

Сигнали и системи
ДРУГИ ДОМАЋИ ЗАДАТАК 2007
Милан Синобад 116/04
група: A8

Вредности параметара

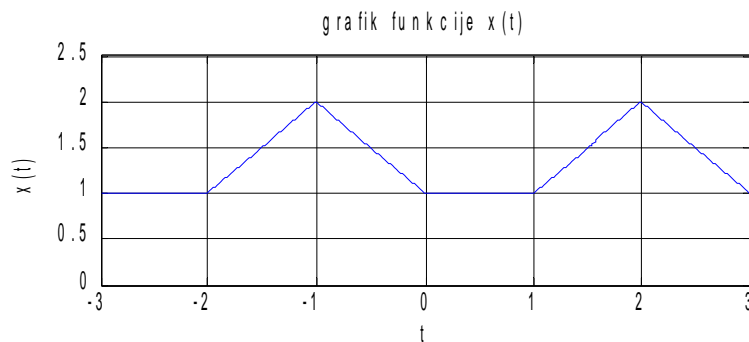
$$P = \text{mod}(116+2004, 5) = 0$$

$$Q = \text{mod}(1+1+6+2+4, 5) = 4$$

Задатак 2.1.

Развој периодичних сигнала у Фуријеов ред

а)



Сигнал $x(t)$ је задат графиком.

Периода сигнала је $T = 3s$.

Док је оновна учестаност

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad / s}$$

Фуријеов ред је дат релацијом

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

где су коефициенти a_k које је и потребно одредити дати као

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

Замењујући вредности у дате релације имамо да је:

$$a_0 = \frac{4}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 e^{-j\omega_0 k t} dt + \int_1^2 t \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt + \int_2^3 (4-t) \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \left(-2j\pi k + 6e^{-\frac{4j\pi k}{3}} - 3e^{-\frac{2j\pi k}{3}} + 2je^{-2j\pi k} \right)$$

6) Matlab код програма

(Главни програм)

```
close all;
clear all;

N=10;
A=Ann(N);
k=-N:N;

figure(1);
stem(k,abs(A));
title('amplitudska karakteristika koeficienata ak za k [-N,N]')
xlabel('k');
ylabel('|ak|');

figure(2);
stem(k,angle(A));
title('fazna spektralna karakteristika koeficienata ak')
xlabel('k');
ylabel('angle(ak)');
```

(Функцијски потпрограм)

