

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Zadatak 5.1. Odrediti bilateralnu Laplaceovu transformaciju signala:

a) $x(t) = (e^{-at} + te^{-bt})u(t)$

c) $x(t) = |t| e^{-a|t|}$

b) $x(t) = (-e^{-at} - te^{-bt})u(-t)$

d) $x(t) = e^{-at}[u(t) - u(t-T)], \quad T > 0$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt + \int_0^{\infty} te^{-(s+b)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s+b} te^{-(s+b)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{(s+b)^2} e^{-(s+b)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+a} + \frac{1}{(s+b)^2} = \frac{s^2 + (2b+1)s + a + b^2}{(s+a)(s+b)^2} \end{aligned}$$

Da bi Laplaceova transformacija postojala, podintegralne funkcije $e^{-(a+s)t}$ i $te^{-(b+s)t}$ moraju biti apsolutno konvergentne u vremenskom rasponu $t \in [0, \infty)$ tj. mora važiti $\text{Re}\{s\} + a > 0$ i $\text{Re}\{s\} + b > 0$. Pošto u isto vreme mora biti zadovoljeno i $\text{Re}\{s\} > -a$ i $\text{Re}\{s\} > -b$, oblast konvergencije (ili skraćeno ROC od engl. Region of Convergence) ove Laplaceove transformacije je definisana sa $\text{Re}\{s\} > \max(-a, -b)$.

Vrednosti $-a$ i $-b$ su vrednosti nula imenioca transformacije i nazivaju se polovima transformacije. Generalno, za signale koji su u vremenu ograničeni sa leve strane vredi da se oblast konvergencije Laplaceove transformacije nalazi desno od pozicije pola sa maksimalnom vrednošću realnog dela.

$$\begin{aligned} \text{b) } X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt - \int_{-\infty}^0 te^{-(s+b)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &+ \frac{1}{s+b} te^{-(s+b)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{(s+b)^2} e^{(s+b)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{(s+b)^2} = \frac{s^2 + (2b+1)s + a + b^2}{(s+a)(s+b)^2} \end{aligned}$$

Da bi Laplaceova transformacija postojala, podintegralne funkcije $e^{-(a+s)t}$ i $te^{-(b+s)t}$ moraju sada biti apsolutno konvergentne u vremenskom rasponu $t \in (-\infty, 0]$ tj. mora važiti $\text{Re}\{s\} + a < 0$ i $\text{Re}\{s\} + b < 0$. Zajednička oblast konvergencije ove Laplaceove transformacije je definisana sa $\text{Re}\{s\} < \min(-a, -b)$. Za signale koji su u vremenu ograničeni sa desne strane važi da se oblast konvergencije Laplaceove transformacije nalazi levo od pozicije pola sa minimalnom vrednošću realnog dela.

Bilateralna Laplaceova transformacija je potpuno definisana tek kad se uz njen analitički izraz doda i oblast konvergencije. Iz primera a) i b) se vidi da različiti signali mogu imati istu Laplaceovu transformaciju, pa je ROC neophodan da bi se znalo kojem tačno signalu ta transformacija odgovara.

c) Signal se može rastaviti na kauzalni i nekauzalni deo: $x(t) = |t| e^{-a|t|} = -te^{at}u(-t) + te^{-at}u(t)$. Sličnim izvođenjem kao i u tačkama a) i b), dobija se Laplasova transformacija:

$$X(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \Big|_{\text{Re}\{s\} < a} + \frac{1}{(s+a)^2} \Big|_{\text{Re}\{s\} > -a} = \frac{2}{(s+a)^2} \Big|_{-a < \text{Re}\{s\} < a}.$$

Da bi postojala oblast konvergencije, uslov je da a bude pozitivna konstanta i oblast konvergencije je definisana presekom oblasti konvergencije oba člana zbira. U suprotnom, kada je presek oblasti konvergencije članova prazan skup, signal nema Laplaceovu transformaciju. Do istog zaključka se može doći razmatranjem apsolutne integrabilnosti kauzalnog i nekauzalnog dela signala; za negativnu konstantu a , signali nisu apsolutno integrabilni, pa njihova Laplaceova transformacija ne konvergira.

d) Primenom rezultata tačke a), te osobina linearnosti i vremenske translacije Laplaceove transformacije, dobija se tražena transformacija signala:

$$x(t) = e^{-at}u(t) - e^{-aT}e^{-a(t-T)}u(t-T) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a} - e^{-aT}e^{-Ts}\mathcal{L}\left(e^{-at}u(t)\right) = \frac{1-e^{-T(s+a)}}{s+a}.$$

