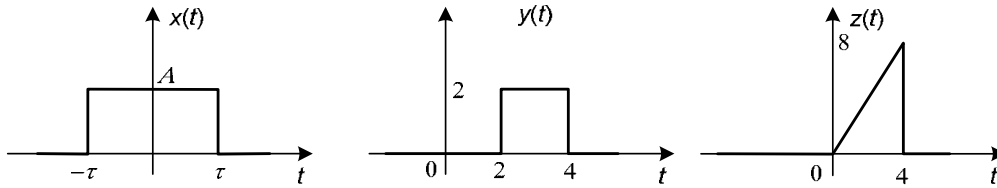


FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

Zadatak 4.1. Odrediti Fourierovu transformaciju signala na slici i skicirati amplitudni spektar.



Rešenje:

Posmatrajući signal $x(t)$, uvedimo $p_{2\tau}(t)$ - normirani centrirani pravougaoni signal intenziteta $A=1$, koji se vremenski prostire u vremenu $t = (-\tau, \tau)$. Njegova Fourierova transformacija je:

$$P_{2\tau}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{2\tau}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{2}{2j\omega} (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) = 2\tau \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$$

Ako se uvede pogodna funkcija $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, tada Fourierova transformacija ima oblik:

$$P_{2\tau}(j\omega) = 2\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right).$$

Korišćenjem osobina Fourierove transformacije, jednostavno se dobijaju i tražene transformacije:

$$x(t) = A p_{2\tau}(t) \Rightarrow X(j\omega) = A P_{2\tau}(j\omega) = A 2\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right), \text{ (korišćena osobina linearnosti: } Af(t) \leftrightarrow AF(j\omega) \text{)}$$

$$y(t) = 2 p_2(t-3) \Rightarrow Y(j\omega) = e^{-3j\omega} 2 P_2(j\omega) = e^{-3j\omega} 4 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right), \text{ (pomeranje vremena: } f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega) \text{)}$$

Na osnovu osobine $tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$, transformacija signala $f(t) = 2 p_4(t-2)$ iznosi

$$F(j\omega) = e^{-2j\omega} 8 \text{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) = e^{-2j\omega} 8 \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} = e^{-2j\omega} 4 \frac{\sin(2\omega)}{\omega}.$$

$$\text{Konačno, tražena transformacija signala } z(t) \text{ je: } Z(j\omega) = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} = j \left(\frac{4}{\omega^2} e^{-j2\omega} (2\omega e^{-j2\omega} - \sin(2\omega)) \right).$$

Zgodan način da se izbegnu „fizički posao“ prilikom određivanja Fourierovih transformacija je primena Matlabovog *Symbolic Toolbox*-a. Jednostavan program će odrediti transformacije sva tri signala:

```
syms t w A tau
P=fourier(sym('Heaviside(t+tau)')-sym('Heaviside(t-tau)'))
X=A*P
Y=fourier(sym('Heaviside(t+1)')-sym('Heaviside(t-1)'))*2*exp(-j*3*w)
F=fourier(sym('Heaviside(t+2)')-sym('Heaviside(t-2)'))*2*exp(-j*2*w)
Z=simple(j*diff(F, 'w'))
```

Naredbom *syms* se definišu simboličke promenljive, naredba *fourier* računa transformacije (njen parnjak *ifourier* računa inverznu transformaciju), *diff* se koristi za simboličko diferenciranje, a naredba *simple* uprošćava dobijeni simbolički izraz transformacije. Tačka-zarez je namerno izostavljen nakon naredbi za izračunavanje transformacija, pa se rezultat simboličkog izračunavanja dobija u komandnom prozoru:

```

P =
2/w*sin(tau*w)

X =
2*A/w*sin(tau*w)

Y =
4/w*sin(w)*exp(-3*i*w)

F =
4/w*sin(2*w)*exp(-2*i*w)

Z =
4*(-i*sin(2*w)+2*i*cos(2*w)*w+2*sin(2*w)*w)*exp(-2*i*w)/w^2

```

Vidi se da izraz za Z nije uprošćen do kraja, pa je nadzor (i eventualna intervencija) korisnika za tastaturom, ipak, potrebna.