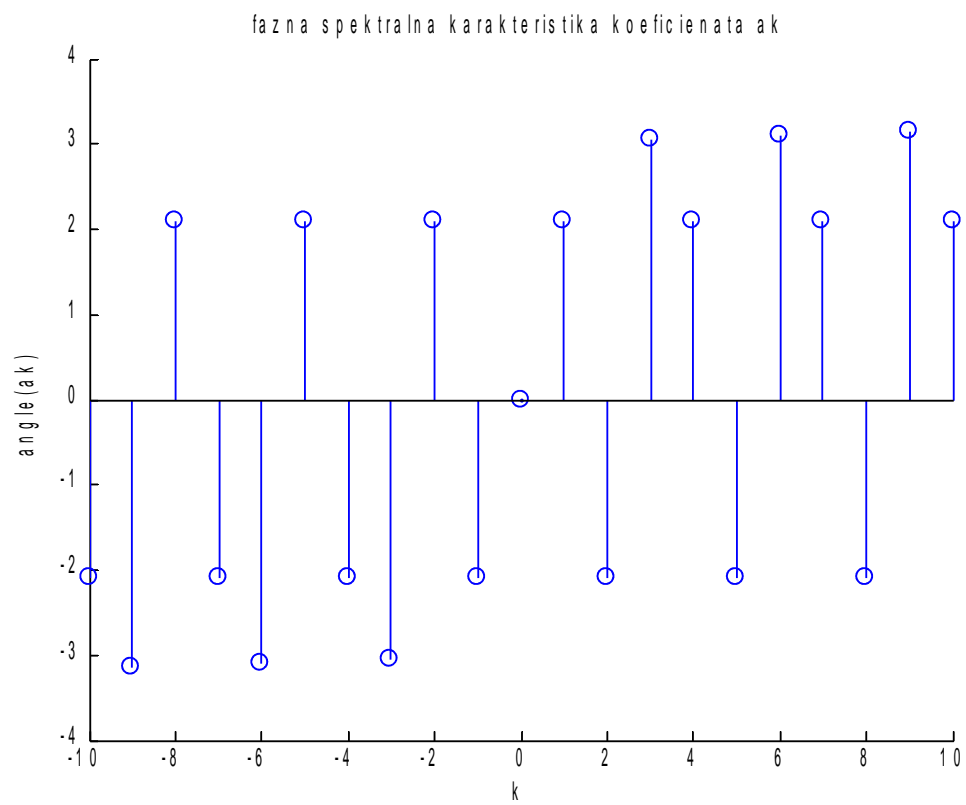
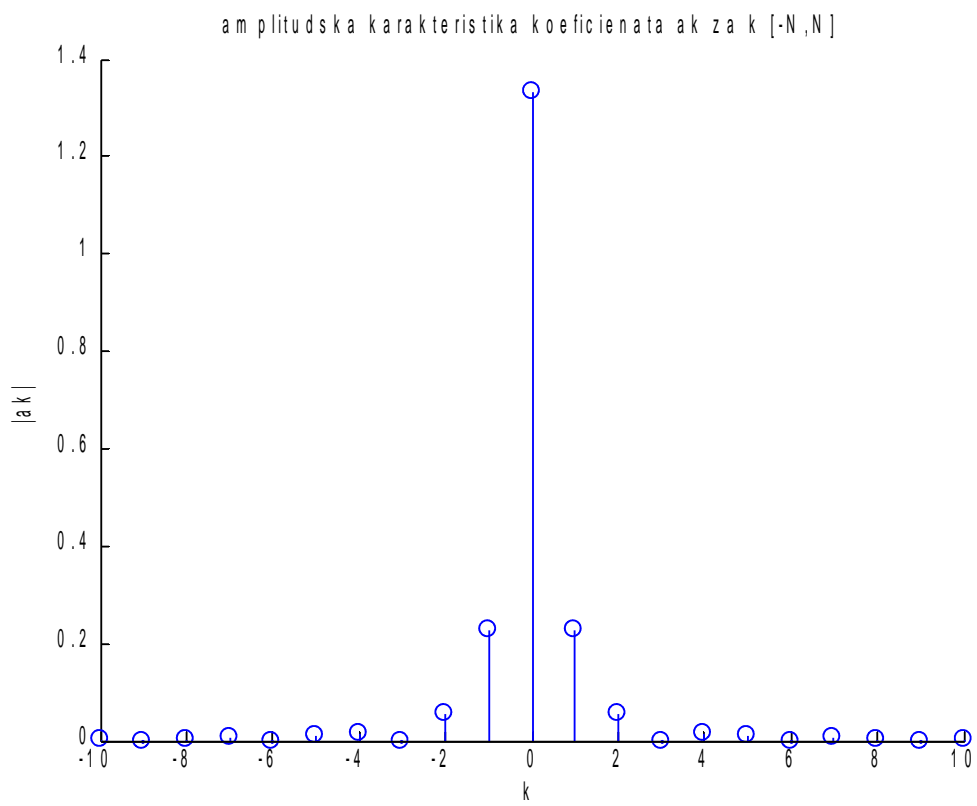
исти функцијски потпрограм ћемо користити и у следећој тачки

```
function x=Ann(N);
%data funkcija Ann za uneto N, vraca izracunate koeficoente
%Furijevog reda ak od -N do N

T=3;
w0=2*pi/T;
syms tau n
a0=(1/T)*(int(exp(-i*w0*0*tau),tau,0,1)+int(tau*exp(-i*w0*0*tau),tau,1,2)...
+int((4-tau)*exp(-i*w0*0*tau),tau,2,3));
an=(1/T)*(int(exp(-i*w0*n*tau),tau,0,1)+int(tau*exp(-i*w0*n*tau),tau,1,2)...
+int((4-tau)*exp(-i*w0*n*tau),tau,2,3));
a0=subs(a0);
an=simple(an);

k=-N:-1;
x=subs(an,n,k);
x=[x a0];

k=1:N;
x=[x subs(an,n,k)];
```



ц)

