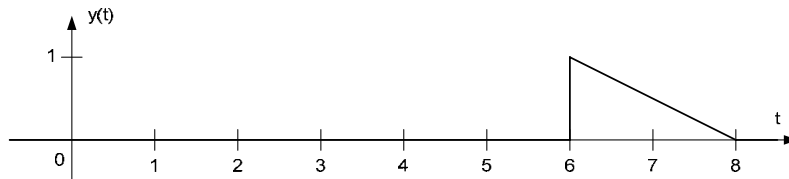


Ime i prezime studenta: _____ Broj indeksa: _____

1. Kontinualni signal $x(t)$ glasi $x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$. a) Skicirati i napisati analitički oblik signala $y(t) = x(4 - t/2)$.

Ako usvojimo da je $w(t) = x(-t/2)$, tada je $y(t) = w(t-8) = x\left(\frac{-(t-8)}{2}\right) = x\left(4 - \frac{t}{2}\right)$. Izgled signala $y(t)$ je prikazan na

sledećoj slici. Analitički oblik signala $y(t)$ je $y(t) = \begin{cases} 4 - \frac{t}{2}, & t \in [6, 8] \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$



6

b) Sračunati i skicirati signal $z(t)$ koji se dobija kao konvolucija signala $x(t)$ i $y(t)$.

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^1 \tau y(t-\tau)d\tau$. Ukoliko uvedemo smenu $t-\tau = \lambda$ dobićemo da je

$$z(t) = \int_{t-1}^t (t-\lambda)y(\lambda)d\lambda = \begin{cases} 0, & t < 6 \\ \int_6^t (t-\lambda)y(\lambda)d\lambda, & t \in [6, 7] \\ \int_{t-1}^t (t-\lambda)y(\lambda)d\lambda, & t \in [7, 8], \\ \int_{t-1}^8 (t-\lambda)y(\lambda)d\lambda, & t \in [8, 9] \\ 0, & t \geq 9 \end{cases} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (t-\lambda)\left(4 - \frac{\lambda}{2}\right)d\lambda = \left(4t\lambda - \left(\frac{t}{4} + 2\right)\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

9

2. a) Za sistem čija je veza između ulaznog signala $x(t)$ i $y(t)$ data: $y(t) = x^3(t) - 1$ ispitati da li ima memoriju, da li je kauzalan, linearan, vremenski stacionaran, invertibilan i BIBO stabilan.

Sistem nema memoriju jer vrednost signala na izlazu $y(t)$ zavisi isključivo od ulaza u istom trenutku.

Sistem jeste kauzalan jer odziv sistema $y(t)$ ne zavisi od budućih vrednosti signala na ulazu.

Sistem nije linearan jer ne zadovoljava princip superpozicije.

Sistem jeste vremenski stacionaran.

Sistem jeste invertibilan jer jednačina $x(t) = \sqrt[3]{y(t)+1}$ ima jedinstveno rešenje u skupu realnih brojeva.

Sistem jeste BIBO stabilan jer ako je za svako t , $|x(t)| < B_1$, onda je i $|y(t)| < B_2 = B_1^3 + 1$.

6

b) Dati primer diskretnog sistema koji je sa memorijom, antikauzalan, linearan i vremenski invarijantan.