Dalje, programski se mogu grafički prikazati spektri signala. Npr. za signale Y i Z , sledeći Matlab program iscertava amplitudne spektralne karakteristike:

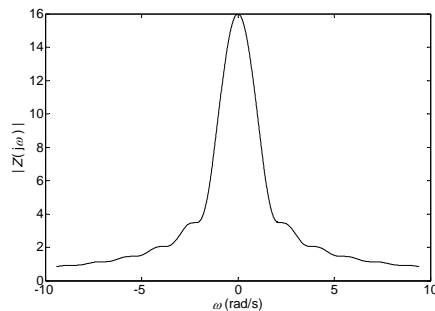
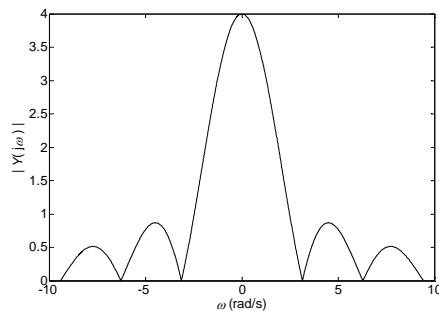
```

w=-3*pi:0.01:3*pi;
Y=4./w.*sin(w).*exp(-3*j*w);
Z=j*4./w.^2.*exp(-2*j*w).*(2*w.*exp(-j*2*w)-sin(2*w));

figure(1);
plot(w, abs(Y));
xlabel('\it\omega (rad/s)');
ylabel('| \itY( j\it\omega ) |');

figure(2);
plot(w, abs(Z));
xlabel('\it\omega (rad/s)');
ylabel('| \itZ( j\it\omega ) |')

```



Zadatak 4.2. Odrediti Fourierovu transformaciju sledećih signala:

a) $x(t) = e^{2+t}u(-t+1)$

e) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT), \quad |\alpha| < 1$

b) $x(t) = e^{-3t}[u(t+2)-u(t-3)]$

f) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\delta(t-(2k)T) + \delta(t-(2k+1)T))$

c) $x(t) = u(t) + 2\delta(3-2t)$

g) $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$

d) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$

h) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-|t-2k|}$

Rešenje:

a) Koristeći osobine vremenskog pomeranja i reverzibilnosti $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$, te Fourierovu transformaciju $e^{-at}u(t) \leftrightarrow 1/(a+j\omega)$:

$$x(t) = e^3 e^{-t-1} u(-(t-1)) \Rightarrow X(j\omega) = e^3 e^{-j\omega} \mathcal{F}(e^t u(-t)) = e^{3-j\omega} \cdot \frac{1}{1-j\omega}$$

$$b) x(t) = e^6 e^{-3(t+2)} u(t+2) - e^{-9} e^{-3(t-3)} u(t-3) \Rightarrow X(j\omega) = e^6 e^{j2\omega} \frac{1}{3+j\omega} - e^{-9} e^{-j3\omega} \frac{1}{3+j\omega}$$

c) Korišćenjem osobina skaliranja $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a})$ i pomeranja vremena:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) + 2\mathcal{F}\left(\delta\left(-2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)\right) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + 2e^{-j\omega 3/2} \mathcal{F}(\delta(-2t)) \\ &= \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + 2e^{-j\omega 3/2} \frac{1}{|-2|} \mathcal{F}(\delta(t)) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + e^{-j\omega 3/2} \end{aligned}$$

$$d) X(j\omega) = \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - \omega^2} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$e) X(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\omega k T} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega T})^k = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega T}}$$

$$f) X(j\omega) = 2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\delta(t - (2k)T)) \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\delta(t - (2k+1)T)) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega 2kT} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega (2k+1)T}$$

$$g) \text{ Tablična transformacija } f(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t} \leftrightarrow F(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq a \\ 0, & |\omega| > a \end{cases}$$

primenjena na oba člana proizvoda u opisu signala daje pojedinačne transformacije:

$$f_1(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow F_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}, f_2(t) = f_1(t-1) \leftrightarrow F_2(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$$

