

# DRUGI KOLOKVIJUM IZ PREDMETA SIGNALI I SISTEMI

odseci OT, IR, OS, OF

27.06.2006.

Ime i prezime:	Broj indeksa:	Odsek:	Grupa LAB	Zbir:
----------------	---------------	--------	-----------	-------

1. Napisati izraz za analitičku i sintetičku (direktnu i inverznu) relaciju Fourier-ove transformacije i navesti uslove koje kontinualni signal  $x(t)$  treba da zadovolji da bi Fourier-ova transformacija bila konvergentna.

Analitička relacija: 
$$X(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

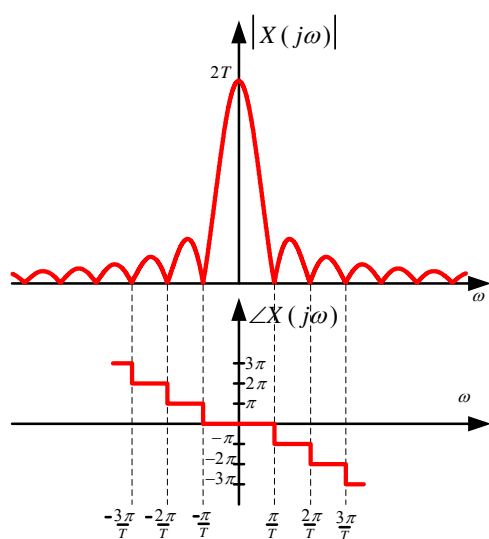
Sintetička relacija: 
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Uslovi konvergencije: Dva dovoljna uslova: **1.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ ; **2.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$  uz dva ograničenja:

- $x(t)$  ima konačan broj minimuma i maksimuma u svakom konačnom intervalu vremena i
- u svakom konačnom intervalu vremena postoji konačan broj prekida funkcije  $x(t)$ , sa konačnim graničnim vrednostima sa obe strane tačke prekida.

6

2. Za signal  $x(t) = \begin{cases} 1; & |t| < T \\ 0; & |t| \geq T \end{cases}$  a) sračunati Fourier-ov transformacioni par  $X(j\omega)$  i skicirati amplitudu i fazu njegovog spektra.



$$X(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

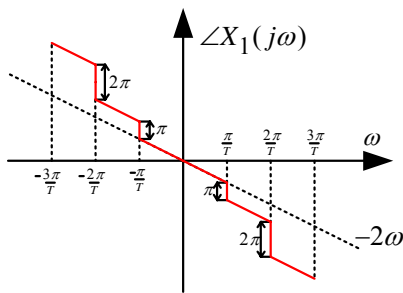
6

b) Napisati izraz za spektralnu gustinu energije ovog signala, izraz za energiju signala po Parseval-ovoj teoremi i na najjednostavniji način sračunati njegovu energiju.

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{4 \sin^2(\omega T)}{\omega^2}; \quad E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega; \quad E_X = \int_{-T}^T 1^2 dt = 2T$$

8

c) Na osnovu Fourier-ove transformacije iz tačke a) napisati izraz za  $X_1(j\omega)$  gde je  $x_1(t) = x(t-2)$  i skicirati amplitudu i fazu njegovog spektra. Komentarisati dobijeni rezultat.



$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \Rightarrow X_1(j\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} e^{-2j\omega}$$

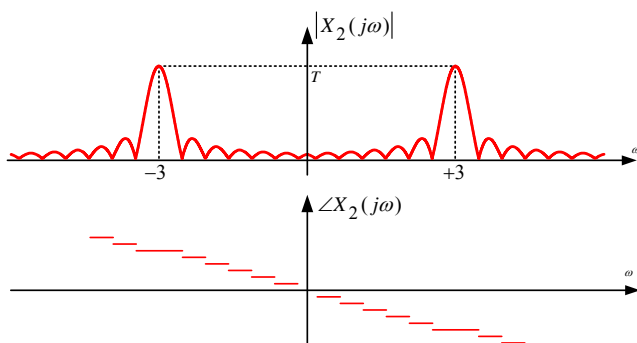
$|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)| \Rightarrow$  amplitudski spektar je nepromenjen

$$\angle X_1(j\omega) = \angle e^{-2j\omega} + \angle X(j\omega)$$

$$= \angle X(j\omega) - 2\omega \Rightarrow \text{linearno pomerenje faze}$$

6

d) Na osnovu rezultata iz tačke a) napisati izraz za  $X_2(j\omega)$  gde je  $x_2(t) = x(t) \cos(3t)$  i nacrtati amplitudu i fazu njegovog spektra. Komentarisati dobijeni rezultat.



$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} (e^{j3t} x(t) + e^{-j3t} x(t))$$

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2} X(j(\omega - 3)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + 3))$$

signal  $x_2(t)$  dobijen je amplitudskom modulacijom signala  $x(t)$

6

3. Impulsni odziv jednog kontinualnog LTI sistema glasi:  $h(t) = e^{-t} \sin(2t) u(t)$ .

a) Odrediti frekvencijski odziv  $H(j\omega)$  ovog sistema.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{(5 - \omega^2) + j2\omega}$$

6

b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal  $x(t) = \sin(4t)$ . Odrediti Fourier-ov transformacioni par signala  $x(t)$  a zatim, na osnovu njega odrediti odziv sistema  $y(t)$ .

