

1. Za svaki od sledećih periodičnih signala odrediti osnovnu učestanost ω_0 i Fourierove koeficijente a_k :

a) $x(t) = \sin(2t + \pi/4)$

b) $x(t) = \sin 2t + \cos 4t$

c) $x(t) = \cos 2t + \sin 3t$

d) $x(t) = (\sin 3t)(\cos 5t)$

e) $x(t) = |\sin 2t|$

f) $x(t) = \cos^3 t$

g) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-a(t-k)} [u(t-k) - u(t-1-k)]$

2. Za niskopropusni filter $h(t)$, za koji važi $H(jk\omega_0) = \begin{cases} 1, & |k| \leq 1 \\ 0, & |k| > 1 \end{cases}$, naći odzive $y(t)$ za svaki od ulaznih signala $x(t)$ iz prethodnog zadatka.

3. Odrediti Fourierove koeficijente c_k , izlaznog signala $y(k)$, za svaki od ulaznih signala $x(t)$ iz prvog zadatka ako je impulsni odziv LTI sistema jednak:

a) $h(t) = e^{-t}u(t)$

b) $h(t) = e^{-|t|}$

REŠENJA

1. a) Očigledno je $\omega_0 = 2$. Da bi rešenje bilo jasnije, razvićemo $x(t)$ korišćenjem $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin 2t \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) + \frac{1}{2} (e^{j2t} + e^{-j2t}) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2} \right) e^{j2t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2j} \right) e^{-j2t} \right] = \frac{(1-j)\sqrt{2}}{4} e^{j2t} + \frac{(1+j)\sqrt{2}}{4} e^{-j2t} \end{aligned}$$

odakle je, pošto je $\omega_0 = 2$,

$$a_{-1} = \frac{(1+j)\sqrt{2}}{4}$$

$$a_1 = \frac{(1-j)\sqrt{2}}{4}$$

b) Ovde je takođe $\omega_0 = 2$, a Fourierovi koeficijenti se vrlo jednostavno dobijaju:

$$a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = \frac{j}{2}$$

$$a_1 = -\frac{j}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

c) Ovde je osnovna učestanost signala jednaka $\omega_0 = 1$. U signalu nema komponente na osnovnoj učestanosti već su prisutni samo drugi i treći harmonik. Odgovarajući koeficijenti su:

$$a_{-3} = \frac{j}{2}$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{j}{2}$$

d) Kako je $x(t) = \sin 3t \cos 5t = \frac{1}{2} (\sin(3t+5t) + \sin(3t-5t)) = \frac{1}{2} (\sin 8t - \sin 2t)$, osnovna učestanost signala je $\omega_0 = 2$, pri čemu, osim osnovnog harmonika, postoji i 4. harmonik. Odgovarajući koeficijenti su:

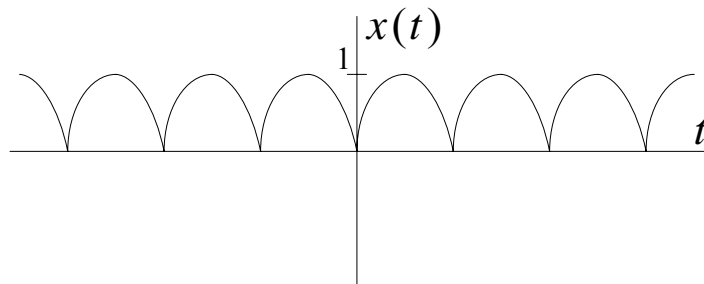
$$a_{-4} = \frac{j}{4}$$

$$a_{-1} = -\frac{j}{4}$$

$$a_1 = \frac{j}{4}$$

$$a_4 = -\frac{j}{4}$$

e) Signal $x(t)$ je prikazan na sledećoj slici.



Učestanost ovog signala je, očigledno, duplo veća od učestanosti signala $\sin 2t$, tj. $\omega_0 = 4$, odnosno, osnovna perioda signala je $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}$. Fourierove koeficijente možemo odrediti na sledeći način.