Primenom osobine konvolucije Fourierovih transformacija u frekvencijskom domenu:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\nu) F_1(j\omega - j\nu) d\nu = \begin{cases} 0, & \omega \notin [-2\pi, 2\pi] \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\omega+\pi} e^{-j\nu} \cdot 1 d\nu, & -2\pi \leq \omega < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-\pi}^{\pi} e^{-j\nu} \cdot 1 d\nu, & 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & \omega \notin [-2\pi, 2\pi] \\ \frac{j}{2\pi} (1 - e^{-j\omega}), & -2\pi \leq \omega < 0 \\ \frac{j}{2\pi} (e^{-j\omega} - 1), & 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{cases} \quad h)$$

$$f(t) = e^{-|t|} = e^{-t} u(t) + e^t u(-t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega 2k} \mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega 2k} = \frac{2}{1+\omega^2} \frac{1}{1-e^{-j2\omega}}$$

Zadatak 4.3. Odrediti Fourierovu transformaciju moduliranih signala i skicirati amplitudni spektar.

$$a) x(t) = p_4(t) \cos(50t)$$

$$b) y(t) = e^{-3t} u(t) \cos(20t)$$

Rešenje:

$$a) p_4(t) \leftrightarrow P_4(j\omega) = 4 \operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right), \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0),$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_4(\nu) [\pi\delta(\omega + 50 - \nu) + \pi\delta(\omega - 50 - \nu)] d\nu = \frac{1}{2} P_4(j(\omega + 50)) + \frac{1}{2} P_4(j(\omega - 50)) \\ &= 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{2(\omega + 50)}{\pi}\right) + 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{2(\omega - 50)}{\pi}\right) \end{aligned}$$

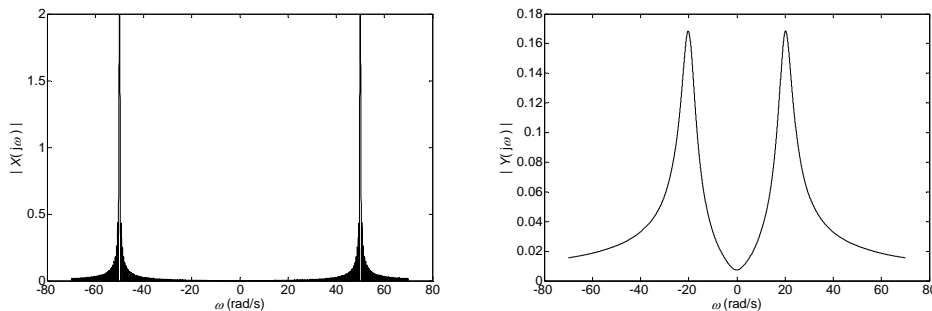
b) Transformacioni parovi članova u proizvodu analitičkog opisa signala $y(t)$ su:

$$f_1(t) = e^{-3t} u(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} \quad \text{i} \quad f_2(t) = \cos(20t) \leftrightarrow F_2(j\omega) = \pi\delta(\omega - 20) + \pi\delta(\omega + 20).$$

Koristeći osobinu konvolucije u frekvencijskom domenu:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\nu) F_1(j\omega - j\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\pi\delta(\nu - 20) + \pi\delta(\nu + 20)) \frac{1}{3 + j(\omega - \nu)} d\nu \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 + j(\omega + 20)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 + j(\omega - 20)} \end{aligned}$$

Matlab program, sličan datom u zadatku V 4.1, generiše amplitudne spektre signala:

