

OSNOVNE OSOBINE SISTEMA

Zadatak 2.1. Dati su sistemi sa ulaznim signalom x i izlaznim signalom y , opisani sledećim zakonitostima delovanja:

$$(i) \quad y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) - x(t-10), & t \geq 0 \end{cases} = (x(t) - x(t-10))h(t),$$

$$(ii) \quad y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) - x(t-10), & x(t) \geq 0 \end{cases} = (x(t) - x(t-10))h(x(t)).$$

Utvrditi da li su sistemi:

- a) linearni, b) stacionarni, c) sa memorijom, d) kauzalni.

Rešenje:

a) Uvodeći oznaku $x(t) \mapsto y(t)$, u značenju „na pobudu $x(t)$ sistem daje odziv $y(t)$ “, imamo:

Sistem (i):

$$\begin{aligned} x_1(t) \mapsto y_1(t) &= (x_1(t) - x_1(t-10))h(t), \quad x_2(t) \mapsto y_2(t) = (x_2(t) - x_2(t-10))h(t) \\ ax_1(t) + bx_2(t) \mapsto &[(ax_1(t) + bx_2(t)) - (ax_1(t-10) + bx_2(t-10))]h(t) \\ &= [ax_1(t) + bx_2(t) - ax_1(t-10) - bx_2(t-10)]h(t) \\ &= a[x_1(t) - x_1(t-10)]h(t) + b[x_2(t) - x_2(t-10)]h(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Linearna kombinacija pobude izaziva istu linearnu kombinaciju odziva na pojedinačne pobude, što znači da je sistem linearan.

Sistem (ii):

$$\begin{aligned} x_1(t) \mapsto y_1(t) &= (x_1(t) - x_1(t-10))h(x_1(t)), \\ x_2(t) \mapsto y_2(t) &= (x_2(t) - x_2(t-10))h(x_2(t)) \\ ax_1(t) + bx_2(t) \mapsto &[(ax_1(t) + bx_2(t)) - (ax_1(t-10) + bx_2(t-10))]h(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= a[x_1(t) - x_1(t-10)]h(ax_1(t) + bx_2(t)) + b[x_2(t) - x_2(t-10)]h(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &\neq ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Zaključak je da sistem (ii) nije linearan.

b) $x(t) \mapsto y(t)$ i neka $x(t-t_1) \mapsto y_1(t)$ tj. za pobudu zakašnjenu za t_1 , sistem generiše odziv $y_1(t)$. Ako je $y_1(t)$ jednako vremenski zakašnjenom odzivu na originalnu pobudu $y(t-t_1)$, sistem je stacionaran.

Sistem (i):

$$\begin{aligned} x(t) \mapsto y(t) &= (x(t) - x(t-10))h(t), \\ x(t-t_1) \mapsto y_1(t) &= (x(t-t_1) - x(t-t_1-10))h(t) \\ y(t-t_1) &= (x(t-t_1) - x(t-t_1-10))h(t-t_1) \neq y_1(t), \end{aligned}$$

pa sistem (i) nije stacionaran. *Generalno, ukoliko funkcionalna zavisnost koja opisuje sistem zavisi eksplicitno od vremena – sistem nije stacionaran.* U razmatranom sistemu (i), eksplicitna vremenska zavisnost je $h(t)$ tj. sistem se ponaša različito pre trenutka $t = 0$ ($y \equiv 0$, bez obzira kakva je pobuda x) i posle njega (kada je y linearna kombinacija ulaznog signala u trenutku posmatranja i ulaznog signala zakašnjenog za 10sec).

Sistem (ii):

$$\begin{aligned}x(t) &\mapsto y(t) = (x(t) - x(t-10))h(x(t)), \\x(t-t_1) &\mapsto y_1(t) = (x(t-t_1) - x(t-t_1-10))h(x(t-t_1)) \\y(t-t_1) &= (x(t-t_1) - x(t-t_1-10))h(x(t-t_1)) = y_1(t),\end{aligned}$$

pa sistem (ii) jeste stacionaran, jer $y(t)$ funkcionalno ne zavisi eksplicitno od vremena.

c) Sistem *nema* memoriju ukoliko u svakom vremenskom trenutku t vrednost svog izlaza y oformljava isključivo na osnovu vrednosti ulaznog signala x u tom istom vremenstkom trenutku. U suprotnom – sistem ima memoriju. Za diskretne sisteme vredi isto, samo je u pitanju da li se odbrak $y(n)$ oformljava isključivo na osnovu $x(n)$, kada sistem nema memoriju, ili ne, pa je sistem sa meorijom. Sistemi razmatrani u zadatku zavise od zakašnjenog ulaznog signala, pa oba ova sistema imaju memoriju.

d) Sistem je kauzalan ako vrednost njegovog tekućeg izlaza ne zavisi od ulaznog signala u budućnosti. Oba razmatrana sistema su kauzalna. Primeri nekauzalnih sistema su operatori izdvajanja parnog i neparnog dela signala. Uzmimo npr. $y(t) = \text{Ev}\{x(t)\} = 1/2 \cdot (x(t) + x(-t))$. Kada je $t < 0$, $y(t)$ se oformljava, pored $x(t)$ iz istog vremenskog trenutka, i na osnovu $x(-t)$, koje je u budućnosti ($-t > 0 > t$).