(Главни програм)

```
% signale cemo iscrtavati za dve periode -T do T
close all;
clear all;

N=10;
T=3;
t=-T:0.001:T;

figure(1);
% originalan signal x(t)
x=(t<-2 & t>=-3)+(t<-1 & t>=-2).*(t+3)+(t<0 & t>=-1).*(1-t)...
  +(t<1 & t>=0)+(t<2 & t>=1).*t+(t<=3 & t>=2).*(4-t);
subplot(3,1,1); plot(t,x);
title('originalan signal x(t)');
axis([-3 3 0 2.5]);

%signal x(t) rekonstruisan na osnovu N koeficienata
A1=Ann(N);
k=-N:N;

syms tau
xn=sum(A1.*exp(i*2*pi/T*k*tau));
xn=subs(xn,tau,t);

subplot(3,1,2); plot(t,xn);
title('signal x(t) rekonstruisan na osnovu N koeficienata');
axis([-3 3 0 2.5]);

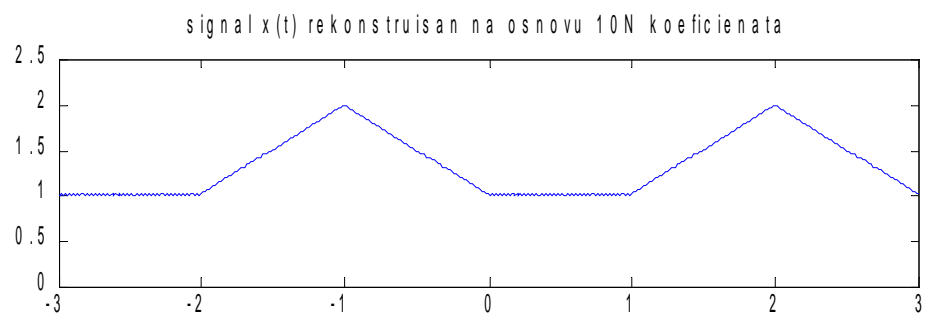
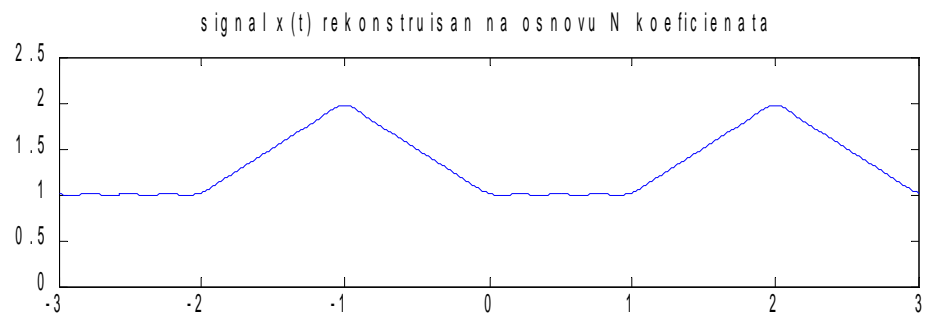
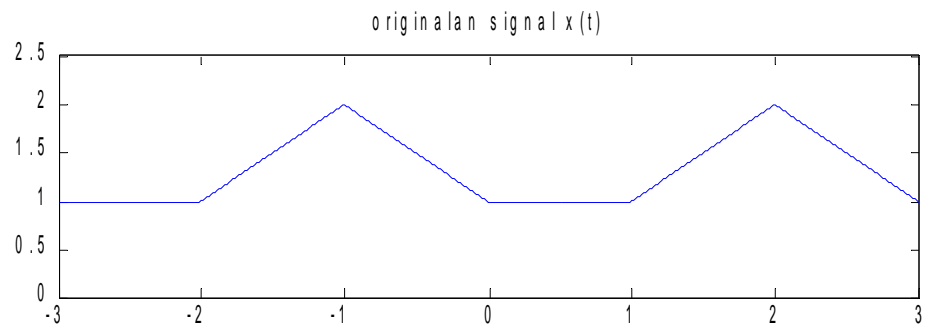
%signal x(t) rekonstruisan na osnovu 10N koeficienata
A2=Ann(10*N);
k=-10*N:10*N;

syms tau
x10n=sum(A2.*exp(i*2*pi/T*k*tau));
x10n=subs(x10n,tau,t);

subplot(3,1,3); plot(t,x10n);
title('signal x(t) rekonstruisan na osnovu 10N koeficienata');
axis([-3 3 0 2.5]);
```