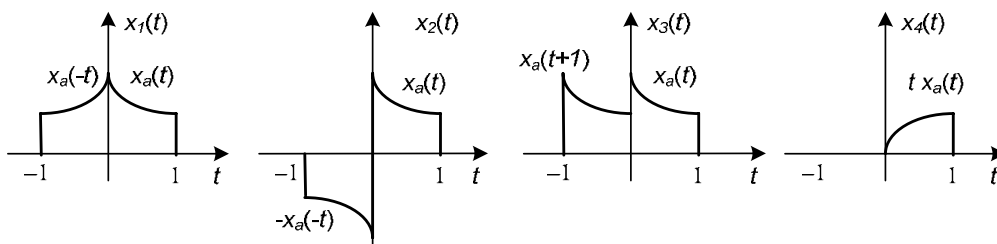


Množenje korisnog signala kosinusnim modulišućim signalom vrši pomeranje frekvencijskog sadržaja signala na više učestanosti (centrirano oko noseće učestanosti modulacije) i princip je rada analogne amplitudne modulacije.

Zadatak V 4.4. Odrediti Fourierovu transformaciju $X_a(j\omega)$ signala

$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

a zatim na osnovu poznatog $F(\omega)$, primenom osobina Fourierove transformacije, odrediti i Fourierovu transformaciju signala na slici:



Rešenje:

$$X_a(j\omega) = \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1+j\omega} (1 - e^{-(1+j\omega)})$$

$$x_1(t) = x_a(t) + x_a(-t) \Rightarrow X_1(j\omega) = X_a(j\omega) + X_a(-j\omega) = \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} + \frac{1 - e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega} = \frac{2 - 2e^{-1}(\cos \omega - \omega \sin \omega)}{1 + \omega^2}$$

Uočavamo da je spektar $X_1(j\omega)$ realan, te je ovde mesto da se podsetimo da generalno važi da neparni signali imaju realan spektar.

$$x_2(t) = x_a(t) - x_a(-t) \Rightarrow X_2(j\omega) = X_a(j\omega) - X_a(-j\omega) = \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} - \frac{1 - e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega}$$

$$x_3(t) = x_a(t) + x_a(t-1) \Rightarrow X_3(j\omega) = X_a(j\omega)(1 + e^{-j\omega})$$

$$x_4(t) = tx_a(t) \Rightarrow X_4(j\omega) = j \frac{dX_a(j\omega)}{d\omega} = \frac{1 - (2+j\omega)e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2}$$

Zadatak V 4.5. Date su Furijeove transformacije analognih signala. Primenom inverzne Fourierove transformacije, odrediti signale kojima date transformacije odgovaraju.

$$a) X(j\omega) = \frac{2 \sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$$

$$c) X(j\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

$$b) X(j\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$$

$$d) X(j\omega) = \frac{5}{4 + j7 - j\omega}$$

Rešenje:

Za traženje signala čija je Fourierova transformacija data, postupak se obično svodi na sukcesivnu primenu osobina Fourierove transformacije, koja polazni izraz date transformacije svodi na članove, čija je inverzna transformacija poznata – tablična.

a) Primenom osobine translacije u frekvencijskom domenu dobija se:

$$X(j\omega) = \frac{2 \sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi} \Rightarrow x(t) = e^{j2\pi t} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2 \sin 3\omega}{\omega} \right) = e^{j2\pi t} [u(t+3) - u(t-3)]$$

b) Primenom elementarnom trigonometrijskom transformacijom kosinusne funkcije, dobija se:

$$X(j\omega) = \frac{e^{j4\omega} e^{j\pi/3} + e^{-j4\omega} e^{-j\pi/3}}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{e^{j\pi/3}}{2} \delta(t+4) + \frac{e^{-j\pi/3}}{2} \delta(t-4)$$

$$c) x(t) = \frac{2}{j\pi} \sin(1 \cdot t) + \frac{3}{\pi} \cos(2\pi t)$$

d) Korišćenjem osobine translacije u frekvencijskom domenu (modulacije):

$$X(j\omega) = \frac{5}{4 + j(-\omega + 7)} = \frac{5}{4 + j(-(\omega - 7))} \Rightarrow x(t) = 5e^{j7t} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{4 - j\omega} \right) = 5e^{j7t} e^{-4(-t)} u(-t) = 5e^{(4+j7)t} u(-t)$$