Primera ovakvih sistema ima beskonačno mnogo. Najjednostavniji od njih je

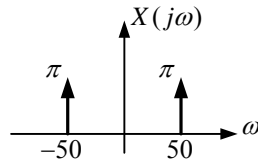
$$y[n] = x[n+p], \quad p > 0$$

4

3. Posmatra se signal $x(t) = \cos(50t)$. a) Sračunati i skicirati spektar $X(j\omega)$.

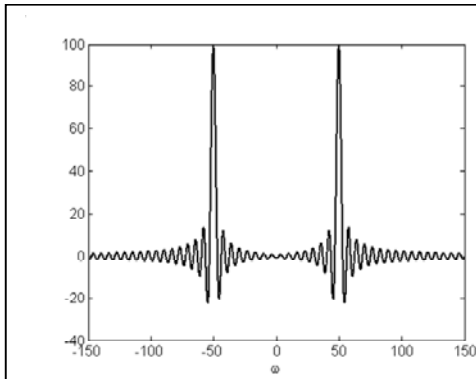
Signal $x(t)$ je periodičan sa $\omega_0 = 50[\text{rad/s}]$, pa se može razviti u Fourier-ov red: $x(t) = \frac{1}{2}e^{-j50t} + \frac{1}{2}e^{j50t}$

$$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}. \text{ Sada je: } X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi (a_{-1}\delta(\omega + \omega_0) + a_1\delta(\omega - \omega_0)) = \pi\delta(\omega - 50) + \pi\delta(\omega + 50)$$



5

b) Sračunati i skicirati spektar signala $y(t) = \begin{cases} x(t); & t \in [-100, 100] \\ 0; & \text{inace} \end{cases}$



$$Y(j\omega) = \int_{-100}^{+100} \cos(50t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin 100(\omega - 50)}{\omega - 50} + \frac{\sin 100(\omega + 50)}{\omega + 50}$$

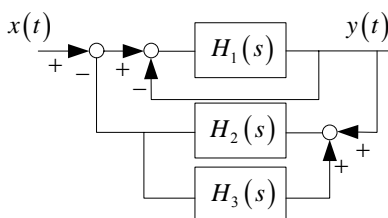
5

c) Obrazložiti izbor periode T kojom se može izvršiti odabiranje signala $x(t)$, pa za tako izabrano T sračunati i skicirati spektar diskretizovanog signala $x(t)$.

$$\omega_{gr} = 50[\text{rad/s}], \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_{gr} = 100[\text{rad/s}] \Rightarrow T \leq \frac{\pi}{50}[\text{s}]$$

5

4. Strukturni blok dijagram kontinualnog sistema prikazan je na slici 3a. a) Odrediti ekvivalentnu funkciju prenosa celog sistema



Slika 3.a

$$G(s) = \frac{\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)}}{1 + \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_3(s)}} = \frac{H_1(s) - H_1(s)H_2(s)H_3(s)}{1 + H_1(s) + H_1(s)H_2(s) - H_2(s)H_3(s) - H_1(s)H_2(s)H_3(s)}$$

5

b) Usvajajući da je $H_1(s) = 1/(s+1)$, $H_2(s) = 3/(s+6)$ i $H_3(s) = K$, pri čemu svaki od ovih blokova predstavlja kauzalne sisteme, ispitati stabilnost sistema za $K = K_1 = 2$ i za $K = K_2 = 3$ i odrediti graničnu vrednost odskočnog odziva sistema u beskonačnosti za ove dve vrednosti parametra K .

$$G(s) = \frac{s+6-3K}{s^2 + (8-3K)s + 15-6K}$$

$$K = K_1 = 2 \Rightarrow G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow \text{polovi: } s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2} \Rightarrow \text{stabilan sistem (oba pola u levoj poluravni)}$$

$$\text{Druga granična teorema Laplasove transformacije: } y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$$

$$K = K_2 = 3 \Rightarrow G(s) = \frac{s-3}{s^2 - s - 3} \Rightarrow \text{polovi: } s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \text{nestabilan sistem (jedan pol u desnoj poluravni)}$$

Pošto je sistem nestabilan, ne može se primeniti druga granična teorema Laplasove transformacije.

$$|y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

5

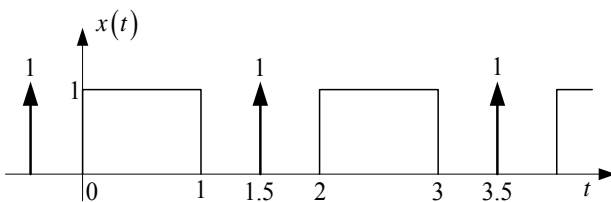
c) Ako je $K = 0$ odrediti impulsni odziv ovog sistema $h(t)$.