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T (\sin 2t) e^{-jk4t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) e^{-jk4t} dt = \frac{1}{2jT} \left(\int_0^T e^{jt(2-4k)} dt - \int_0^T e^{-jt(2+4k)} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2jT} \left(\frac{1}{j(2-4k)} e^{jt(2-4k)} \Big|_0^T - \frac{1}{-j(2+4k)} e^{-jt(2+4k)} \Big|_0^T \right) = \\
 &= \frac{1}{-2T} \left(\frac{1}{2-4k} (e^{j2T} e^{-j4kT} - 1) + \frac{1}{2+4k} (e^{-j2T} e^{-j4kT} - 1) \right) = \\
 &= \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{2-4k} (1 - e^{j\pi} e^{-j2k\pi}) + \frac{1}{2+4k} (1 - e^{-j\pi} e^{-j2k\pi}) \right)
 \end{aligned}$$

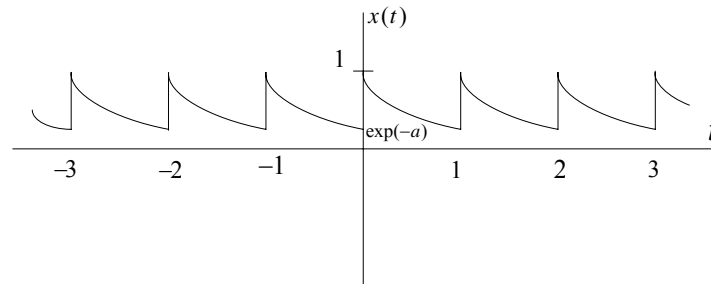
Kako je $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$ i $e^{-j2k\pi} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo da su koeficijenti

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2-4k} + \frac{1}{2+4k} \right)$$

Očigledno važi $a_{-k} = a_k$. Srednja (jednosmerna) vrednost signala, ili nulti harmonik, je $a_0 = \frac{2}{\pi}$.

f) $x(t) = \cos^3(t) = \left(\frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) \right) = \frac{1}{8} (e^{j3t} + 3e^{jt} + 3e^{-jt} + e^{-j3t})$, odakle je $a_{-3} = a_3 = 1/8$ i $a_{-1} = a_1 = 3/8$. Osnovna učestanost signala je $\omega_0 = 1$.

g) Signal $x(t)$ je prikazan na sledećoj slici.



Perioda signale je $T = 1$ sec, a osnovna učestanost je tada $\omega_0 = 2\pi$. Fourierovi koeficijenti se sada lako izračunavaju:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-at} e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^1 e^{-(a+j2k\pi)t} dt = \frac{1}{-(a+j2k\pi)} e^{-(a+j2k\pi)t} \Big|_0^1 = \frac{1-e^{-a}}{a+j2k\pi}$$

2. Očigledno je da ovaj niskopropusni filter propušta samo DC komponentu signala (nulti harmonik) i prvi harmonik.

a) Signal na izlazu je $y(t) = x(t) = \sin(2t + \pi/4)$,

b) $y(t) = \sin 2t$,

c) $y(t) = 0$,

d) $y(t) = -0.5 \sin 2t$,

e) $y(t) = a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} = -\frac{2}{3\pi} e^{-j4t} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} e^{j4t} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 4t$,

f) $y(t) = \frac{3}{4} \cos t$,

g) Rešenje ćemo dobiti istim postupkom kao u prethodnoj tački

$$\begin{aligned}
 y(t) &= a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} = (1 - e^{-a}) \left(\frac{1}{a - j2\pi} e^{-jt} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a + j2\pi} e^{jt} \right) = \\
 &= (1 - e^{-a}) \left(\frac{1}{a} + \frac{(a + j2\pi)e^{-jt} + (a - j2\pi)e^{jt}}{(a - j2\pi)(a + j2\pi)} \right) = \\
 &= (1 - e^{-a}) \left(\frac{1}{a} + \frac{a(e^{jt} + e^{-jt}) - j2\pi(e^{jt} - e^{-jt})}{a^2 + 4\pi^2} \right) = \\
 &= (1 - e^{-a}) \left(\frac{1}{a} + \frac{2a \cos t + 4\pi \sin t}{a^2 + 4\pi^2} \right)
 \end{aligned}$$

3. Izračunaćemo samo $H(jk\omega_0)$ za oba sistema, a postupak rešavanja je isti kao u prethodnom zadatku.

$$\text{a) } H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-(1+jk\omega_0)\tau} d\tau = \frac{1}{-(1+jk\omega_0)} e^{-(1+jk\omega_0)\tau} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+jk\omega_0}$$

b) Na isti način se dobija

$$\begin{aligned} H(jk\omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|} e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tau} e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{1-jk\omega_0} e^{(1-jk\omega_0)\tau} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(1+jk\omega_0)} e^{-(1+jk\omega_0)\tau} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{1-jk\omega_0} + \frac{1}{1+jk\omega_0} = \frac{2}{1+k^2\omega_0^2} \end{aligned}$$