(Функцијски потпрограм)

коришћен је потпрограм из претходне тачке



A)

```
% signale cemo iscrtavati za jednu periodu od 0 do T
close all;
clear all;

T=3;
t=0:0.01:T;

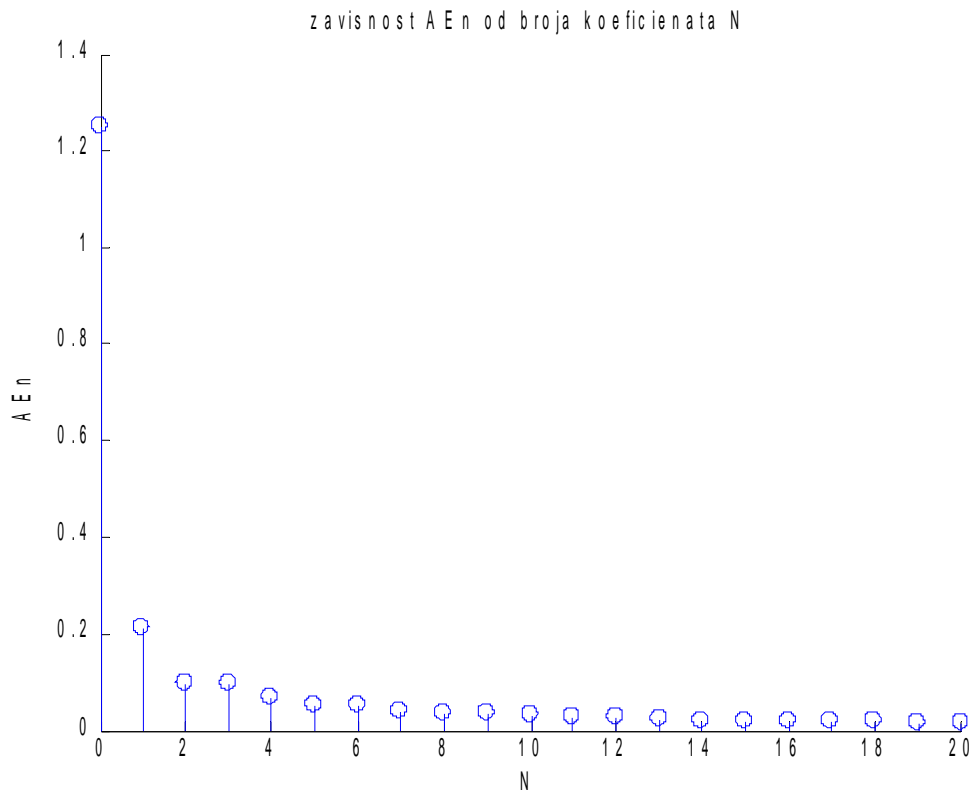
% originalan signal x(t)
x=(t<1 & t>=0)+(t<2 & t>=1).*t+(t<=3 & t>=2).*(4-t);

% odredjivanje zavisnosti
AE=[];
for N=1:20;
    A1=Ann(N);
    k=-N:N;

    syms tau
    xn=sum(A1.*exp(i*2*pi/T*k*tau));
    xn=subs(xn,tau,t);
    aen=abs(x-xn);
    AE=[AE max(aen)];
end

x0=(t<=3 & t>=0)*(3/4);
ae0=abs(x-x0);
AE=[max(ae0) AE];

figure(1);
stem(0:N,AE);
title('zavisnost AEn od broja koeficienata N');
xlabel('N');
ylabel('AEn');
```



Задатак 2.2.

