

ANALOGNI LINEARNI STACIONARNI SISTEMI

Zadatak 6.1. Za sistem čiji je ulaz $x(t)$, a izlaz $y(t)$, data je diferencijalna jednačina:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 9x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

- Odrediti funkciju prenosa ovog sistema, poziciju nula i polova. Da li je sistem stabilan?
- Odrediti odziv sistema $y(t)$ na pobudu $x(t) = u(t) - u(t - 4)$, pa napraviti Matlab program koji će iscrtati u istom grafičkom prozoru signale pobude i odziva.
- Napraviti Matlab program koji će iscrtati u grafičkim prozorima amplitudnu i faznu karakteristiku sistema.

Rešenje:

a) Laplaceova transformacija diferencijalne jednačine daje traženu funkciju prenosa:

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 9Y(s) = 9X(s) - sX(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{9-s}{s^2 + 3s + 9}.$$

Polovi sistema $p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = -\frac{3}{2} \pm j \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -1.5 \pm j2.6$ su konjugovano-kompleksni i nalaze se u levoj poluravni s -ravni (imaju negativne realne delove), nula sistema $n = 9$ je u desnoj poluravni. Pošto su (svi) polovi u levoj poluravni, sistem je stabilan.

b) Laplaceova transformacija odziva sistema na proizvoljnu pobudu je $Y(s) = G(s)X(s)$. Odziv sistema $y(t)$ odredićemo kao inverznu Laplaceovu transformaciju od $Y(s)$. U tom cilju, potrebni su nam funkcija prenosa (već je određena) i Laplaceova transformacija $X(s)$ signala $x(t)$ na ulazu sistema:

$$X(s) = L \{u(t) - u(t-4)\} = \frac{1}{s} - e^{-4s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-4s}).$$

Ista Laplaceova transformacija se može dobiti i pomoću Matlabovog Symbolic Toolboxa:

```
>>syms t
>>X=laplace(sym('Heaviside(t)')-sym('Heaviside(t-4)'))
```

```
X =
1/s-exp(-4*s)/s
```

Za odziv sistema se sad može pisati:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{9-s}{s^2 + 3s + 9} \frac{1}{s} (1 - e^{-4s})$$

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{9-s}{s(s^2 + 3s + 9)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{9-s}{s(s^2 + 3s + 9)} e^{-4s} \right\} = y_1(t) - y_1(t-4)$$

gde je:

$$y_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{9-s}{s(s^2 + 3s + 9)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 3s + 9} \right\} = u(t) - e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) u(t) - \frac{5\sqrt{3}}{9} e^{-\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) u(t)$$

Odziv sistema se može dobiti i pomoću Matlabovog Symbolic Toolboxa (nastavak prethodnog koda za određivanje X):

```
>>syms s
>>G=(9-s)/(s^2+3*s+9)
>>y=simple(ilaplace(G*X))

y =
(exp(-3/2*t+6)*cos(3/2*3^(1/2)*(t-4))
+5/9*3^(1/2)*exp(-3/2*t+6)*sin(3/2*3^(1/2)*(t-4))-1)*Heaviside(t-4)
-exp(-3/2*t)*cos(3/2*3^(1/2)*t)-5/9*3^(1/2)*exp(-3/2*t)*sin(3/2*3^(1/2)*t)+1
```

Matlab program za iscrtavanje signala:

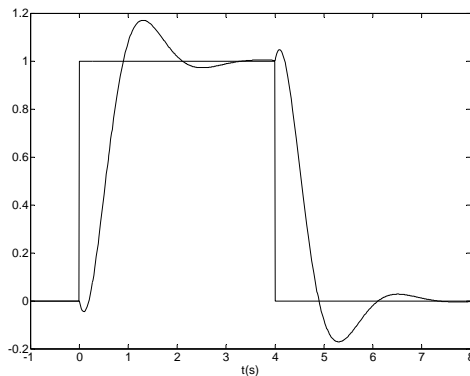
```
t=-1:0.01:8;

x=1*(t>=0)-1*(t>=4);

y1 = (t>=0)-exp(-3/2*t).*cos(3/2*sqrt(3)*t).*(t>=0) ...
      -5/9*sqrt(3)*exp(-3/2*t).*sin(3/2*sqrt(3)*t).*(t>=0);
y1_zakasnjen_4 = (t>=4)-exp(-3/2*(t-4)).*cos(3/2*sqrt(3)*(t-4)).*(t>=4) ...
      -5/9*sqrt(3)*exp(-3/2*(t-4)).*sin(3/2*sqrt(3)*(t-4)).*(t>=4);

y = y1 - y1_zakasnjen_4;

figure(1);
plot(t,x,'b',t,y,'r');
xlabel('t(s)')
```



c) Amplitudna karakteristika $|G(j\omega)|$ i fazna karakteristika $\arg G(j\omega)$ sistema se crtaju za takav opseg učestanosti koji će obuhvatiti učestanosti svih nula i polova u sistemu. Sistem u zadatku ima nulu sa učestanošću $\omega_n = 9$ rad/s i polove sa neprigušenom prirodnom učestanošću $\omega_{np} = 3$ rad/s (konjugovano kompleksni polovi su nule polinoma opšteg oblika $s^2 + 2\zeta\omega_{np}s + \omega_{np}^2$ i neprigušenu učestanost očitavamo kao kvadratni koren slobodnog člana polinoma).

