

FOURIEROVI REDOVI

Zadatak 3.1. Odrediti osnovnu učestanost, izračunati koeficijente a_k Furijeovog reda i nacrtati spektre signala:

a) $x(t) = 3 + \cos^2(4t)$

b) $y(t) = \sin(2\pi t)\cos(3\pi t) - \sin(4\pi t)$

c) $z(t) = 3\sin^2(3t + \pi/2)$

Rešenje:

Primenom trigonometrijskih relacija ili transformacijom izraza u eksponencijalni oblik, svi navedeni signali se mogu prevesti u oblik prostih harmonijskih kosinusnih članova:

$$a) \quad x(t) = 3 + \cos^2(4t) = 3 + \left(\frac{e^{j4t} + e^{-j4t}}{2} \right)^2 = 3 + \frac{e^{j8t} + 2 + e^{-j8t}}{4} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{j8t} + e^{-j8t}}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cos 8t$$

Osnovna (i jedina) učestanost je $\omega_0 = 8 \text{ rad/s}$, pa postoji nulti Fourierov koeficijent za jednosmernu vrednost signala i prvi koeficijent - za kosinusoidu osnovne učestanosti:

$$a_0 = \frac{7}{2} e^{j0}, \quad a_1 = \frac{1}{2} e^{j0}.$$

$$\begin{aligned} b) \quad y(t) &= \sin(2\pi t)\cos(3\pi t) - \sin(4\pi t) = \frac{(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t})}{2j} \frac{(e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t})}{2} - \cos(4\pi t - \pi/2) \\ &= \frac{e^{j5\pi t} + e^{-j\pi t} - e^{j\pi t} - e^{-j5\pi t}}{4j} + \cos(4\pi t - \pi/2 + \pi) = \frac{e^{j5\pi t} - e^{-j5\pi t}}{2 \cdot 2j} - \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2 \cdot 2j} + \cos(4\pi t + \pi/2) \\ &= \frac{1}{2} \sin(5\pi t) - \frac{1}{2} \sin(\pi t) + \cos(4\pi t + \pi/2) = \frac{1}{2} \cos(5\pi t - \pi/2) + \frac{1}{2} \cos(\pi t + \pi/2) + \cos(4\pi t + \pi/2) \end{aligned}$$

Osnovna učestanost signala je $\omega_0 = \text{NZD}(5\pi, \pi, 4\pi) = \pi \text{ rad/s}$. Učestanosti komponenti signala su $5\pi = 5\omega_0$, $\pi = \omega_0$ i $4\pi = 4\omega_0$, pa postoje prvi, četvrti i peti Fourierov koeficijent:

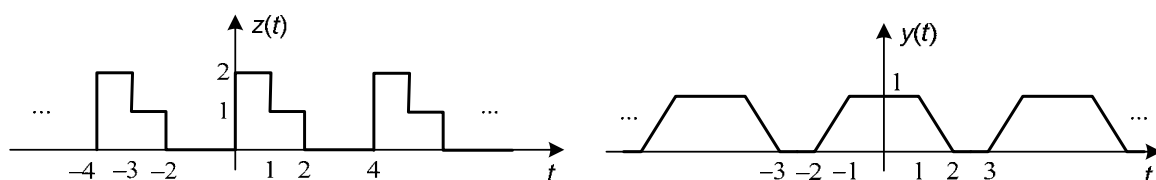
$$a_1 = \frac{1}{2} e^{j\pi/2}, \quad a_4 = 1 e^{j\pi/2}, \quad a_5 = \frac{1}{2} e^{j(-\pi/2)}.$$

$$\begin{aligned} c) \quad z(t) &= 3\sin^2(3t + \pi/2) = 3 \left(\frac{e^{j(3t+\pi/2)} - e^{-j(3t+\pi/2)}}{2j} \right)^2 = 3 \cdot \frac{e^{j2(3t+\pi/2)} - 2 + e^{-j2(3t+\pi/2)}}{-4} = \frac{6}{4} - \frac{3}{2} \frac{e^{j2(3t+\pi/2)} + e^{-j2(3t+\pi/2)}}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos(2(3t + \pi/2)) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos(6t + \pi) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(6t + \pi + \pi) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(6t) \end{aligned}$$

Osnovna (i jedina) učestanost je $\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$, pa postoji nulti Fourierov koeficijent za jednosmernu vrednost signala i prvi koeficijent za komponentu osnovne učestanosti:

$$a_0 = \frac{3}{2} e^{j0}, \quad a_1 = \frac{3}{2} e^{j0}.$$

Zadatak 3.2. Na slici su predstavljeni periodični signali:



a) Odrediti osnovnu učestanost i izračunati koeficijente a_k Furijeovog reda.