Пропагација периодичних сигнала кроз ЛТИ системе

а) импулсни одзив система описаног фреквенцијским одзивом

Фреквенцијски одзив система је дат једначином

$$H(j\omega) = \frac{20j\omega}{(10 + j\omega)^2}$$

Урадићемо Фуријеову трансформацију следећих сигнала:

$$x_1(t) = e^{-\omega_0 t} u(t)$$

$$x_2(t) = te^{-\omega_0 t} u(t)$$

Имамо да је

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega_0 t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\omega_0 + j\omega)t} dt$$

$$X_1(j\omega) = -\frac{1}{\omega_0 + j\omega} e^{-(\omega_0 + j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\omega_0 + j\omega}$$

за сигнал $x_2(t)$ имамо трансформацију

$$X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\omega_0 t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{+\infty} te^{-(\omega_0 + j\omega)t} dt$$

$$X_2(j\omega) = -\frac{1}{\omega_0 + j\omega} \int_0^{+\infty} t de^{-(\omega_0 + j\omega)t} = -\frac{1}{\omega_0 + j\omega} \left(te^{-(\omega_0 + j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-(\omega_0 + j\omega)t} dt \right)$$

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{(\omega_0 + j\omega)^2}$$

Фреквенцијски одзив $H(j\omega)$ ћемо трансформисати на следећи начин

$$H(j\omega) = \frac{20j\omega}{(10 + j\omega)^2} = 20 \cdot \left(\frac{10 + j\omega}{(10 + j\omega)^2} - \frac{10}{(10 + j\omega)^2} \right)$$

$$H(j\omega) = 20 \cdot \left(\frac{1}{10 + j\omega} - \frac{10}{(10 + j\omega)^2} \right)$$

Одавде имамо да је $h(t)$ једнако

$$h(t) = 20(e^{-10t} u(t) - 10te^{-10t} u(t)) = 20(1 - 10t)e^{-10t} u(t)$$

Исти резултат добијамо помоћу следећег кода Матлаб програма.

```
syms w
H=(20*j*w)/(10+j*w)^2;
ht=ifourier(H);
```