U Matlab programu crtamo karakteristike za učestanosti od 0 do 100 rad/s (bar 10 puta veća učestanost od najviše učestanosti nula i polova, u našem slučaju $10 \cdot 9 = 90$, pa uzimamo okruglo 100), amplitudnu karakteristiku dobijamo pomoću funkcije *abs*, a faznu pomoću *angle*, koja daje uglove u radijanima, pa ih pretvaramo u stepene. Odgovarajući Matlab program je:

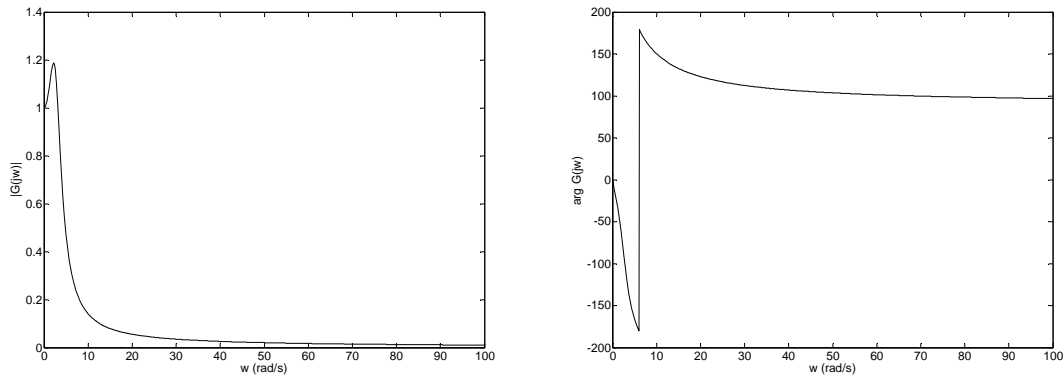
```

w=0:0.1:100;
s=j*w;
G=(9-s)./(s.^2+3*s+9);

figure(2);
plot(w,abs(G));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|G(jw)|');

figure(3);
plot(w,angle(G)*180/pi);
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('arg G(jw)');

```



Radi bolje preglednosti, uobičajeno je da se frekvencijska osa karakteristika crta u logaritamskoj razmeri, što ostvarujemo korišćenjem naredbe *semilogx*, umesto *plot*. Opseg učestanosti se bira tako da se polazi od bar deset puta manje učestanosti od najniže učestanosti nula i polova sistema, a završava sa bar 10 puta većom učestanošću najviše učestanosti nula i polova. Izabraćemo okrugle vrednosti opsega: od 0.1 rad/s ($3/10=0.3$, biramo manje okruglo 0.1 rad/s) do 100 rad/s ($10 \cdot 9=90$, pa uzimamo 100 rad/s). Takođe, amplitudna karakteristika se crta u decibelskim iznosima amplituda $A_{dB} = 20\log_{10}(A)$. Modifikovani Matlab kod je:

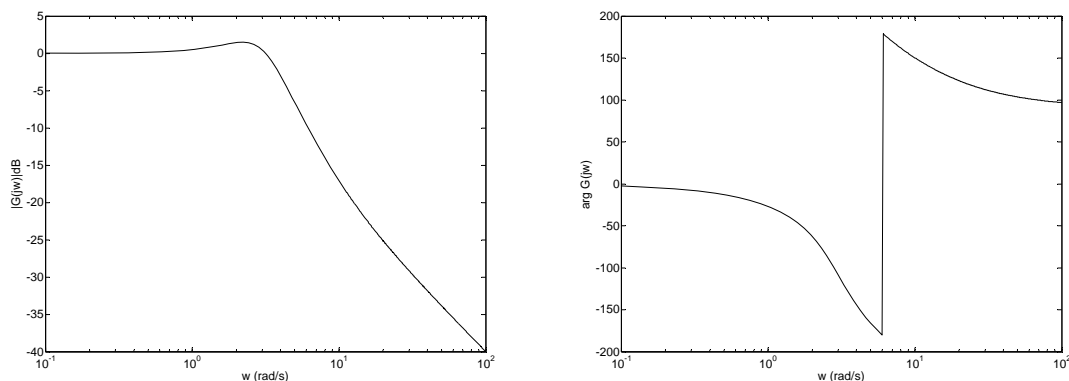
```

w=0.1:0.1:100;
s=j*w;
G=(9-s)./(s.^2+3*s+9);

figure(4);
semilogx(w,20*log10(abs(G)));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|G(jw)|dB');

figure(5);
semilogx(w,angle(G)*180/pi);
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('arg G(jw)');

```



Z-TRANSFORMACIJA I DISKRETNi LINEARNI STACIONARNI SISTEMI**Zadatak 6.2.** Odrediti unilateralnu z -transformaciju signala:

a) $x(n) = \cos(anT)$, $a, T = \text{const.}$

b) $y(n) = (3 + \cos^2(4n))u(n)$

c) $w(n) = e^{-3(n-4)}u(n-4)$

Rešenje: Data su analitička izvođenja i odgovarajuće Matlab Symbolic Toolbox instrukcije kojima se dobijaju tražene transformacije za date signale.a) Polazeći od definicije z -transformacije:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(anT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(anT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{janT} + e^{-janT}}{2} \right) z^{-n} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{jaT} z^{-1})^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-jaT} z^{-1})^{-n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{jaT} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-jaT} z^{-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{jaT}} + \frac{z}{z - e^{-jaT}} \right) = \frac{z}{2} \frac{2z - (e^{jaT} + e^{-jaT})}{(z - e^{jaT})(z - e^{-jaT})} \\
 &= \frac{z}{2} \frac{2z - 2\cos(aT)}{z^2 - (e^{jaT} + e^{-jaT})z + 1} = \frac{z(z - \cos(aT))}{z^2 - 2\cos(aT)z + 1}
 \end{aligned}$$

```
>> syms a T n
>> X=simple(ztrans(cos(a*n*T)))

X =
(z-cos(a*T))*z/(z^2-2*z*cos(a*T)+1)
```

b) Transformacijom izraza u eksponencijalni oblik, navedeni signal se može prevesti u oblik prostih harmonijskih kosinusnih članova, za koje postoje tablične transformacije:

$$3 + \cos^2(4n) = 3 + \left(\frac{e^{j4n} + e^{-j4n}}{2} \right)^2 = 3 + \frac{e^{j8n} + 2 + e^{-j8n}}{4} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{j8n} + e^{-j8n}}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cos 8n$$