Na prvi pogled, „pol“ transformacije $s = -a$ definiše ROC kao $\text{Re}\{s\} > -a$, što se kosi sa pravilom da je Laplaceova transformacija signala ograničenog trajanja (i levo i desno ograničenih u vremenu) – cela kompleksna s -ravan. Međutim, $s = -a$ nije pol transformacije. Njega poništava nula transformacije takođe u $s = -a$, jedna od beskonačnog broja nula definisanih izrazom brojioca $1-e^{-T(s+a)}$. To se može videti ako se na transformaciju primeni L'Hospital-ovo pravilo u tački $s = -a$:

$$X(s=-a) = \frac{d/ds(1-e^{-T(s+a)})}{d/ds(s+a)} \bigg|_{s=-a} = \frac{Te^{-T(s+a)}}{1} \bigg|_{s=-a} = T,$$

gde se dobija konačna vrednost transformacije u iznosu T , što znači da u toj tački transformacija nema ni nulu (vrednost transformacije bi tad bila jednaka nuli), ni pol (transformacija bi imala beskonačno veliku vrednost). Stoga je teorijska postavka, ipak, tačna.

Zadatak 5.2. Odrediti unilateralnu Laplaceovu transformaciju sledećih signala:

- | | |
|--|--|
| a) $x(t) = 4 \sin(100t)u(t)$ | d) $x(t) = tu(t) - 2(t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$ |
| b) $x(t) = 5 \sin(100t-10)u(t-0.1)$ | e) $x(t) = u(t) - e^{-2t} \cos(10t)u(t)$ |
| c) $x(t) = 2u(t) + \delta(t-4) - \cos(5t)u(t)$ | f) $x(t) = \int_0^t e^{-2t} \cos(10t) dt$ |

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } X(s) &= \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = 4 \int_0^\infty \left(\frac{e^{j100t} - e^{-j100t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \frac{4}{2j} \frac{e^{-(s-j100)t}}{-(s-j100)} \bigg|_0^\infty - \frac{4}{2j} \frac{e^{-(s+j100)t}}{-(s+j100)} \bigg|_0^\infty \\ &= -\frac{2}{j(s-j100)}(0-1) + \frac{2}{j(s+j100)}(0-1) = \frac{2}{j} \left(\frac{1}{s-j100} - \frac{1}{s+j100} \right) = \frac{4 \cdot 100}{s^2 + 100^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } x(t) = 5 \sin(100(t-0.1))u(t-0.1) \leftrightarrow X(s) = 5e^{-0.1s} \mathcal{L}(\sin(100t)u(t)) = 5e^{-0.1s} \frac{100}{s^2 + 100^2}$$

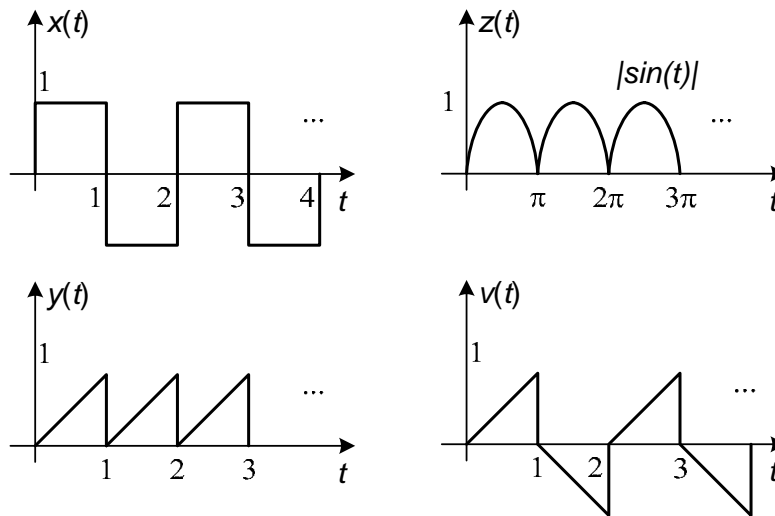
$$\text{c) } X(s) = \frac{1}{s} + e^{-4s} - \frac{s}{s^2 + 5^2}$$

$$\text{d) } X(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-2s} + e^{-3s})$$

$$\text{e) } e^{-at}f(t) \leftrightarrow F(s+a) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 10^2}$$

$$\text{f) Na osnovu tačke e) i } \int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{s+2}{s((s+2)^2 + 10^2)}$$