b) Napraviti Matlab program koji traži unos broja N , a zatim u grafičkom prozoru 1 iscrtati koeficijente a_k Furijeovog reda određenih u tački a), $k \in [-N, N]$. Program treba, dalje, da

iscrta u grafičkom prozoru 2 signal $x_N(t)$ rekonstruisan iz prvih N koeficijenata Furijeovog reda:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

c) Probati različite vrednosti N i dati komentar rezultata.

Rešenje:

a) Osnovna perioda signala $z(t)$ je $T_0 = 4s$, pa mu je osnovna učestanost $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2 \text{ rad/s}$.

Koeficijent a_0 se izračunava po definiciji: $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) e^{-j0\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^1 2 \cdot dt + \frac{1}{4} \int_1^2 1 \cdot dt$.

Rezultat je: $a_0 = \frac{2}{4} \cdot t \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \cdot t \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{4}(2-1) = \frac{3}{4}$.

Definisanjem simbola t i $w0$, isti rezultat se može dobiti i pomoću funkcije *int* Matlab-ovog Symbolic Toolboxa za simboličku integraciju u formi

int(podintegralni izraz, promenljiva po kojoj se integriše, donja granica, gornja granica):

```
>>syms w0 t
>>a0=1/4*int(2*exp(-j*0*w0*t),t,0,1)+1/4*int(1*exp(-j*0*w0*t),t,1,2)
a0 =
3/4
```

Slično, nenulti Fourierovi koeficijenti se dobijaju rešavanjem definicionog integrala:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^1 2 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_1^2 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Rezultat je:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0 - jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^1 + \frac{1}{T_0 - jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{-jk\omega_0 T_0} \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{-jk\omega_0 T_0} \left(e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 2} - e^{-jk\frac{\pi}{2} \cdot 1} \right) = \frac{2j}{k} \frac{1}{2\pi} \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 1 \right) + \frac{j}{k} \frac{1}{2\pi} \left(e^{-jk\pi} - e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{j}{k} \frac{1}{2\pi} \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\pi} - 2 \right) \end{aligned}$$

Do istog rezultata dolazi i Symbolic Toolbox, nakon pojednostavljivanja izraza, pomoću funkcije *simplify*:

```
>>T0=4; w0=2*pi/T0; % w0=pi/2;
>>syms t k
>>ak=1/T0*int(2*exp(-j*k*w0*t),t,0,1)+1/T0*int(1*exp(-j*k*w0*t),t,1,2)
ak =
i*(exp(-1/2*i*k*pi)-1)/k/pi
-1/2*i*(-1+exp(-2*i*k*pi))*exp(i*k*pi)/k/pi/exp(i*k*pi)
>>ak=simplify(ak)
ak =
1/2*i/k/pi*(exp(-1/2*i*k*pi)-2+exp(-i*k*pi))
```

Osnovna perioda signala $y(t)$ je $T_0 = 6s$, pa mu je osnovna učestanost $\omega_0 = 2\pi/6 = \pi/3 \text{ rad/s}$.

Na segmentu $t \in (-2, -1)$, signal $y(t)$ je definisan kao prava kroz dve tačke $(t_1, y_1) = (-2, 0)$ i $(t_2, y_2) = (-1, 1)$:

$$y(t) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) + y_1 = \frac{1-0}{(-1)-(-2)} (t - (-2)) + 0 = \frac{1}{1} (t + 2) + 0 = t + 2$$

Slično, na segmentu $t \in (1, 2)$, signal $y(t)$ je prava kroz tačke $(t_1, y_1) = (1, 1)$ i $(t_2, y_2) = (2, 0)$:

$$y(t) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + y_1 = \frac{0 - 1}{2 - 1}(t - 1) + 1 = -\frac{1}{1}(t - 1) + 1 = -t + 2$$

Koeficijent a_0 i nenulti koeficijenti se izračunavaju po definiciji:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j0 \cdot \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-2}^{-1} (t+2) e^{-j0 \cdot \omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j0 \cdot \omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_1^2 (-t+2) e^{-j0 \cdot \omega_0 t} dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-jk \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-2}^{-1} (t+2) e^{-jk \omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-jk \omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_1^2 (-t+2) e^{-jk \omega_0 t} dt$$

