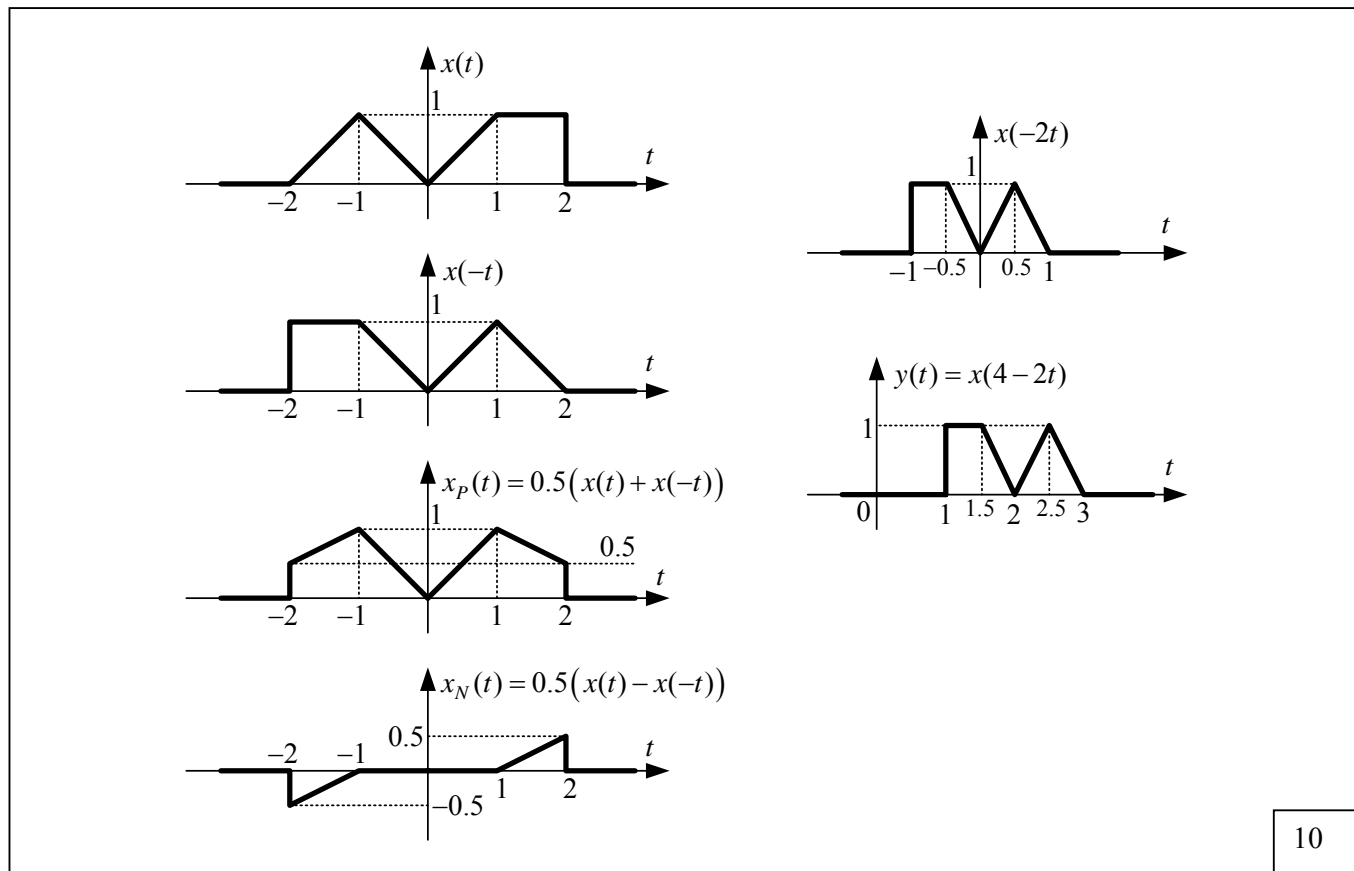


Ime i prezime:	Broj indeksa:	Odsek:	Zbir:
----------------	---------------	--------	-------

1. Signal $x(t)$ je prikazan na slici 1. Odrediti i nacrtati njegov parni i neparni deo i formirati signal $y(t) = x(4-2t)$, pa i njega skicirati.



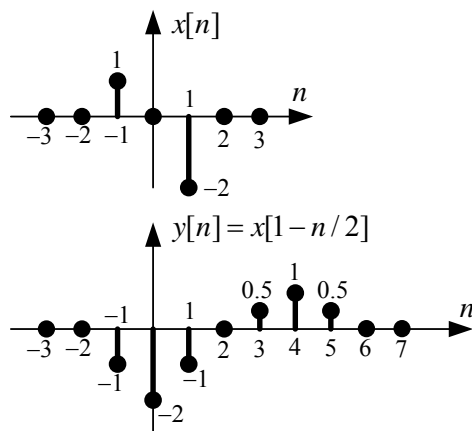
10

2. Dat je diskretni signal $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$.

- a) Napisati šta znači postupak interpolacije pa ga primeniti i skicirati signal $y[n] = x[1-n/2]$.