Odatle je:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \beta \left\{ \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cos(8n) \right) u(n) \right\} = \frac{7}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z(z - \cos(8))}{z^2 - 2z\cos(8)z + 1} = \frac{z(7(z^2 - 2z\cos(8)z + 1) + (z-1)(z - \cos(8)))}{2(z-1)(z^2 - 2z\cos(8)z + 1)} \\
 &= \frac{4z(z^2 + 0.1478z + 0.8568)}{(z-1)(z^2 - 0.291z + 1)}
 \end{aligned}$$

```
>> syms n
>> Y=simple(ztrans((3+cos(4*n)^2)*sym('Heaviside(n)'))))

Y =
(-8*z^3+z^2+15*z*cos(8)-7*z-z*cos(8)) /
(2+2*z^2-4*z*cos(8)-2*z^3-2*z+4*z^2*cos(8))
```

```
>> factor(Y)
```

```
ans =
1/2*(-8*z^2+z+15*z*cos(8)-7-cos(8))*z/(z-1)/(-z^2+2*z*cos(8)-1)
```

c) Koristeći osobinu vremenskog kašnjenja z -transformacije:

$$W(z) = \beta \{ e^{-3(n-4)} u(n) \} = z^{-4} \beta \{ e^{-3n} u(n) \} = z^{-4} \frac{z}{z - e^{-3}} = \frac{1}{z^3(z - 0.05)}$$

```
>> syms n
>> W=simple(ztrans(exp(-3*(n-4))*sym('Heaviside(n-4)'))))

W =
-1/(-z+exp(-3))/z^3
```

Zadatak 6.3. Odrediti inverznu z -transformaciju za date transformacije:

a) $X(z) = \frac{z-1}{z^4}$

b) $Y(z) = \frac{1}{(z-0.3)(z-0.7)}$

c) $R(z) = \frac{z^2 - 2.5z - 1.5}{z^2 + 3z + 2}$

Rešenje: Data su analitička izvođenja i odgovarajuće Matlab Symbolic Toolbox instrukcije kojima se dobijaju tražene inverzne transformacije.

a) Koristeći osobinu vremenskog kašnjenja z -transformacije:

$$X(z) = z^{-3} - z^{-4} = z^{-3} \cdot 1 - z^{-4} \cdot 1 \Rightarrow x(n) = \delta(n-3) - \delta(n-4)$$

```
>> syms z
>> X = (z-1)/z^4;
>> x = iztrans(X)
```

```
x =
-charfcn[4](n)+charfcn[3](n)
```

b) Rastavljanjem izraza na parcijalne razlomke:

$$Y(z) = \frac{1}{(z-0.3)(z-0.7)} = \frac{A}{z-0.3} + \frac{B}{z-0.7},$$

$$A = \left((z-0.3) \frac{1}{(z-0.3)(z-0.7)} \right)_{z=0.3} = \left(\frac{1}{z-0.7} \right)_{z=0.3} = \frac{1}{-0.4} = -\frac{5}{2}, \quad B = \left(\frac{1}{z-0.3} \right)_{z=0.7} = \frac{1}{0.4} = \frac{5}{2}$$

$$y(n) = \beta^{-1} \left\{ -\frac{5}{2} z^{-1} \frac{z}{z-0.3} + \frac{5}{2} z^{-1} \frac{z}{z-0.7} \right\} = \left(-\frac{5}{2} (0.3)^{n-1} + \frac{5}{2} (0.7)^{n-1} \right) u(n-1)$$

Alternativno, možemo izbeći uvrštavanje vremenskog kašnjenja u izraz za inverznu transformaciju:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z(z-0.3)(z-0.7)} = \frac{M}{z} + \frac{N}{z-0.3} + \frac{P}{z-0.7},$$

$$M = \frac{1}{(0-0.3)(0-0.7)} = \frac{100}{21}, \quad N = \frac{1}{(0.3-0)(0.3-0.7)} = -\frac{25}{3}, \quad P = \frac{1}{(0.7-0)(0.7-0.3)} = \frac{25}{7}$$

$$y(n) = \beta^{-1} \left\{ z \frac{Y(z)}{z} \right\} = \beta^{-1} \left\{ \frac{100}{21} - \frac{25}{3} \frac{z}{z-0.3} + \frac{25}{7} \frac{z}{z-0.7} \right\} = \frac{100}{21} \delta(n) + \left(-\frac{25}{3} (0.3)^n + \frac{25}{7} (0.7)^n \right) u(n)$$

Dobijeni je drugačija reprezentacija analitičkog izraza za signal, ali su vrednosti signala po oba analitička izraza jednake za svako n .

```
>> syms z
>> Y = 1/(z-0.3)/(z-0.7);
>> y = iztrans(Y)
```

```
y =
100/21*charfcn[0](n)+25/7*(7/10)^n-25/3*(3/10)^n
```

c) Pošto je imenilac transformacije $z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2)$, treba izvršiti rastavljanje na parcijalne razlomke. Sprovedimo npr. drugi pristup iz tačke a):

$$\frac{R(z)}{z} = \frac{z^2 - 2.5z - 1.5}{z(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2},$$

$$A = \frac{0^2 - 2.5 \cdot 0 - 1.5}{(0+1)(0+2)} = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{(-1)^2 - 2.5 \cdot (-1) - 1.5}{(-1)(-1+2)} = -2, \quad C = \frac{(-2)^2 - 2.5 \cdot (-2) - 1.5}{(-2)(-2+1)} = \frac{15}{4}$$

$$y(n) = \beta^{-1} \left\{ z \frac{R(z)}{z} \right\} = \beta^{-1} \left\{ -\frac{3}{4} - 2 \frac{z}{z+1} + \frac{15}{4} \frac{z}{z+2} \right\} = -\frac{3}{4} \delta(n) + \left(-2(-1)^n + \frac{15}{4} (-2)^n \right) u(n)$$

```
>> syms z
>> R=(z^2-2.5*z-1.5)/(z+1)/(z+2)
>> r=iztrans(R)

r =
-3/4*charfcn[0](n)+15/4*(-2)^n-2*(-1)^n
```