Simboličkim rešavanjem, dobija se:

```
>>T0=6; w0=2*pi/T0; % w0=pi/3;
>>syms t k
>>a0=1/T0*int((t+2)*exp(-j*0*w0*t),t,-2,-1)+
1/T0*int(1*exp(-j*0*w0*t),t,-1,1)+1/T0*int((-t+2)*exp(-j*0*w0*t),t,1,2)

a0 =
1/2

>>ak=1/T0*int((t+2)*exp(-j*k*w0*t),t,-2,-1)+
1/T0*int(1*exp(-j*k*w0*t),t,-1,1)+1/T0*int((-t+2)*exp(-j*k*w0*t),t,1,2)

ak =
1/2*(i*exp(1/3*i*k*pi)*k*pi+3*exp(1/3*i*k*pi)-3*exp(2/3*i*k*pi))/k^2/pi^2-
1/2*i*(-exp(-1/3*i*k*pi)+exp(1/3*i*k*pi))/k/pi-1/2*(3*exp(-
2/3*i*k*pi)+i*exp(-1/3*i*k*pi)*k*pi-3*exp(-1/3*i*k*pi))/k^2/pi^2

>>ak=simple(ak)

ak =
3*(cos(1/3*k*pi)-cos(2/3*k*pi))/k^2/pi^2
```