$$X(j\omega) = j\pi\delta(\omega + 4) - j\pi\delta(\omega - 4)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{-j}{11 + j8} 2\pi\delta(\omega + 4) + \frac{j}{11 - j8} 2\pi\delta(\omega - 4)$$

$$y(t) = \frac{-j}{11 + j8} e^{-4jt} + \frac{j}{11 - j8} e^{4jt} = -\frac{1}{185} (16 \cos(4t) + 22 \sin(4t))$$

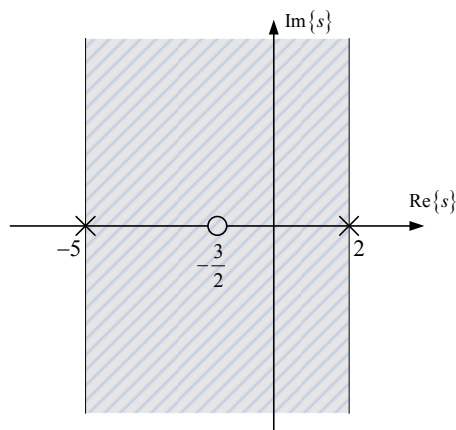
10

4. Za signal  $x(t) = e^{2t}u(-t) - e^{-5t}u(t)$  odrediti Laplace-ovu transformaciju, predstaviti je u obliku realne racionalne funkcije po kompleksnoj promenljivoj  $s$ , a zatim u  $s$  ravni skicirati poziciju nula, polova i oblasti konvergencije.

Laplaceova transformacija je  $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \frac{1}{2-s} - \frac{1}{5+s} = -\frac{2s+3}{s^2+3s-10}$  uz oblast konvergencije  $-5 < \operatorname{Re}\{s\} < 2$

Sistem ima jednu nulu u  $z_1 = -\frac{3}{2}$  i dva pola  $p_1 = -5$  i  $p_2 = 2$ .

Raspored nula i polova i oblast konvergencije u kompleksnoj  $s$ -ravni su prikazani na sledećoj slici.



8

5. Funkcija prenosa jednog kauzalnog LTI sistema glasi  $H(s) = \frac{s+4}{s^2+6s+13}$ .

a) Odrediti impulsni odziv  $h(t)$  ovog sistema.

Ukoliko predstavimo funkciju prenosa na sledeći način

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+3)^2+2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+3)^2+2^2}$$

jednostavno se, primenom inverzne Laplaceove transformacije, dobija impulsni odziv sistema:

$$h(t) = e^{-3t} \left( \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) u(t)$$

10

b) Da li je moguće i zašto primeniti granične teoreme Laplace-ove transformacije na funkciju  $H(s)$ , pa ako jeste njihovom primenom odrediti  $h(0)$  i  $h(\infty)$ .

Moguće je primeniti obe granične teoreme jer polovi funkcije prenosa leže u levoj poluravni  $s$ -ravni ( $p_{1,2} = -3 \pm 2j$ )

$$h(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2+4s}{s^2+6s+13} = 1$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2+4s}{s^2+6s+13} = 0$$

6

6. Primenom Laplace-ove transformacije rešiti diferencijalnu jednačinu  $\dot{x}(t) + 10x(t) = u(t)$ ;  $x(0) = 1$  za  $t \geq 0$ .

Primenom Laplaceove transformacije na diferencijalnu jednačinu se dobija:

$$sX(s) - x(0) + 10X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s+10)X(s) = \frac{1}{s} + 1$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s} + \frac{9}{s+10}$$

Primenom inverzne Laplaceove transformacije se dobija:

$$x(t) = \left( \frac{1}{10} + \frac{9}{10} e^{-10t} \right) u(t)$$

8

7. Impulsni odziv jednog kauzalnog diskretnog sistema glasi  $h[k] = [1 + 0.2^k] u[k]$ . a) Odrediti funkciju diskretnog prenosa  $H(z)$ , njegovu oblast konvergencije i ispitati njegovu stabilnost.

Funkcija diskretnog prenosa je

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] z^{-k} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.2} = \frac{2z(z-0.6)}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{2z^2 - 1.2z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

uz oblast konvergencije  $|z| > 1$ .

Sistem je nije BIBO stabilan, jer svi polovi ne leže u unutrašnjosti jedinične kružnice  $z$  ravni ( $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0.2$ ).

8

- b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal  $x[k] = -2^k u[-k-1]$ . Odrediti njegovu zed transformaciju i njenu oblast konvergencije.

Zed transformacija signala  $x[k]$  je

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -2^k u[-k-1] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -2^k z^{-k} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} -2^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-1} z)^n = -(2^{-1} z) \frac{1}{1 - 2^{-1} z} = \frac{z}{z-2} \end{aligned}$$

uz oblast konvergencije  $|2^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$

6

- c) Na osnovu prethodnih tačaka, odrediti zed transformaciju odziva sistema  $Y(z)$  kao i sam odziv  $y[k]$ .

Zed transformacija odziva sistema je  $Y(z) = H(z)X(z)$ , dok je oblast konvergencije presek oblasti konvergencije  $H(z)$  i  $X(z)$ .

$$Y(z) = \frac{2z(z-0.6)}{(z-1)(z-0.2)} \cdot \frac{z}{z-2}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$Y(z) = -\frac{z}{z-1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{z}{z-0.2} + \frac{28}{9} \cdot \frac{z}{z-2}, \quad 1 < |z| < 2$$

Odavde se, vodeći računa o oblasti konvergencije, inverznom zed transformacijom dobija odziv

$$y[k] = -u[k] - \frac{1}{9} \cdot 0.2^k u[k] - \frac{28}{9} \cdot 2^k u[-k-1]$$

6