Zadatak 6.4. Za diskretni sistem čiji je ulaz $x(n)$, a izlaz $y(n)$, data je diferencna jednačina:

$$y(n) - 0.4y(n-1) + 0.2y(n-2) = 1.6x(n-2)$$

- Odrediti funkciju prenosa ovog sistema, poziciju nula i polova. Da li je sistem stabilan?
- Odrediti odziv sistema $y(n)$ na pobudu $x(n) = u(n) - u(n-10)$, pa napraviti Matlab program koji će iscrtati u istom grafičkom prozoru signale pobude i odziva.
- Napraviti Matlab program koji će iscrtati u grafičkim prozorima amplitudnu i faznu karakteristiku sistema.

Rešenje:

- a) Z- transformacija diferencne jednačine daje traženu funkciju prenosa:

$$Y(z) - 0.4z^{-1}Y(z) + 0.2z^{-2}Y(z) = 1.6z^{-2}X(z) \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1.6z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{1.6}{z^2 - 0.4z + 0.2}.$$

Polovi sistema $p_{1,2} = \frac{0.4 \pm \sqrt{0.16 - 4 \cdot 0.2}}{2} = -0.2 \pm j0.4$ su konjugovano-kompleksni i imaju moduo $|p_{1,2}| = \sqrt{(0.2)^2 + (\pm 0.4)^2} \approx 0.4472$ i nalaze se u unutar jediničnog kruga centriranog u koordinatnom početku z -ravni, pa je sistem stabilan. Funkcija prenosa nema nule.

- b) Z-transformacija odziva sistema na proizvoljnu pobudu je $Y(z) = G(z)X(z)$. Odziv sistema $y(n)$ odredićemo kao inverznu z -transformaciju od $Y(z)$. Za to nam je potrebna još z -transformacija $X(z)$ signala $x(n)$ na ulazu sistema:

$$X(z) = \beta \{u(n) - u(n-10)\} = \frac{z}{z-1} - z^{-10} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} (1 - z^{-10}).$$

Ista z -transformacija se može dobiti i pomoću Matlabovog Symbolic Toolboxa:

```
>> syms n
>> X=ztrans(sym('Heaviside(n)')-sym('Heaviside(n-10)'))

X =
1+1/z+1/z^2+1/z^3+1/z^4+1/z^5+1/z^6+1/z^7+1/z^8+1/z^9
```

Rezultat je isti, što pokazuje dodatno simboličko sumiranje:

```
>> syms n k
>> S=simple(symsum(z^(-n),n,0,k-1))

S =
-z*((1/z)^k-1)/(z-1)

>> k=10;
>> eval(S)

ans =
-z*(-1+1/z^10)/(z-1)
```

Za odziv sistema se sad može pisati:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{1.6}{z^2 - 0.4z + 0.2} \cdot \frac{z}{z-1} (1 - z^{-10})$$

$$y(t) = \beta^{-1} \{Y(z)\} = \beta^{-1} \left\{ \frac{1.6z}{(z^2 - 0.4z + 0.2)(z-1)} \right\} - L^{-1} \left\{ z^{-10} \frac{1.6z}{(z^2 - 0.4z + 0.2)(z-1)} \right\} = y_1(n) - y_1(n-10)$$

gde je:

$$y_1(n) = \beta^{-1} \left\{ \frac{1.6z}{(z^2 - 0.4z + 0.2)(z-1)} \right\} = \beta^{-1} \left\{ \frac{2}{z-1} - \frac{2z-0.4}{z^2 - 0.4z + 0.2} \right\} = \beta^{-1} \left\{ z^{-1} \frac{2z}{z-1} - z^{-1} \frac{2z^2 - 0.4z}{z^2 - 0.4z + 0.2} \right\}$$

Ako potražimo odziv drugog člana u formi zbira eksponencijalno-sinusnog i eksponencijalno-kosinusnog člana u opštoj formi:

$$\frac{pz^2 + rz}{z^2 + mz + n} = C_1 \frac{b \sin(a)z}{z^2 - 2b \cos(a)z + b^2} + C_2 \frac{z(z - b \cos(a))}{z^2 - 2b \cos(a)z + b^2},$$

dobijaju se rešenja za konstante: $a = \arccos\left(-\frac{m}{2\sqrt{n}}\right)$, $b = \sqrt{n}$, $C_1 = \frac{2r - mp}{\sqrt{4n - m^2}}$, $C_2 = p$.