6) Matlab програм за графичко приказивање карактеристика система

```
clear all;
close all;

syms w t
Hjw=(20*j*w)/(10+j*w)^2;
ht=ifourier(Hjw,w,t);

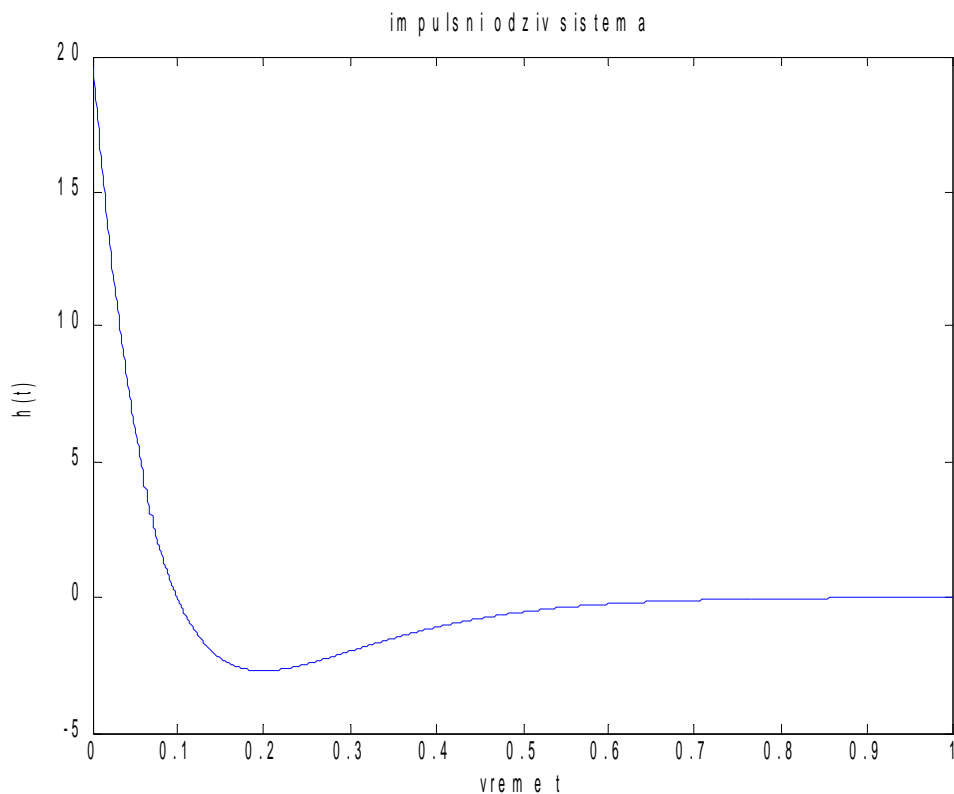
tp=0:0.001:1;
h=subs(ht,t,tp);

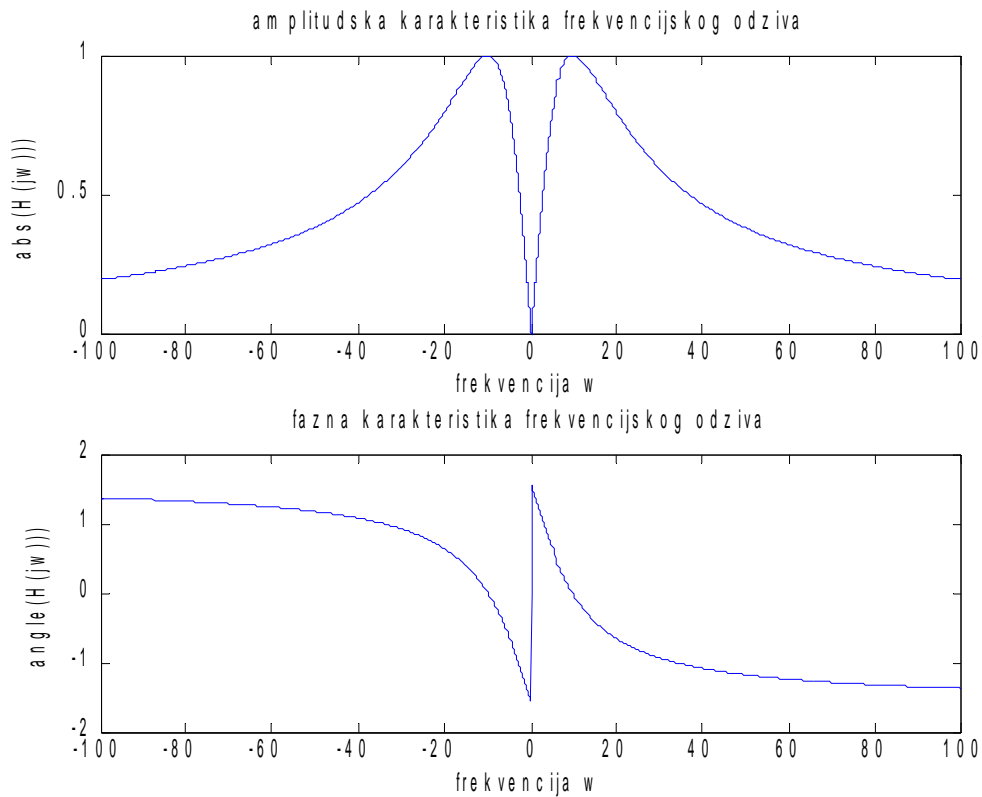
figure(1);
plot(tp,h);
title('impulsni odziv sistema');
xlabel('vreme t'); ylabel('h(t)');

wp=-100:0.01:100;
H=subs(Hjw,w,wp);

figure(2);
subplot(2,1,1); plot(wp,abs(H));
title('amplitudska karakteristika frekvencijskog odziva');
xlabel('frekvencija w'); ylabel('abs(H(jw))');

subplot(2,1,2); plot(wp,angle(H));
title('fazna karakteristika frekvencijskog odziva');
xlabel('frekvencija w'); ylabel('angle(H(jw))');
```





ц) Одзив система на побуду $x(t)$

Одзив система $y(t)$ можемо да представимо конволуцијом улазног сигнала у систем $x(t)$ и импулсног одзива $h(t)$. $y(t) = x(t) * h(t)$

Како смо улазни сигнал $x(t)$ у првом задатку развили у Фуријеов ред, имамо:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k (t - \tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} e^{-j\omega_0 k \tau} d\tau$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 k \tau} d\tau \right) a_k e^{j\omega_0 k t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j\omega_0 k) a_k e^{j\omega_0 k t}$$