Zadatak 2.2. Ispitati invertibilnost sistema:

$$\begin{array}{ll}(\text{i}) & y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \\(\text{ii}) & y(t) = x(t+5), \\(\text{iii}) & y(t) = x(n)h(n), \\(\text{iv}) & y(t) = x^2(t-1), \\(\text{v}) & y(t) = x^2(t), \\(\text{vi}) & y(t) = x^2(t+1).\end{array}$$

Rešenje:

Sistem je invertibilan ako se, na osnovu poznavanja vrednosti njegovog izlaza $y(t)$ u celokupnom vremenskom opsegu $t \in (-\infty, +\infty)$, može *jednoznačno* rekonstruisati vrednost ulaznog signala $x(t)$ za svaki vremenski trenutak t .

Sistem (i) je invertibilan jer se vrednost ulaznog signala može jednoznačno odrediti kao

$$x(t) = \int_{\lambda=-\infty}^t y(\lambda) d\lambda,$$

gde se vidi da je nužno poznavati vrednost izlaza ne samo u tekućem trenutku, već, u ovom slučaju, i iz prošlosti.

Invertibilnost sistema ne treba mešati sa inverznošću matematičkih funkcija. Matematičke funkcije ne operišu u vremenu, već prosto preslikavaju realne (ili diskretne) vrednosti domena u realne (ili diskretne) vrednosti kodomena. Za njih je uslov invertibilnosti da su jednoznačna (1-1) preslikavanja. Sa druge strane, sistemi operišu u vremenu i, smatrajući da poznamo sve vrednosti izlaza u vremenu, invertibilnost sistema se pokazuje izvođenjem relacije koja iz izlaznog signala rekonstruiše ulazni signal u proizvoljnom trenutku. Dobijena relacija predstavlja zakonitost po kojoj operiše *inverzni sistem*.

Invertibilnost sistema ne treba mešati ni sa posedovanjem memorije, ni sa kauzalnošću. Sistem koji nema memoriju – sigurno je kauzalan, ali su sve druge kombinacije osobina sistema moguće. Sistem (ii) $y(t) = x(t+5)$ nije kauzalan, ali jeste invertibilan, jer se ulazni signal za svaki vremenski trenutak može jednoznačno odrediti kao $x(t) = y(t-5)$.

Neinvertibilnost sistema se dokazuje kontraprimerom tj. pokazivanjem da, na osnovu poznavanja izlaza y sistema u celokupnom opsegu vremena, ne možemo odrediti vrednost ulaza bar u jednom trenutku vremena (a možda i za vremenski segment ili u celom vremenskom opsegu) ili se dobija višeznačno rešenje za ulazni signal. Sistem (iii) $y(t) = x(n)h(n)$ nije invertibilan jer se vrednosti ulaznog signala pre odbirka $n = 0$ ni na koji način ne mogu rekonstruisati iz izlaznog signala. Za sistem (iv) $y(t) = x^2(t-1)$ je mogući ulazni signal i $x_1(t) = \sqrt{y(t+1)}$ i $x_2(t) = -\sqrt{y(t+1)}$, što nije jednoznačno, pa sistem nije invertibilan, iako je kauzalan (i sa memorijom). Sistem (v) $y(t) = x^2(t)$ nema memoriju i kauzalan je, ali nije invertibilan iz istih razloga, dok sistem (vi) $y(t) = x^2(t+1)$ nije ni invertibilan ni kauzalan.

Linearni stacionarni sistemi, bilo analogni ili diskretni, su uvek invertibilni i njihovi inverzni sistemi se mogu lako odrediti primenom Laplaceove, odnosno z -transformacije. Dokaz ovog tvrđenja ostravlja se za poglavlja o navedenim transformacijama.

Zadatak 2.3. Ispitati stabilnost sistema:

$$(i) \quad y(t) = 3x(t) - 2x(t-4),$$

$$(ii) \quad y(n) = 3y(n-1) + x(n).$$

Rešenje:

Sistem je stabilan sa stanovišta ulaz – izlaz (BIBO stabilan, od engl. Bounded Input –Bounded Output) ukoliko svaki ulaz amplitude ograničene realnom konstantom B daje izlaz amplitude ograničene realnom konstantom $f(B)$, gde je $f(\cdot)$ pravilna matematička funkcija (diferencijabilna i konačna u svakoj tački). BIBO stabilnost sistema dokazuje se određivanjem funkcije $f(\cdot)$, dok se nestabilnost dokazuje pronalaženjem kontraprimera tj. nalaženjem ulaza ograničene amplitude koji izaziva neograničeno povećavanje amplitude izlaznog signala.

Za sistem (i) važi $|x(t)| \leq B \Rightarrow |y(t)| = |3x(t) - 2x(t-4)| \leq |3x(t)| + |2x(t-4)| \leq 3B + 2B = 5B$, pa je sistem BIBO stabilan. Za sistem (ii) uzmimo ulazni signal $x(n) \equiv 0$ i početni uslov $y(n \rightarrow -\infty) = c$, gde je c – bilo koja realna konstanta. Važi da je $|y(n)| = 3|y(n-1)| \geq 3|c|$, odnosno amplituda izlaza sistema neograničeno raste, pa sistem nije BIBO stabilan.

BIBO stabilnost linearnih stacionarnih sistema se može jednostavnije dokazati utvrđivanjem apsolutne integrabilnosti (analogni), odnosno apsolutne sumabilnosti (diskretni) impulsnog odziva sistema tj. integral apsolutne vrednosti impulsnog odziva analognog sistema, odnosno suma apsolutnih vrednosti odbiraka impulsnog odziva diskretnog sistema moraju biti konačni da bi sistem bio BIBO stabilan. Npr. impulsni odziv sistema (i) važi:

$$g(t) = 3\delta(t) - 2\delta(t-4) \Rightarrow \int_{t=-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = 3 \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt + 2 \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t-4) dt = 3 + 2 = 5 < \infty,$$

pa je, i na ovaj način, pokazano da je sistem stabilan.