Za naš zadatak je:

$$p = 2, r = -0.4, m = -0.4, n = 0.2$$

$$a = \arccos\left(-\frac{m}{2\sqrt{n}}\right) = 1.1071, b = \sqrt{n} = 0.4472, C_1 = \frac{2r - mp}{\sqrt{4n - m^2}} = 0, C_2 = p = 2$$

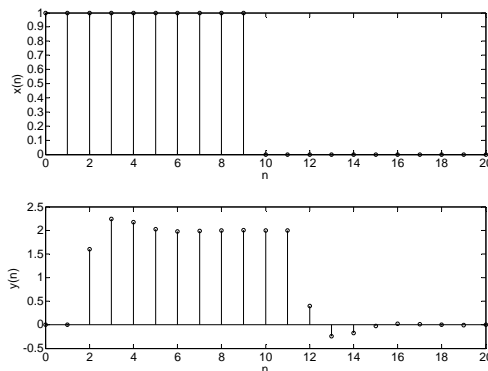
pa je dalje:

$$y_1(n) = \beta^{-1} \left\{ z^{-1} \frac{2z}{z-1} - z^{-1} \frac{2z^2 - 0.4z}{z^2 - 0.4z + 0.2} \right\} = 2u(n-1) - 2(0.4472)^{n-1} \cos(1.1071(n-1))u(n-1).$$

Nažalost, funkcija *iztrans* Symbolic Toolbox-a ne može da se izdvoji sa inverznom transformacijom konjugovano-kompleksnog člana, pa je bilo neophodno prethodno analitičko izvođenje. Funkcija *iztrans*, međutim, može uspešno da reši jednostruke i višestruke realne polove z-transformacije. Matlab program za iscrtavanje signala:

```
n=0:20;
x=1*(n>=0)-1*(n>=10);
y1      =2*(n>=1)      -2*(0.4472).^(n-1)      .*cos(1.1071*(n-1)).*(n>=1);
y1_zakas_10=2*(n-10>=1)-2*(0.4472).^(n-10-1) .*cos(1.1071*(n-10-1)) ...
          .*(n-10>=1);
y = y1 - y1_zakas_10;

figure(1);
subplot(2,1,1); stem(n, x); xlabel('n'); ylabel('x(n)');
subplot(2,1,2); stem(n, y); xlabel('n'); ylabel('y(n)');
```



c) Između promenljivih analognog s -domena i diskretnog z -domena postoji veza $z = e^{sT}$, gde je T perioda diskretizacije. Frekvencijske karakteristike analognih sistema se crtaju za vrednosti kompleksne s promenljive $s = j\omega$, pa se odgovarajuće frekvencijske karakteristike diskretnih sistema crtaju za vrednosti kompleksne z promenljive $z = e^{j\omega T}$, kada je perioda diskretizacije specificirana, odnosno $z = e^{j\omega}$, kada perioda nije specificirana (usvaja se normirajuća jedinična vrednost periode $T = 1$). Pošto se diskretni spektar ponavlja u frekvencijama, dovoljno je nacrtati frekvencijske karakteristike u opsegu $\omega \in [0, \pi/T]$, odnosno $\omega \in [0, \pi]$ kada perioda nije specificirana. Izraze za frekvencijske karakteristike dobijamo iz funkcije prenosa sistema:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1.6}{e^{j2\omega} - 0.4e^{j\omega} + 0.2} = \frac{1.6}{\cos(2\omega) + j\sin(2\omega) - 0.4\cos(\omega) - j\sin(\omega) + 0.2} = M(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\omega) - 0.4\cos(\omega) + 0.2)^2 + (\sin(2\omega) - 0.4\sin(\omega))^2}},$$

$$\theta(\omega) = -\arctg\left(\frac{\sin(2\omega) - 0.4\sin(\omega)}{\cos(2\omega) - 0.4\cos(\omega) + 0.2}\right)$$

Pomoću Symbolic Toolboxa, takođe se mogu dobiti izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku:

```
>> syms w positive
>> z=exp(-j*w);
>> G=1.6/(z^2-0.4*z+0.2)

G =
8/5/(exp(-i*w)^2-2/5*exp(-i*w)+1/5)

>> M=abs(G)

M =
8/5/((cos(2*w)-2/5*cos(w)+1/5)^2+(-sin(2*w)+2/5*sin(w))^2)^(1/2)

>> theta=atan(imag(G)/real(G))

theta =
-i*atanh(1/2*(8/5/(exp(-i*w)^2-2/5*exp(-i*w)+1/5)-8/5/(1/exp(-i*w)^2-2/5/exp(-i*w)+1/5))/(4/5/(exp(-i*w)^2-2/5*exp(-i*w)+1/5)+4/5/(1/exp(-i*w)^2-2/5/exp(-i*w)+1/5)))
```

Dobijeni izrazi su prilično kompleksni i nisu u potpunosti u formi koju smo dobili analitički, ali se mogu dalje uprostiti:

```
>> M=simple(M)

M =
4/(5*cos(w)^2+5-6*cos(w))^(1/2)

>> theta=simple(theta)

theta =
i*atanh((-5+2*exp(-i*w)+5*exp(-i*w)^4-2*exp(-i*w)^3)/(5-2*exp(-i*w)+2*exp(-i*w)^2+5*exp(-i*w)^4-2*exp(-i*w)^3))
```

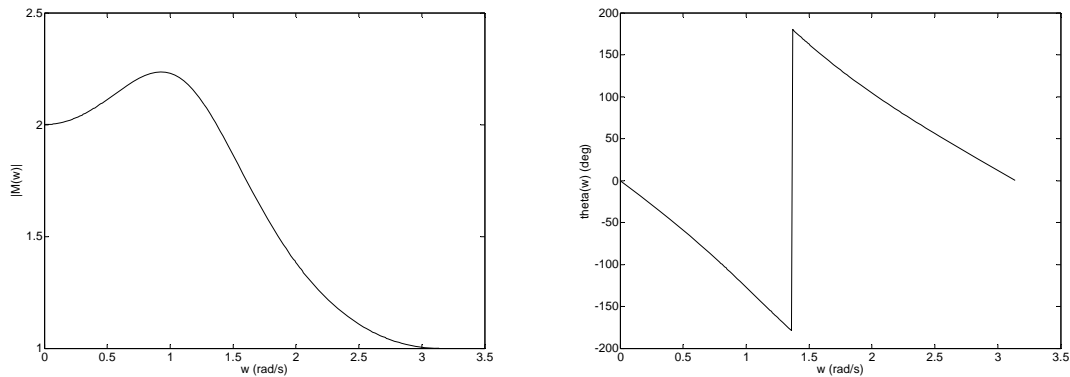
Matlab programom crtamo frekvencijske karakteristike:

```
w=0:0.01:pi;
z=exp(j*w);
G=1.6/(z.^2-0.4*z+0.2);
```



```
figure(2);
plot(w,abs(G));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|M(w)|');

figure(3);
plot(w,angle(G)*180/pi);
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('theta(w) (deg)');
```