Коначно имамо да су коефициенти Фуријеовог развоја одзива система на побуду $x(t)$, дати релацијом:

$$c_k = a_k H(j\omega_0 k) \quad c_0 = 0$$

$$c_k = \frac{10}{\pi k} \left(2\pi k + 6e^{-\frac{4j\pi k}{3}} - 3je^{-\frac{2j\pi k}{3}} - 2e^{-2j\pi k} \right) \cdot \frac{1}{(30 + 2j\pi k)}$$

д) Matlab програм за графичко приказивање амплитудске и фазне спектралне карактеристике коефицијената c_k

(Главни програм)

Главни програм је исти као програм који смо користили за приказивање амплитудске и фазне спектралне карактеристике коефицијената a_k , стим што позива измењен функцијски потпрограм.

```
close all;
clear all;

N=10;
C=Cnn(N);
k=-N:N;

figure(1);
stem(k,abs(C));
title('amplitudska karakteristika koeficienata ck za k [-N,N]')
xlabel('k');
ylabel('|ck|');

figure(2);
stem(k,angle(C));
title('fazna spektralna karakteristika koeficienata ck')
xlabel('k');
ylabel('angle(ck)');
```

(Функцијски потпрограм)

```
function x=Cnn(N);
%data funkcija Ann za uneto N, vraca izracunate koeficoente
%Furijevog reda ck od -N do N

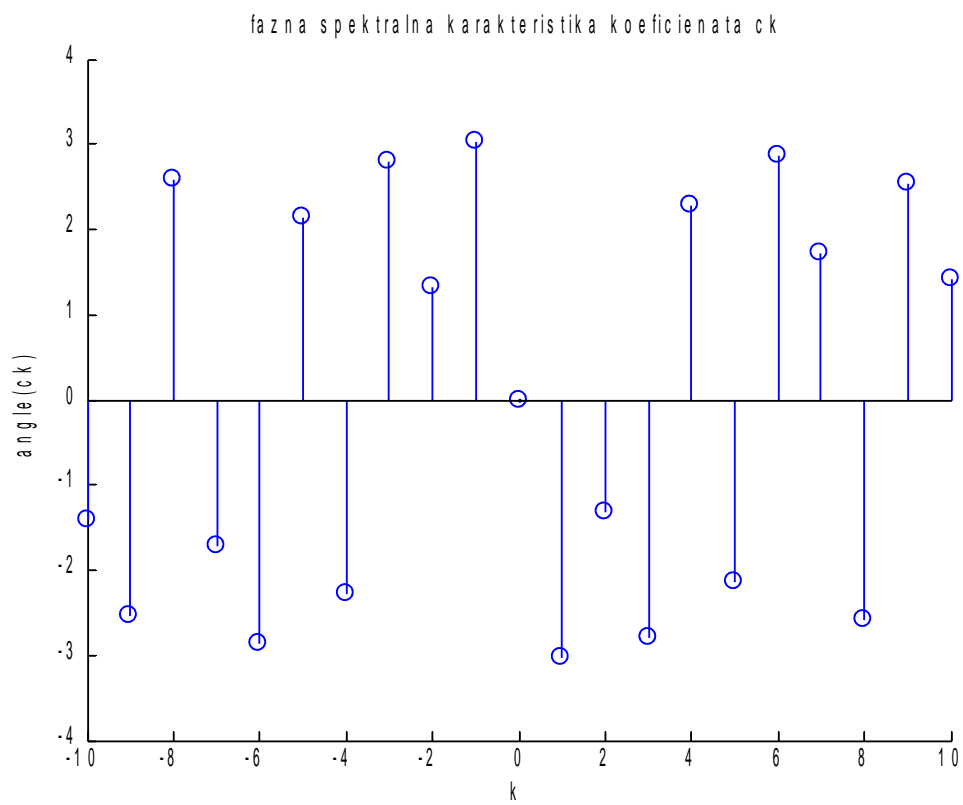
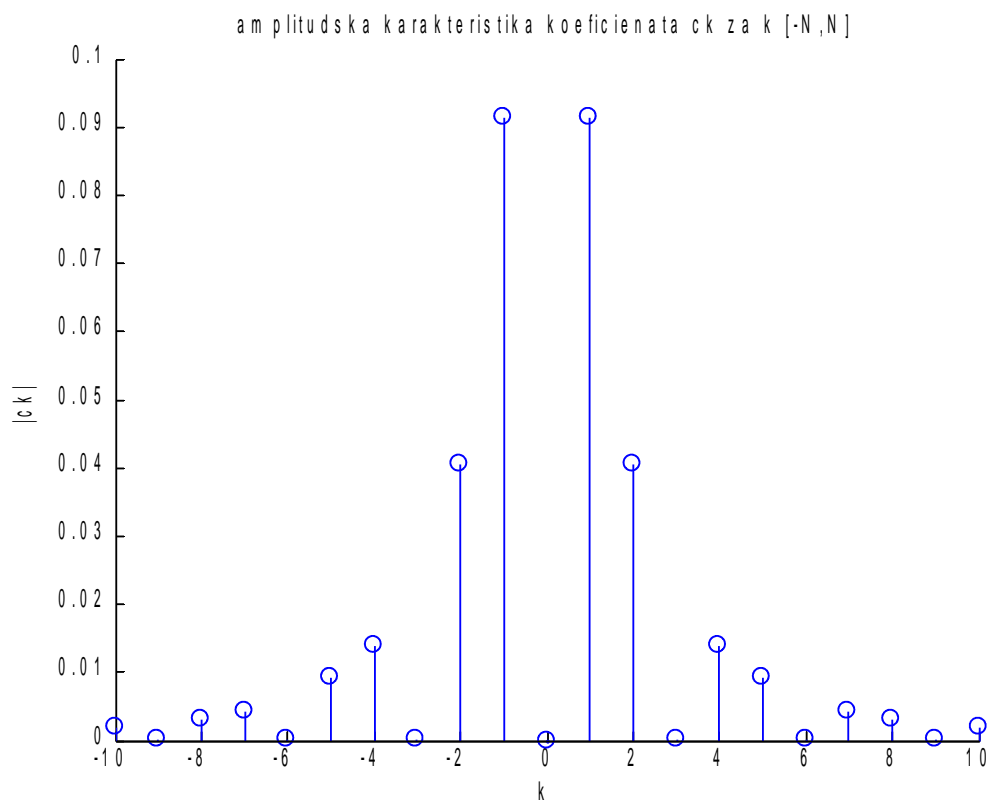
T=3;
w0=2*pi/T;
syms tau n
a0=(1/T)*(int(exp(-i*w0*0*tau),tau,0,1)+int(tau*exp(-i*w0*0*tau),tau,1,2)...