b) i c) Matlab program za generisanje spektara i rekonstruisanih signala:

```
N=input('Broj koeficijenata=');

k=-N:N;
a=1/2*j./k/pi.*(exp(-1/2*j*k*pi)-2+exp(-j*k*pi));
a(0+N+1)=3/4; T0=4; w0=2*pi/T0;

figure(1); stem(k, abs(a),'k')
xlabel('k'); ylabel('|a_k|')

figure(2); stem(k, angle(a),'k')
xlabel('k'); ylabel('arg a_k')

t=-2*T0:0.01:2*T0; xn=[];
for i=1:length(t)
    xn(i)=0;
    for k=-N:N
        xn(i)=xn(i)+a(k+N+1)*exp(j*k*w0*t(i));
    end
end

figure(3); plot(t,xn);
xlabel('t'); ylabel(['z_N(t) N=' num2str(N)]);

k=-N:N;
a=3*(cos(1/3*k*pi)-cos(2/3*k*pi))./k.^2/pi^2;
a(0+N+1)=1/2; T0=6; w0=2*pi/T0;

figure(4); stem(k, abs(a),'k')
xlabel('k'); ylabel('|a_k|')
```

```

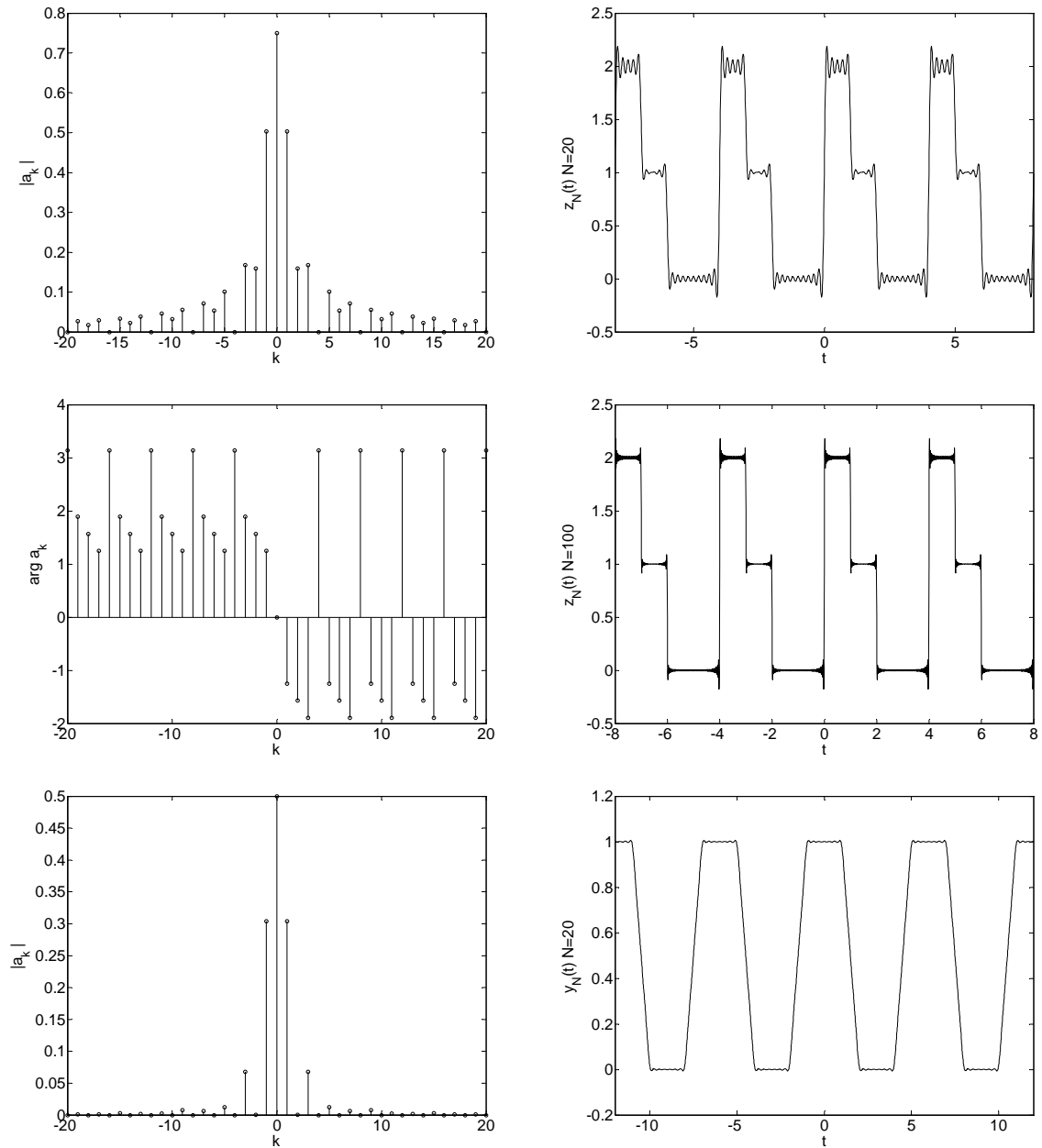
figure(5); stem(k, angle(a),'k')
xlabel('k'); ylabel('arg a_k')

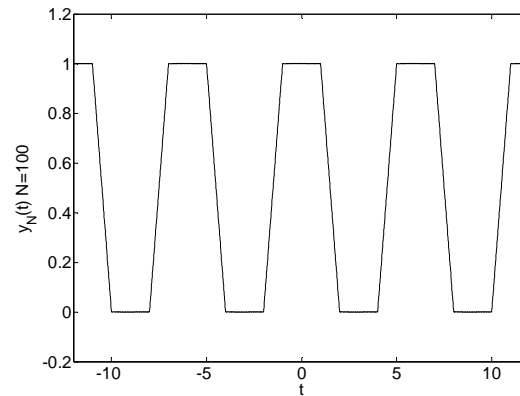
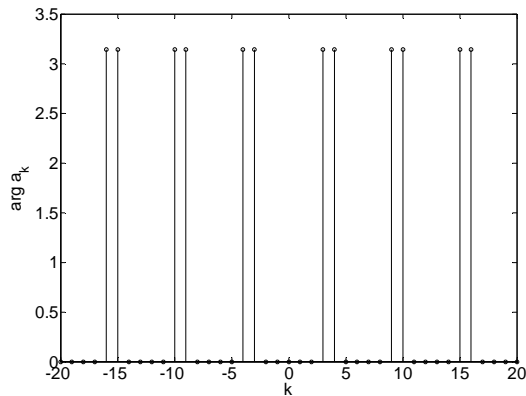
t=-2*T0:0.01:2*T0; xn=[];
for i=1:length(t)
    xn(i)=0;
    for k=-N:N
        xn(i)=xn(i)+a(k+N+1)*exp(j*k*w0*t(i));
    end
end

figure(6); plot(t,xn);
xlabel('t'); ylabel(['y_N(t) N=' num2str(N)]);

```

Spektri signala i signali rekonstruisani od prvih $N_1 = 20$ i $N_2 = 100$ Fourierovih koeficijenata dati su na sledećoj slici.





Jasno je da povećavanje broja Fourierovih koeficijenata, uključenih u rekonstrukciju signala, sve bolje aproksimira originalni signal. Međutim, prekide prve vrste u signalu $z(t)$, i u bilo kom drugom signalu, nije moguće rekonstruisati sa konačnim brojem Fourierovih koeficijenata, te će oscilacije u rekonstruisanom signalu uvek biti prisutne, bez obzira na povećanje broja uključenih koeficijenata.