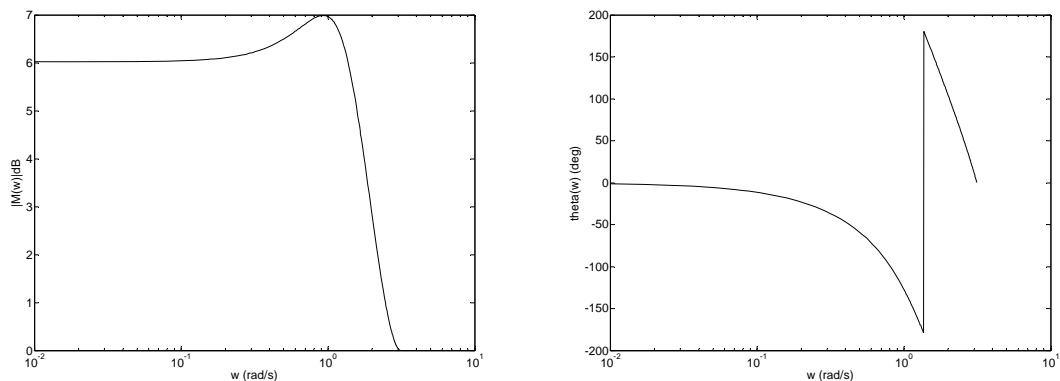


Uobičajeno je da se frekvencijska osa karakteristika crta u logaritamskoj razmeri, što ostvarujemo korišćenjem naredbe *semilogx*, umesto *plot*. Opseg učestanosti se bira tako da se polazi od dovoljno male vrednosti da obuhvati učestanosti nula i polova sistema, a završava sa granicom osnovnog opsega učestanosti π/T , odnosno sa π za $T=1$. Pošto je neprigušena učestanost polova sistema 0.04 (kvadratni koren slobodnog člana u $z^2-0.4z+0.2$ je), izabraćemo početnu učestanost 0.01 rad/s, dok je krajnja π . Takođe, amplitudna karakteristika se crta u decibelskim iznosima amplituda $M_{dB} = 20\log_{10}(M)$. Modifikovani Matlab kod je:

```
w=0.01:0.01:pi;
z=exp(j*w);
G=1.6./(z.^2-0.4*z+0.2);

figure(4);
semilogx(w,20*log10(abs(G)));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|M(w)|dB');

figure(5);
semilogx(w,angle(G)*180/pi);
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('theta(w) (deg)');
```



DISKRETIZACIJA I REKONSTRUKCIJA ANALOGNIH SIGNALA, DISKRETIZACIJA SISTEMA

Zadatak 6.5. Za analogni signal $x(t) = \cos(2t)u(t)$:

- napraviti Matlab program koji će nacrtati amplitudnu frekvencijsku karakteristiku $|X(j\omega)|$ analognog signala $x(t)$, pa na osnovu nje izabrati adekvatnu periodu T za diskretizaciju signala.
- proširiti Matlab program tako da nacrtati i amplitudnu frekvencijsku karakteristiku $|X^*(j\omega)|$ signala $x^*(t)$ odabranog idealnim odabiračem.
- proširiti Matlab program tako da nacrtati analogni signal i signale rekonstruisane iz diskretizovanog signala pomoću idealnog niskopropusnog filtra, odnosno kola zadržke nultog reda.

Rešenje:

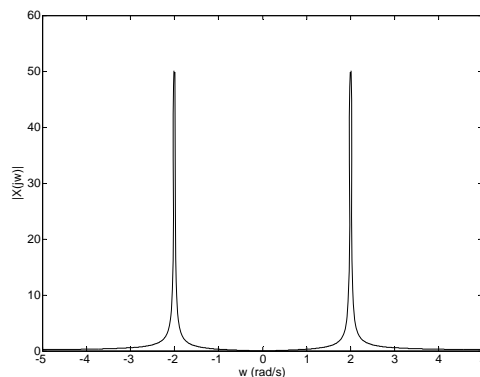
a) Pošto je kosinusni signal učestanosti $\omega_0 = 2$ rad/s pomnožen Hevisajdovim signalom, proizvod nije periodičan signal i nema u spektru samo Dirakove impulse na učestanostima $-\omega_0$ i ω_0 , već mu je spektar kontinualan po svim frekvencijama. Njegova Laplasova transformacija je (tablična) $X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, pa je amplitudna karakteristika:

$$|X(j\omega)| = |X(s)|_{s=j\omega} = \left| \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right|_{s=j\omega} = \left| \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} \right| = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Matlab program za crtanje amplitudne karakteristike i dobijena amplitudna karakteristika su:

```
w=0:0.01:5;
s=j*w; w0=2;
X=s./(s.^2+w0^2);
```

```
figure(1);
plot(w,abs(X));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|X(jw)|');
```