+int((4-tau)*exp(-i*w0*0*tau),tau,2,3));
an=(1/T)*(int(exp(-i*w0*n*tau),tau,0,1)+int(tau*exp(-i*w0*n*tau),tau,1,2)...
+int((4-tau)*exp(-i*w0*n*tau),tau,2,3));
a0=subs(a0);
an=simple(an);

Hjw=(20*j*n*w0)/(10+j*n*w0)^2;
cn=Hjw*an;
cn=simple(cn);

Hjw0=subs(Hjw,n,0)
Hjw0=subs(Hjw0)
c0=Hjw0*a0

k=-N:-1;
x=subs(cn,n,k);
x=[x c0];

k=1:N;
x=[x subs(cn,n,k)];
```



е) Matlab програм за графичко приказивање сигнала $y(t)$ реконструисаног на основу N односно $10N$ коефициената Фуриеовог развоја.

```
% signale cemo iscrtavati za dve periode -T do T
close all;
clear all;

N=10;
T=3;
t=-T:0.001:T;

%signal y(t) rekonstruisan na osnovu N koeficienata
C1=Cnn(N);
k=-N:N;

syms tau
yn=sum(C1.*exp(i*2*pi/T*k*tau));
yn=subs(yn,tau,t);

figure(1);
subplot(2,1,1); plot(t,yn);
title('signal y(t) rekonstruisan na osnovu N koeficienata');
xlabel('vreme t');
axis([-3 3 -0.4 0.4]);

%signal y(t) rekonstruisan na osnovu 10N koeficienata
C2=Cnn(10*N);
k=-10*N:10*N;

syms tau
c10n=sum(C2.*exp(i*2*pi/T*k*tau));
c10n=subs(c10n,tau,t);

subplot(2,1,2); plot(t,c10n);
title('signal y(t) rekonstruisan na osnovu 10N koeficienata');
xlabel('vreme t');
axis([-3 3 -0.4 0.4]);
```