Zadatak V 5.3. Izračunati analitički unilateralnu Laplasovu transformaciju signala na slici:



Rešenje:

Laplaceova transformaciju dela signala $x(t)$ u vremenskom segmentu $t \in [0, 2]$ je:

$$f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) .$$

Periodični signal $f_p(t)$ sa osnovnom periodom T ima Laplaceov transformacioni par:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} F(s)e^{-kTs} = F(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}} ,$$

pa je Laplaceova transformacija signala $x(t)$:

$$X(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s(1 - e^{-2s})} .$$

Ostavlja se čitaocu da odredi Laplaceovu transformaciju dela signala $y(t)$, $z(t)$ i $v(t)$ u okviru jedne periode i primeni isti postupak za određivanje transformacije celokupnog signala.

Zadatak V 5.4. Date su Laplaceove transformacije analognih signala. Primenom inverzne Laplaceove transformacije odrediti odgovarajuće kauzalne signale:

a) $X(s) = \frac{10(s+1)}{s^2 + 4s + 3}$

d) $X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + 4s + 8)}$

g) $X(s) = \frac{1 - 2e^{-2s} + e^{-3s}}{s(s+4)^2}$

b) $X(s) = \frac{30(s+1)}{s^2 + 4s + 13}$

e) $X(s) = \frac{10(s+1)}{(s^2 + 9)(s+2)}$

h) $X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 - s - 6)}$

c) $X(s) = \frac{2s+100}{(s+1)(s+8)(s+10)}$

f) $X(s) = \frac{20}{s^2(s^2 + 10s + 16)}$

Rešenje:

a) $X(s) = \frac{10(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{10}{s+3} \leftrightarrow x(t) = 10e^{-3t}u(t)$

$$b) X(s) = \frac{30(s+1)}{(s+2)^2 + 3^2} = \frac{30(s+2)}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{10 \cdot 3}{(s+2)^2 + 3^2} \leftrightarrow x(t) = (30e^{-2t} \cos(3t) - 10 \sin(3t))u(t)$$

$$c) X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+8} + \frac{C}{s+10} \leftrightarrow x(t) = (Ae^{-t} + Be^{-8t} + Ce^{-10t})u(t)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X(s) = 1.55, B = \lim_{s \rightarrow -8} (s+8)X(s) = -4.67, C = \lim_{s \rightarrow -10} (s+10)X(s) = 4.44.$$

$$d) X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8}, A = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 5/4,$$

$$(A+B)s^2 + (4A+C)s + 8A = 10s + 10 \Rightarrow B = -A = -5/4, C = 10 - 4A = 5$$

$$X(s) = \frac{5/4}{s} + \frac{-5/4s+5}{(s+2)^2 + 2^2} = \frac{5/4}{s} + \frac{-5/4(s+2)}{(s+2)^2 + 2^2} + \frac{15/2}{(s+2)^2 + 2^2}$$

$$x(t) = (5/4 - 5/4e^{-2t} \cos(2t) + 15/4e^{-2t} \sin(2t))u(t)$$

$$e) X(s) = \frac{10(s+1)}{(s^2+9)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s+2}, C = \lim_{s \rightarrow -2} sX(s) = -\frac{10}{13}$$

$$(A+C)s^2 + (2A+B)s + 2B + 9C = 10s + 10 \Rightarrow A = -C = \frac{10}{13}, B = 10 - 2A = \frac{110}{13}$$

$$X(s) = \frac{10/13s}{s^2+3^2} + \frac{110/39 \cdot 3s}{s^2+3^2} + \frac{-10/13}{s+2} \leftrightarrow x(t) = (10/13 \cos(3t) + 110/39 \sin(3t) - 10/13 e^{-2t})u(t)$$

$$f) X(s) = \frac{20}{s^2(s^2+10s+16)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+8} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+8}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{20}{s^2(s^2+10s+16)} \right) = \frac{-20(2s+10)}{(s^2+10s+16)^2} \Big|_{s=0} = -\frac{25}{32}, B = s^2 \frac{20}{s^2(s^2+10s+16)} \Big|_{s=0} = \frac{5}{4}$$

$$C = (s+2) \frac{20}{s^2(s+2)(s+8)} \Big|_{s=-2} = \frac{5}{6}, D = (s+8) \frac{20}{s^2(s+2)(s+8)} \Big|_{s=-8} = -\frac{5}{96}$$

$$x(t) = \left(-\frac{25}{32} + \frac{5}{4}t + \frac{5}{6}e^{-2t} - \frac{5}{96}e^{-8t} \right) u(t)$$