Vidi se da je spektar kontinualan po frekvencijama i da za učestanost $\omega = \pm\omega_0$ amplituda teži beskonačnosti, pa u tom smislu ovaj signal ima spektar sličan spektru signala $\cos(\omega_0 t)$. Pošto amplitudna karakteristika ima vrednosti veće od nule i nakon učestanosti ω_0 , mada se one spuštaju ka nuli kako učestanosti rastu, za najvišu učestanost u spektru korisnog signala moramo uzeti učestanost višu od ω_0 . Usvajmo da je najviša učestanost korisnog signala 5 rad/s, pa biramo učestanost odabiranja $\Omega = 10$ rad/s, da bude dva puta veća. Perioda odabiranja je $T = 2\pi/\Omega = \pi/5$ sec.

b) Signal diskretizovan idealnim odabiračem ima Laplasovu transformaciju:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\Omega),$$

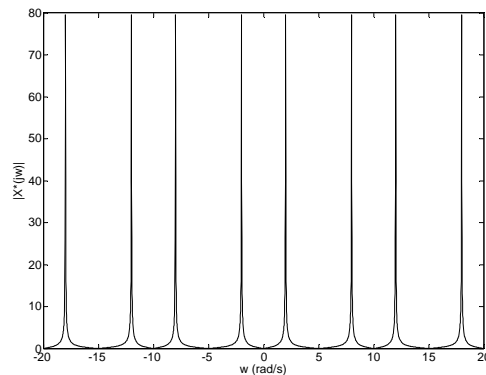
pa je amplitudna karakteristika odabranog signala:

$$|X^*(j\omega)| = |X^*(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(j\omega + jk\Omega)|$$

Matlab program koji izračunava amplitudnu karakteristiku za opseg učestanosti od -2Ω do 2Ω po gornjoj relaciji za opseg k od -50 do 50 (iako značajnog preklapanja spektara nema, pa realno nije potrebno da broj bude tako visok) glasi:

```
Omega=10; T=2*pi/Omega;
w=-2*Omega:0.01:2*Omega;
s=j*w;
Xodab=zeros(size(w));
for k=-50:50
    Xodab=Xodab+1/T*(s+j*k*Omega)./((s+j*k*Omega).^2+w0^2);
end

figure(2);
plot(w,abs(Xodab));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|X*(jw)|');
```



c) Signal $y_{NF}(t)$ rekonstruisan na osnovu odbiraka $x(kT)$ idealnom niskopropusnom filtracijom (NF) ima vremenski oblik dat teoreom odabiranja u vremenskom domenu:

$$y_{NF}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right),$$

pri čemu suma počinje sa $k = 0$ a ne sa $-\infty$, jer su odbirci $x(kT)$ kauzalnog signala jednaki nuli za negativne vrednosti k .

Kolo zadržke nultog reda drži izlaz $y_{h0}(t)$ na vrednosti $x(kT)$ počev od trenutka odabiranja kT pa sve do narednog trenutka odabiranja $(k+1)T$. Matematički opis signala izlaza je:

$$y_{h0}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (u(t-kT) - u(t-(k+1)T))$$

Matlab program koji realizuje rekonstrukciju i crta signale je:

```
t=0:0.05:15;
x=cos(2*t);

kT=0:T:15;
xkT=cos(2*kT);
```

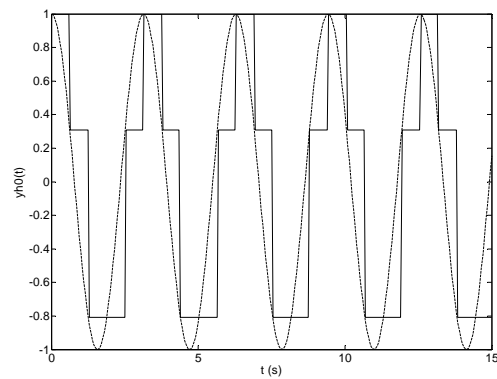
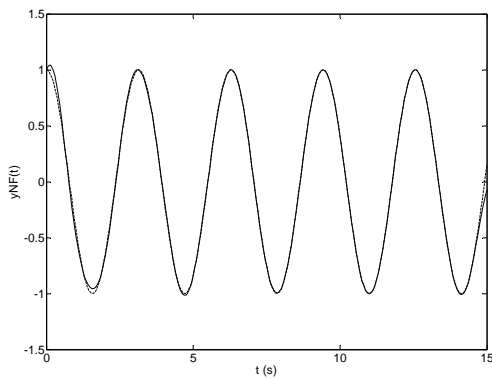
```

for j=1:length(t)
    yNF(j)=0;
    for k=1:length(kT)
        yNF(j)=yNF(j)+xkT(k)*sinc((t(j)-kT(k))/T);
    end
end

k=1;
for j=1:length(t)
    if t(j)>=k*T
        k=k+1;
    end
    yh0(j)=xkT(k);
end

figure(3); plot(t, x, 'k--', t, yNF, 'k');
xlabel('t (s)'); ylabel('yNF(t)'); %axis([0 5 -0.05 0.21]);
figure(4); plot(t, x, 'k--', t, yh0, 'k');
xlabel('t (s)'); ylabel('yh0(t)'); %axis([0 5 -0.05 0.21]);

```



Zadatak 6.6. Dat je analogni sistem:

$$G(s) = \frac{8-s}{(s+2)(s+4)}$$

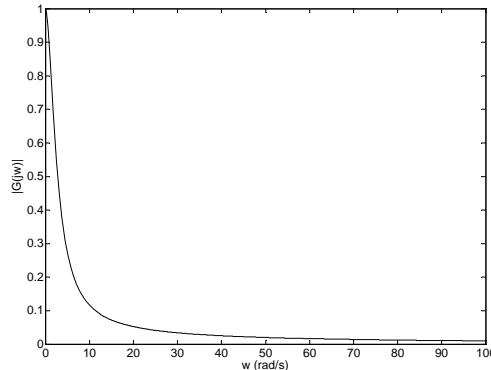
- Izabrati odgovarajuću periodu diskretizacije za ovaj sistem.
- Diskretizovati sistem metodom impulsne invarijantnosti.
- Diskretizovati sistem metodom step invarijantnosti.
- Diskretizovati sistem metodom Tustinove (bilinearne) transformacije.
- Napraviti Matlab program koji će uporediti amplitudne frekvencijske karakteristike sistema.

