

Ime i prezime:	Broj indeksa:	Odsek:	Grupa LAB	Zbir:
----------------	---------------	--------	-----------	-------

1. Ponašanje jednog diskretnog sistema je opisano relacijom:  $y[n] - y^2[n+1] + y[n-1] = -x[n]$  gde je sa  $x[n]$  označen ulaz a sa  $y[n]$  odziv sistema. Ispitati da li je ovaj sistem linearan, stacionaran, kauzalan, invertibilan, stabilan i da li sistem ima memoriju.

Linearnost: kako je  $(y_1(n+1) + y_1(n+1))^2 \neq y_1^2(n+1) + y_2^2(n+1) \Rightarrow$  ne važi osobina aditivnosti  $\Rightarrow$  sistem nije linearan.

Stacionarnost: pošto nema parametara sistema koji zavise od vremena  $\Rightarrow$  sistem je stacionaran.

Kauzalnost:  $y^2[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1] \Rightarrow$  sistem je kauzalan.

Invertibilnost:  $x[n] = y^2[n+1] - y[n] - y[n-1] \Rightarrow$  sistem je invertibilan.

Stabilnost: pp.  $\forall n, |x[n]| \leq B$ . U slučaju da je sistem stabilan  $\forall B, \exists I, \forall n, |y[n]| \leq I(B)$ . Po principu matematičke indukcije, ako je  $|y[n-2]| \leq I$  i  $|y[n-1]| \leq I$ , tada važi:

$$|y[n]|^2 = |y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]| \leq |y[n-1]| + |y[n-2]| + |x[n-1]| \leq 2I + B.$$

Ako se za granicu usvoji  $I = 1 + \sqrt{1+B} \Rightarrow$

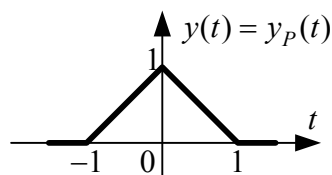
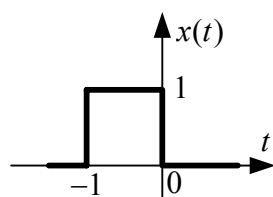
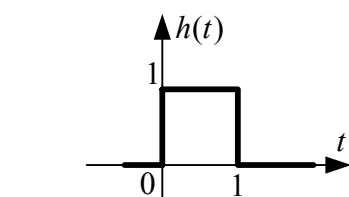
$$|y[n]| \leq \sqrt{2I+B} = \sqrt{2+2\sqrt{1+B}+B} = \sqrt{1+2\sqrt{1+B}+1+B} = \sqrt{(1+\sqrt{1+B})^2} = 1+\sqrt{1+B} = I,$$

pa sledi da je sistem stabilan.

Memorija: sistem ima memoriju.

12

2. Impulsni odziv kontinualnog LTI sistema glasi:  $h(t) = u(t) - u(t-1)$ . Na ulaz sistema se dovodi signal  $x(t) = u(t+1) - u(t)$ . a) Primenom konvolucije odrediti odziv sistema  $y(t)$ . b) Skicirati parni i neparni deo signala  $y(t)$ .

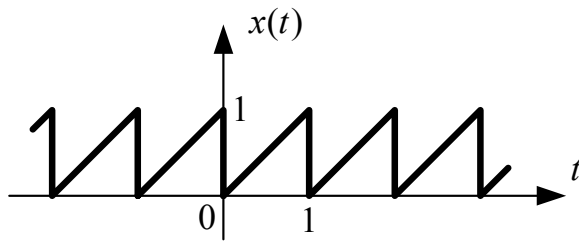


$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_0^{t+1} d\tau = t+1, & t \in [-1, 0] \\ \int_t^1 d\tau = 1-t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

$$y_N(t) = 0, \quad \forall t$$

10

3. Periodični signal  $x(t)$  prikazan na slici predstaviti Fourier-ovim redom i odrediti koeficijente tog reda. Ispitati konvergenciju dobijenog reda.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad T=1; \quad \omega_0 = 2\pi$$

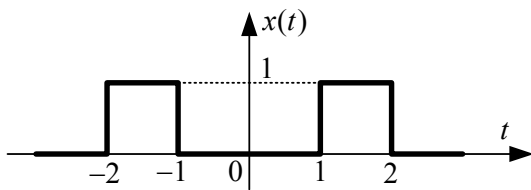
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{poT} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^1 t e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{j}{k\omega_0} = \frac{j}{2k\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{poT} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

Red je konvergentan, pošto je ispunjen uslov:  $\int_{poT} |x(t)|^2 dt < \infty$

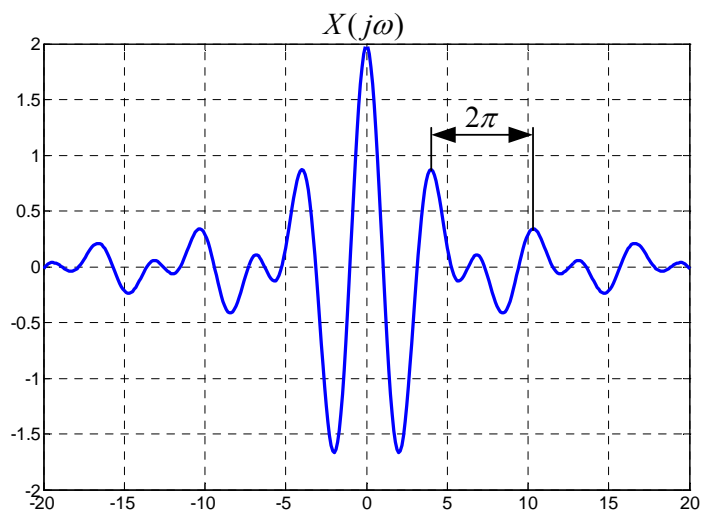
10

4. Za signal  $x(t) = \begin{cases} 1; & 1 < |t| < 2 \\ 0; & \text{inače} \end{cases}$  a) sračunati Fourier-ov transformacioni par  $X(j\omega)$  i skicirati amplitudu i fazu njegovog spektra.



