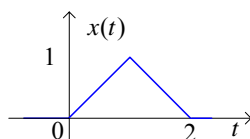
a) $y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$ gde je $y'(t)$ označava $\frac{dy(t)}{dt}$,

b) $y(t) = \int_{-\infty}^t [x'(\tau) * h(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t [x(\tau) * h'(\tau)] d\tau$,

c) $y(t) = h'(t) \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$,

d) $y(t) = x'(t) * s(t)$, gde je $s(t)$ odskočni odziv sistema,

e) Koristeći tačku d), naći i nacrtati $y(t)$ ako je $x(t)$ trougaoni signal prikazan na slici, a $h(t) = [\cos 4\pi t]u(t)$



19. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

ako je ulaz

$$x(t) = A[\cos \omega_0 t]u(t)$$

pri čemu je A realna konstanta i uzimajući da su početni uslovi jednaki 0. Bez dodatnog izračunavanja napisati rešenje ove jednačine ako je ulaz

$$x(t) = B[\cos \omega_0(t-1)]u(t-1)$$

20. Naći i nacrtati izlaz sistema opisanog diferencijalnom jednačinom

$$y(t) - \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

ako je

$$x(t) = u(-t),$$

za svaki od sledećih početnih uslova:

$$(a) \ y(0) = 0; \quad (b) \ y(0) = 1; \quad (c) \ y(0) = 2.$$

21. (a) Naći i nacrtati odskočni odziv $s(t)$ sistema drugog reda koji je opisan sledećom linearnom diferencijalnom jednačinom, usvajajući da je $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$:

$$(i) \ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) = 2x(t)$$

$$(ii) \ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(b) Naći i nacrtati impulsni odziv $h(t)$ za oba sistema.

(c) Nacrtati direktne realizacije oba sistema korišćenjem integratora.

22. (a) Rekursivnim rešavanjem diferencnih jednačina naći i nacrtati impulsne odzive $h[n]$ za svaki od sledećih kauzalnih LTI diskretnih sistema koji zadovoljavaju linearnu diferencnu jednačinu:

$$(i) \ y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] - x[n-3],$$

$$(ii) \ y[n] + y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1],$$

$$(iii) \ y[n] - 0.5y[n-2] = 2x[n] - x[n-2],$$

$$(iv) \ y[n] + 0.8y[n-2] = x[n-1],$$

$$(v) \ y[n] - \sqrt{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n].$$

(b) Odrediti da li su sledeći sistemi FIR ili IIR.

(c) Naći i nacrtati odgovarajuće odskočne odzive $s(t)$.

(d) Nacrtati odgovarajuće direktne realizacije.

23. Kao računovođa u banci, potrebno je da izračunate mesečna zaduženja poverenika koji je uzeo zajam za novu kuću u iznosu od 160,000\$. Neka $y[n]$ predstavlja neplaćeni iznos za odgovarajući mesec na koji se obračunava kamata, tj. glavnica (tada je $y[0] = 160,000$). Mesečna isplata je konstantan iznos C koji se sastoji od dve komponente: mesečne kamate i razlike u sukcesivnim glavicama. Ako je godišnja kamatna stopa 9%, mesečna stopa na glavnica od prethodnog meseca, $y[n-1]$, je 0.75%. Redukcija glavnice je jednostavno $y[n-1] - y[n]$. Na osnovu svega navedenog, mesečna isplata zadovoljava sledeću diferencnu jednačinu

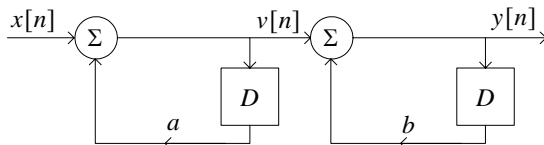
$$C = 0.0075y[n-1] + (y[n-1] - y[n]), \quad n \geq 1$$

a) Rešiti linearnu diferencnu jednačinu po $y[n]$, $n \geq 1$. (Pošto je ulaz C konstanta, i partikularno rešenje će takođe biti konstanta.)

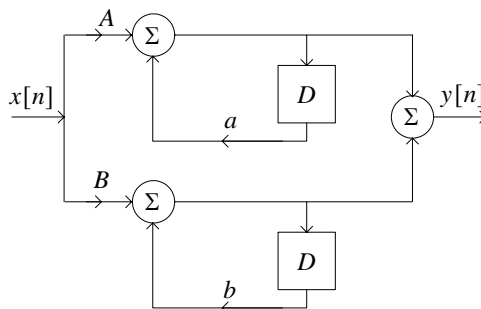
b) Identifikovati odziv na pobudu $y_{zs}[n]$ i odziv na početna stanja $y_{zi}[n]$ i objasniti njihov značaj u ovom kontekstu.

- c) Ako je rok za isplatu 20 godina, koliko je odgovarajuće mesečno potraživanje? Koliko ono iznosi ako je rok za otplatu 30 godina.
- d) Kolika iznosi ukupna kamata (u dolarima) po isteku perioda od 20 godina? Koliko to iznosi ako je rok za otplatu 30 godina?

24. Posmatrajmo jednostavan diskretni sistem drugog reda koji se sastoji od redne veze dve rekursivne strukture prvog reda, kao što je prikazano na slici



Uz ograničenje da je $a \neq b$, sistem takođe može biti realizovan kao paralelna veza dve rekursivne strukture prvog reda sa pojačanjima A i B kao što je prikazano na slici.



- a) Odrediti pojačanja A i B tako da impulzni odzivi gore prikazanih realizacija budu isti.
- b) Nacrtati ekvivalentnu direktnu realizaciju.

25. Nacrtati direktne realizacije kauzalnih diskretnih LTI sistema koji zadovoljavaju sledeće diferencne jednačine:

a) $2y[n] - 3y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 2x[n-2]$

b) $4y[n] - y[n-4] = x[n] - x[n-4]$

c) $y[n] = \sum_{k=0}^5 x[n-k]$

d) $y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-6]$

e) Pokazati da su diferencne jednačine iz tačaka c) i d) ekvivalentne.

26. a) Predstaviti sistem opisan datim integro-diferencijalnim jednačinama blok dijagramom u direktnoj realizaciji:

i) $2 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 16 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 48 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 64 \frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = x(t) + 4 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

ii) $3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) + 12 \int_{\tau=-\infty}^t y(\tau) d\tau + 12 \int_{\tau=-\infty}^t \int_{\sigma=-\infty}^{\tau} y(\sigma) d\sigma d\tau = 24x(t) + 6 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

b) Napisati linearnu diferencijalnu jednačinu po $x(t)$ i $y(t)$ koja opisuje sistem predstavljen sledećim blok dijagramom