Rešenje:

a) Amplitudnu frekvencijsku karakteristiku sistema možemo dobiti pomoću sledećeg Matlab koda:

```
w=0:0.1:100;
s=j*w;
G=(8-s)./(s+2)./(s+4);

figure(1);
plot(w,abs(G));
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|G(jw)|');
```



Frekvencijski spektar je beskonačno širok po frekvencijama, pa pi diskretizaciji mora doći do preklapanja, bez obzira koliko veliku učestanost odabiranja izaberemo. Međutim, na učestanosti $\omega = 50$ rad/s amplitudna karakteristika se spušta na 2% svoje vrednosti pri nultoj učestanosti, pa možemo smatrati da je nadalje praktično zanemarljiva. Ako usvojimo $\omega_0 = 50$ rad/s za najvišu učestanost spektra korisnog signala, po Šenonovoj teoremi biramo učestanost odabiranja $\Omega = 2\omega_0 = 100$ rad/s. Perioda odabiranja je $T = 2\pi/\Omega = \pi/50$ sec.

b) Metodom impulsne invarijantnosti se održava jednakost impulsnog odziva analognog i diskretnog sistema u vremenskim trenucima odabiranja.

Jedan način da se izvede tražena jednakost je da se odredi impulsni odziv analognog sistema, uzmu njegovi odbirci sa periodom odabiranja T da budu impulsni odziv diskretnog sistema, pa odredi z -transformacija, koja sada predstavlja funkciju prenosa diskretnog ekvivalenta analognom sistemu po metodi impulsne invarijantnosti:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{8-s}{(s+2)(s+4)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s+2} - \frac{6}{s+4} \right\} = 5e^{-2t}u(t) - 6e^{-4t}u(t)$$

$$g(nT) = 5e^{-2nT}u(nT) - 6e^{-4nT}u(nT)$$

$$\begin{aligned} G_{imp}(z) &= \beta \{g(nT)\} = \beta \{5e^{-2nT}u(nT) - 6e^{-4nT}u(nT)\} = 5 \frac{z}{z - e^{-2T}} - 6 \frac{z}{z - e^{-4T}} \\ &= \frac{-z(z - 1.403)}{(z - 0.8819)(z - 0.7778)} \end{aligned}$$

c) Metodom step invarijantnosti se održava jednakost odziva na Hevisajdovu (step) pobudu analognog i diskretnog sistema u vremenskim trenucima odabiranja.

Jedan način da se izvede tražena jednakost je da se odredi step odziv analognog sistema, uzmu njegovi odbirci sa periodom odabiranja T da budu step odziv diskretnog sistema, pa odredi z -transformacija $Y(z)$ step odziva diskretnog ekvivalenta. Dobijenu z -transformaciju $Y(z)$ treba

podeliti sa izrazom $z/(z-1)$, jer je $Y(z) = G(z)X(z) = G(z)\frac{z}{z-1}$. Realizujemo navedeni postupak:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{8-s}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{5/2}{s+2} + \frac{3/2}{s+4} \right\} = u(t) - \frac{5}{2} e^{-3t} u(t) + \frac{3}{2} e^{-4t} u(t)$$

$$y(nT) = u(nT) - \frac{5}{2} e^{-3nT} u(nT) + \frac{3}{2} e^{-4nT} u(nT)$$

$$Y(z) = \beta \{g(nT)\} = \beta \left\{ u(nT) - \frac{5}{2} e^{-3nT} u(nT) + \frac{3}{2} e^{-4nT} u(nT) \right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{5}{2} \frac{z}{z-e^{-3T}} + \frac{3}{2} \frac{z}{z-e^{-4T}}$$

$$= \frac{-0.03813z(z-1.688)}{(z-1)(z-0.8819)(z-0.7778)}$$

Odavde je diskretna funkcija prenosa step invarijantne diskretizacije:

$$G_{step}(z) = \frac{-0.03813(z-1.688)}{(z-0.8819)(z-0.7778)}$$

d) Diskretizacija bilinearnom transformacijom se vrši smenom $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ u funkciji prenosa analognog sistema i direktno se dobija diskretni ekvivalent:

$$G_{tust}(z) = \frac{8 - \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 2 \right) \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 4 \right)} = \frac{-0.0197(z-1.671)(z+1)}{(z-0.8818)(z-0.7767)}$$

e) Frekvencijske karakteristike crtamo na standardan način u opsegu učestanosti od nula do polovine učestanosti odabiranja:

```
w=0:0.01:pi/T;
s=j*w;
Gs=(8-s)./(s+2)./(s+4);

z=exp(-j*w*T);
Gz_imp=-z.*(z-1.403)./(z-0.8819)./(z-0.7778);
Gz_step=-0.03813.*(z-1.688)./(z-0.8819)./(z-0.7778);
Gz_tust=-0.0197.*(z-1.671).*(z+1)./(z-0.8818)./(z-0.7767);

figure(4);
plot(w,20*log10(abs(Gs)),'k',w,20*log10(abs(Gz_imp)),'r',...
      w,20*log10(abs(Gz_step)),'g',w,20*log10(abs(Gz_tust)),'b');
xlabel('w (rad/s)'); ylabel('|G(w)|');
```