Postupak interpolacije se primenjuje u slučaju usporavanja diskretnih signala kada nezavisna promenljiva ne pripada skupu celih brojeva:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n - \text{parno} \\ 0.5(x[(n-1)/2] + x[(n+1)/2]), & n - \text{neparno} \end{cases}$$



$$y[-2] = x[2] = 0$$

$$y[0] = x[1] = -2$$

$$y[2] = x[0] = 0$$

$$y[4] = x[-1] = 1$$

$$y[6] = x[-2] = 0$$

$$y[-1] = (0-2)/2 = -1$$

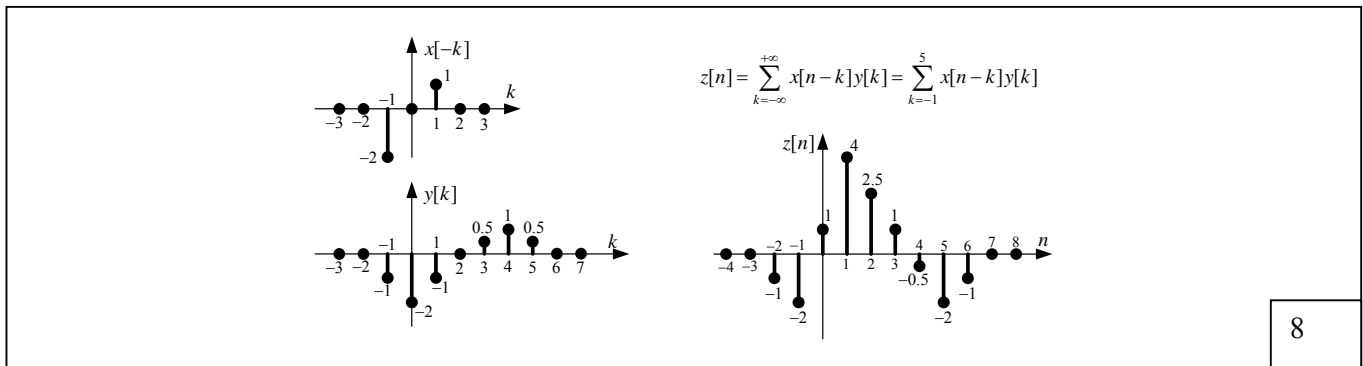
$$y[1] = (-2+0)/2 = -1$$

$$y[3] = (0+1)/2 = 0.5$$

$$y[5] = (1+0)/2 = 0.5$$

8

b) Skicirati signal $z[n]$ koji se dobija kao konvolucija signala $x[n]$ i $y[n]$.



8

3. Diskretni sistem je opisan sledećom relacijom koja definiše vezu između ulaznog signala $x[n]$ i izlaznog signala $y[n]$: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 0.5^{|k|} x[k]$

a) Da li ovaj sistem ima memoriju i da li je kauzalan?

Sistem ima memoriju i jeste kauzalan.

5

b) Ispitati linearost i stacionarnost ovog sistema.

$$\sum_{k=-\infty}^n 0.5^{|k|} (ax_1[k] + bx_2[k]) = a \sum_{k=-\infty}^n 0.5^{|k|} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^n 0.5^{|k|} x_2[k] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Sistem je linearan.

Sistem nije stacionaran. Na primer:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \delta[n - N] \Rightarrow y[n] = \begin{cases} 0, & n < N \\ 0.5^{|N|}, & n \geq N \end{cases} \neq \begin{cases} 0, & n < N \\ 1, & n \geq N \end{cases}$$

8

c) Da li je ovaj sistem invertibilan i ako jeste odrediti relaciju koja definiše njegov inverzni sistem.

$$y[n] = 0.5^{|n|} x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} 0.5^{|k|} x[k] = 0.5^{|n|} x[n] + y[n-1] \Rightarrow x[n] = 2^{|n|} (y[n] - y[n-1])$$

Sistem je invertibilan.

6

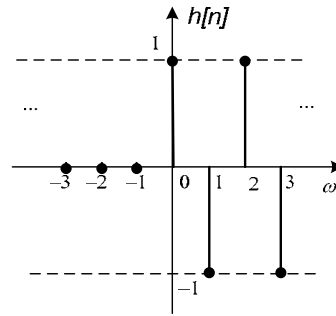
4. Diskretni LTI sistem je opisan sledećom relacijom koja povezuje ulazni i izlazni signal sistema: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (-1)^{n-k} x[k]$. Odrediti impulsni odziv ovog sistema, skicirati ga i na osnovu njega ispitati da li je sistem BIBO stabilan.

$$x[n] = \delta[n]: \quad h[n] = \sum_{k=-\infty}^n (-1)^{n-k} \delta[k] = (-1)^n u[n].$$

Razmatrajuci kriterijum apsolutne sumabilnosti impulsnog odziva, ustanovljujamo:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \rightarrow \infty,$$

tj. suma nije konačna, pa je zaključak da sistem nije BIBO stabilan.