$$K = 0 \Rightarrow G(s) = \frac{s+6}{s^2 + 8s + 15} = \frac{s+6}{(s+3)(s+5)} = \frac{1.5}{s+3} - \frac{0.5}{s+5}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = 1.5e^{-3t}u(t) - 0.5e^{-5t}u(t)$$

5

5. Odrediti Furijeov red periodičnog signala prikazanog na slici i ispitati njegovu konvergenciju.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^2 x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_1^2 \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-jk\omega_0} - 1}{-jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0 1.5} \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{jk\pi} - 1}{jk\pi} + e^{jk\pi 1.5} \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{(-1)^k - 1}{jk\pi} + (-j)^k \right]$$

Uslov konvergencije je ispunjen jer je $\int_T |x(t)| dt = 2 < \infty$.

15

6. Diskretni kauzalni sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n+2] + 0.2y[n+1] - 0.35y[n] = x[n]$

a) Odrediti funkciju diskretnog prenosa ovog sistema.

$$y[k] + 0.2y[k-1] - 0.35y[k-2] = x[k-2] / \mathcal{Z}$$

$$Y(z)(1 + 0.2z^{-1} - 0.35z^{-2}) = z^{-2}X(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.35z^{-2}} = \frac{1}{z^2 + 0.2z - 0.35}$$

5

b) Ispitati stabilnost ovog sistema.

$$\text{polovi: } z_{1,2} = \frac{-0.2 \pm \sqrt{0.04 + 4 \cdot 0.35}}{2} = \begin{cases} -0.7 \\ 0.5 \end{cases}$$

Oba pola unutar jediničnog kruga \Rightarrow stabilan sistem.

5

c) Ako je ulazni signal $x[n] = u[n-1]$ a početni uslovi $y[0] = 0$ i $y[1] = 1$, odrediti odziv ovog sistema.

$$y[n+2] + 0.2y[n+1] - 0.35y[n] = x[n] / \mathcal{Z}$$

$$(z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]) + 0.2(zY(z) - zy[0]) - 0.35Y(z) = X(z)$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{u[n-1]\} = z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)(z+0.7)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+0.7} + \frac{C}{z-0.5}; A = \frac{1}{0.5 \cdot 0.7} \cong 1.1765, B = \frac{2.19}{1.7 \cdot 1.2} \cong 1.0735, C = -\frac{0.75}{0.5 \cdot 1.2} = -1.25$$

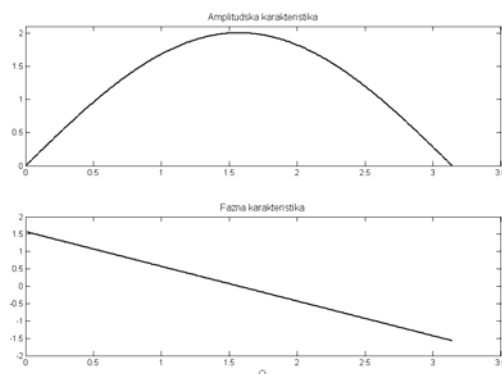
$$y[n] = Au[n-1] + B(-0.7)^{n-1}u[n-1] + C0.5^{n-1}u[n-1]$$

$$= (A + B \cdot (-0.7)^{n-1} + C \cdot 0.5^{n-1})u[n-1]$$

5

7. Impulsni odziv kauzalnog diskretnog sistema je $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$. Odrediti i skicirati amplitudsku i faznu karakteristiku frekvencijskog odziva ovog sistema.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} = 1 - z^{-2} \quad ; \quad H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j2\Omega} = 1 - \cos(2\Omega) + j \sin(2\Omega) = \sqrt{2(1 - \cos(2\Omega))} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{\sin 2\Omega}{1 - \cos 2\Omega}\right)}$$



15