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-2}^{-1} e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{2(\sin(2\omega) - \sin(\omega))}{\omega}$$



6

- b) Napisati izraz za spektralnu gustinu energije ovog signala, izraz za energiju signala po Parseval-ovoj teoremi i na najjednostavniji način sračunati njegovu energiju.

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{4(\sin(2\omega) - \sin(\omega))^2}{\omega^2}; \quad E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$E_X = \int_{-2}^{-1} dt + \int_1^2 dt = 2$$

8

5. Impulsni odziv jednog kontinualnog LTI sistema glasi:  $h(t) = e^{-2t} \sin(t)u(t)$ .

a) Odrediti frekvencijski odziv  $H(j\omega)$  ovog sistema.

Frekvencijski odziv je

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} \sin(t)u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{5 - \omega^2 + j4\omega} \end{aligned}$$

6

b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal  $x(t) = \cos(3t)$ . Odrediti Fourier-ov transformacioni par signala  $x(t)$  a zatim, na osnovu njega odrediti odziv sistema  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \pi\delta(\omega + 3) + \pi\delta(\omega - 3) \\ Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) = \frac{\pi}{-4 - j12} \delta(\omega + 3) + \frac{\pi}{-4 + j\omega} \delta(\omega - 3) \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{3\sin(3t) - \cos(3t)}{40} \end{aligned}$$

8

6. Funkcija prenosa kauzalnog LTI sistema je  $H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+10}$ . a) Odrediti impulsni odziv  $h(t)$  sistema.

Impulsni odziv ovog sistema je inverzna Laplaceova transformacija od funkcije prenosa,  $H(s)$ .

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s+5}{(s+3)^2+1} = \frac{s+3}{(s+3)^2+1} + 2 \cdot \frac{1}{(s+3)^2+1} \\ h(t) &= e^{-3t} (\cos(t) + 2\sin(t))u(t) \end{aligned}$$

8

b) Da li je moguće i zašto primeniti granične teoreme Laplace-ove transformacije na funkciju  $H(s)$ , pa ako jeste njihovom primenom odrediti  $h(0)$  i  $h(\infty)$ .

Granične teoreme Laplaceove transformacije je moguće primeniti jer su polovi funkcije  $H(s)$  u levoj poluravni kompleksne  $s$  ravni ( $s_{1,2} = -3 \pm j$ ).

$$h(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = 1$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = 0$$

6

7. Impulsni odziv jednog kauzalnog diskretnog sistema glasi  $h[k] = [1 + (-1)^k]u[k]$ . a) Odrediti funkciju diskretnog prenosa  $H(z)$ , njegovu oblast konvergencije i ispitati njegovu stabilnost.

Funkcija diskretnog prenosa je  $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-1)^k) z^{-k} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} = \frac{2z^2}{z^2-1}$$

Oblast konvergencije je  $|z| > 1$ .

Kako su polovi sistema na jediničnoj kružnici ( $z_{1,2} = \pm 1$ ), sistem je BIBO nestabilan.

8

b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal  $x[k] = (0.5)^k u[k]$ . Odrediti njegovu zed transformaciju i njenu oblast konvergencije.

Zed transformacije ovog signala je  $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k z^{-k} = \frac{z}{z-0.5}$ .

Oblast konvergencije je  $|z| > 0.5$ .

6

c) Na osnovu prethodnih tačaka, odrediti zed transformaciju odziva sistema  $Y(z)$  kao i sam odziv  $y[k]$ .

Zed transformacija odziva sistema je

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{2z^3}{(z-0.5)(z-1)(z+1)} \\ &= 2z \left[ \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{z-0.5} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} \right] \end{aligned}$$

Odziv  $y[k]$  se dobija inverznom zed transformacijom

$$y[k] = 2 \left( 1 + \frac{1}{3}(-1)^k - \frac{1}{3}(0.5)^k \right) u[k]$$

6

8. Dopuniti sledeće rečenice, tako da dobijeni iskazi budu tačni:

Za sistem koji zadovoljava osobine homogenosti i aditivnosti kažemo da je \_\_\_\_\_ linearan

Konvolucija dva kauzalna signala je \_\_\_\_\_ kauzalan \_\_\_\_\_ signal.

Polovi kontinualnog linearnog BIBO stabilnog sistema su \_\_\_\_\_ u levoj poluravni kompleksne  $s$  ravni

Polovi diskretnog linearnog BIBO stabilnog sistema su \_\_\_\_\_ unutar jedinične kružnice kompleksne  $z$  ravni

Signal čija je Fourierova transformacija  $X(j\omega) = \delta(\omega - 2)$  je  $x(t) = (1/2\pi)e^{j2t}$

6