$$g) F(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+4)^2}, A = s \frac{1}{s(s+4)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{16},$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left((s+4)^2 \frac{1}{s(s+4)^2} \right) = \frac{-1}{s^2} \Big|_{s=-4} = -\frac{1}{16}, C = (s+4)^2 \frac{1}{s(s+4)^2} \Big|_{s=-4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{4}te^{-4t} \right) u(t), \text{ pa je na osnovu osobina linearnosti i vremenske translacije}$$

$$\text{Laplaceove transformacije: } x(t) = f(t) - 2f(t-2) + f(t-3).$$

$$h) X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-2)(s+3)} = \frac{-5/3}{s} + \frac{3}{s-2} + \frac{-4/3}{s+3} \leftrightarrow x(t) = (-5/3 + 3e^{2t} - 4/3e^{-3t})u(t)$$

U Matlabovom Symbolic Toolbox-u postoje, pored već pomenutih naredbi *fourier* i *ifourier*, i naredbe *laplace* i *ilaplace*, kojima se realizuje simbolička unilateralna Laplaceova transformacija i inverzna transformacija, koje mogu biti od pomoći u rešavanju problema i verifikaciji ručno dobijenih rezultata.

Zadatak V 5.5. Primenom inverzne Laplaceove transformacije odrediti vremenski oblik kauzalnih signala:

$$a) X(s) = \frac{2s+4}{s(s+1)(s-4)^2}$$

$$c) X(s) = \frac{20(s+2)}{(s+1)((s+4)^2+25)(s^2+16)}$$

$$b) X(s) = \frac{s-40}{s(s+1)(s+5)} e^{-5s}$$

$$d) X(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4)(s+8)}$$

Zadatak 5.6. Odrediti graničnu vrednost $x(t \rightarrow \infty)$ (ukoliko granična vrednost postoji):

$$a) X(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2+4s+3)}$$

$$c) X(s) = \frac{4s^2+4s}{s^3+5s^2}$$

$$e) X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s-3)}$$

$$b) X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s+13)}$$

$$d) X(s) = \frac{7(s+3)}{s^2(s+5)}$$

$$f) X(s) = \frac{5(s+1)}{s(s^2+9)}$$

Rešenje:

a) Potrebno je prvo proveriti da li su svi polovi (nule imenioca) Laplaceove transformacije $sX(s)$ sa realnim delom manjim od nule, jer samo onda se može primeniti II granična teorema Laplaceove transformacije.

$$sX(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, p_1 = -1, p_2 = -3 \Rightarrow \text{postoji granična vrednost:}$$

$$x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}.$$

$$b) sX(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+13}, p_{1,2} = -2 \pm j3, \operatorname{Re}\{p_{1,2}\} = -2 \Rightarrow x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+13} \Big|_{s=0} = \frac{1}{13}.$$

$$c) sX(s) = s \frac{4s^2+4s}{s^3+5s^2} = \frac{4(s+1)}{s+5}, p_1 = -5 \Rightarrow x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{s+1}{s+5} \Big|_{s=0} = \frac{1}{5}.$$

d) $sX(s) = \frac{7(s+3)}{s(s+5)}, p_1 = 0, p_2 = -5 \Rightarrow$ ne postoji granična vrednost. Radi provere, odredimo vremenski oblik signala $x(t)$ pomoću inverzne Laplaceove transformacije za datu transformaciju $X(s)$:

$$X(s) = \frac{7(s+3)}{s^2(s+5)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+5}, (A+C)s^2 + (5A+B)s + 5B = 7s+21 \Rightarrow B = \frac{21}{5}, A = \frac{14}{25} = -C$$

$$\leftrightarrow x(t) = \left(\frac{14}{25} + \frac{21}{5}t - \frac{14}{25}e^{-5t} \right) u(t).$$

Vidi se da član $21/5tu(t)$ (koji upravo odgovara polu $p_1 = 0$) čini da signal $x(t)$ teži beskonačnosti, pa konačna granična vrednost ne postoji.

$$e) sX(s) = \frac{10(s+1)}{(s+0.646)(s-4.646)}, p_1 = -0.646, p_2 = 4.646 \Rightarrow \text{ne postoji granična vrednost.}$$

$$f) sX(s) = \frac{5(s+1)}{s^2+9}, p_{1,2} = \pm j3, \operatorname{Re}\{p_{1,2}\} = 0 \Rightarrow \text{ne postoji granična vrednost.}$$