10

5. Na ulaz sistema čiji je impulsni odziv $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ gde je $u(t)$ jedinična odskočna funkcija, je doveden signal $x(t) = (\cos(t))^3 + \sin(t)$.

a) Predstaviti signal $x(t)$ Fourier-ovim redom i odrediti koeficijente reda.

$$x(t) = \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)^3 + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \frac{e^{j3t} + 3e^{j2t-jt} + 3e^{jt-2jt} + e^{-j3t}}{8} + \frac{e^{jt}}{2j} - \frac{e^{-jt}}{2j} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2j} \right) e^{jt} + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2j} \right) e^{-jt} + \frac{1}{8} e^{j3t} + \frac{1}{8} e^{-j3t}$$

$$\omega_0 = \text{NZD}(1\text{rad/s}, 3\text{rad/s}) = 1\text{rad/s}, \quad a_1 = \frac{3}{8} - j\frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{3}{8} + j\frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{8}$$

10

b) Na osnovu rezultata iz prethodne tačke predstaviti odziv sistema $y(t)$ Fourier-ovim redom

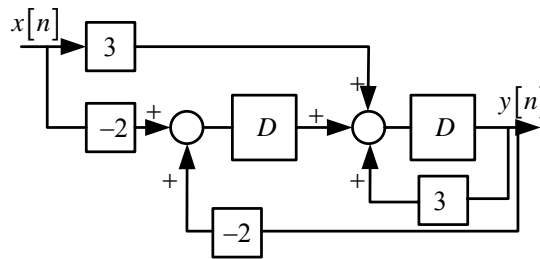
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k e^{jk\omega_0 t}, \quad H(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega}, \quad \omega_0 = 1\text{rad/s}, \quad b_k = H(jk\omega_0) = \frac{2}{1+jk}$$

$$b_1 = \frac{2}{1+j}, \quad b_{-1} = \frac{2}{1-j}, \quad b_3 = \frac{2}{1+j3}, \quad b_{-3} = \frac{2}{1-j3}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k e^{jk\omega_0 t} = a_1 b_1 e^{jt} + a_{-1} b_{-1} e^{-jt} + a_3 b_3 e^{j3t} + a_{-3} b_{-3} e^{-j3t}$$

10

6. Diskretni sistem je opisan blok dijagramom na slici 2.



Slika 2.

gde je sa D označen blok za jedinično kašnjenje.

a) Odrediti diferencnu jednačinu koja opisuje rad ovog sistema.

Ako signal na izlazu prvog kola za kašnjenje obeležimo sa $v[n]$, možemo pisati:

$$y[n+1] = 3y[n] + 3x[n] + v[n]; \quad v[n+1] = -2y[n] - 2x[n]; \quad y[n+1] = 3y[n] + 3x[n] - 2y[n-1] - 2x[n-1]$$

Sređivanjem se dobija diferencna jednačina odziva:

$$y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = 3x[n-1] - 2x[n-2]$$

5

b) Odrediti prvih pet odbiraka impulsnog odziva ovog sistema.

$$h[n] = 3h[n-1] - 2h[n-2] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$h[0] = 3h[-1] - 2h[-2] + 3\delta[-1] - 2\delta[-2] = 0$$

$$h[1] = 3h[0] - 2h[-1] + 3\delta[0] - 2\delta[-1] = 3$$

$$h[2] = 3h[1] - 2h[0] + 3\delta[1] - 2\delta[0] = 9 - 0 + 0 - 2 = 7$$

$$h[3] = 3h[2] - 2h[1] + 3\delta[2] - 2\delta[1] = 15$$

$$h[4] = 3h[3] - 2h[2] + 3\delta[3] - 2\delta[2] = 31$$

8

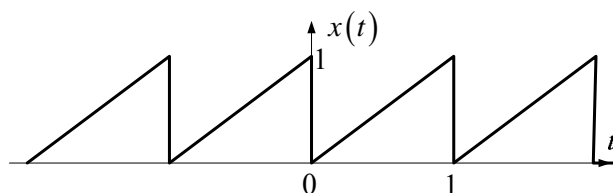
c) Na osnovu prethodne tačke odrediti prvih pet odskočnog odziv sistema.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \Rightarrow s[0] = h[0] = 0$$

$$s[1] = h[0] + h[1] = 3, \quad s[2] = 10, \quad s[3] = 25, \quad s[4] = 56$$

7

7. Za periodični signal prikazan slikom 3, ispitati konvergenciju Fourier-ovog reda a zatim odrediti koeficijente tog reda.



Slika 3.

Na osnovu drugog uslova $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$ možemo reći da je Fourierov red konvergentan. Sa slike se vidi da je $T = 1$, odakle je

$\omega_0 = 2\pi$. Tada su koeficijenti Fourierovog reda:

$$a_k = \int_0^1 t e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{-jk\omega_0}}{-jk\omega_0} + \frac{1}{k^2\omega_0^2} (e^{-jk\omega_0} - 1)$$

$$= \frac{e^{-jk2\pi}}{-jk2\pi} + \frac{1}{k^2 4\pi^2} (e^{-jk2\pi} - 1) = \frac{j}{2k\pi}; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$a_0 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

10