

Ime i prezime:	Broj indeksa:	Odsek:	Grupa LAB	Zbir:
----------------	---------------	--------	-----------	-------

1. Ponašanje jednog kontinualnog sistema je opisano relacijom: $y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau) d\tau + \frac{dx(t)}{dt}$ gde je sa $x(t)$ označen ulaz a sa $y(t)$ odziv sistema. a) Ispitati da li je ovaj sistem linearan, stacionaran, kauzalan, invertibilan, stabilan i da li sistem ima memoriju.

Linearnost: $x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} (ax_1(\tau) + bx_2(\tau)) d\tau + \frac{d}{dt}(ax_1(t) + bx_2(t)) = a \left(\int_{-\infty}^{t-1} x_1(\tau) d\tau + \frac{dx_1(t)}{dt} \right) + b \left(\int_{-\infty}^{t-1} x_2(\tau) d\tau + \frac{dx_2(t)}{dt} \right) \\ = ay_1(t) + by_2(t) \Rightarrow \text{Sistem je linearan.}$$

Stacionarnost: $y_1(t) = \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau - t_0) d\tau + \frac{dx(t - t_0)}{dt} \stackrel{q=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{t-t_0-1} x(q) dq + \frac{dx(t - t_0)}{dt} = y(t - t_0)$

Sistem je stacionaran.

Kauzalnost: Sistem nije kauzalan, zbog prisustva idealnog diferencijatora.

Invertibilnost: $x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau-1} x(\mu) d\mu \right) d\tau \Rightarrow x(t)$ zavisi samo od vrednosti ulaza koje prethode trenutku $t \Rightarrow$ sistem je invertibilan.

Stabilnost: Sistem nije stabilan, pošto za konstantan ulaz izlaz neograničeno raste, usled prisustva integratora.

Memorija: Sistem ima memoriju.

12

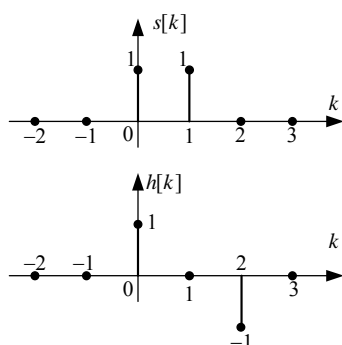
b) Odrediti funkciju prenosa ovog sistema.

$$Y(s) = \frac{X(s)e^{-s}}{s} + sX(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{e^{-s}}{s} + s = \frac{s^2 + e^{-s}}{s}$$

6

2. Odskočni odziv diskretnog LTI sistema glasi: $s[k] = u[k] - u[k-2]$ gde je sa $u[k]$ označen jedinični odskočni signal.

a) Odrediti i skicirati impulsni odziv ovog sistema.



$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^k h[i] \Rightarrow h[k] = s[k] - s[k-1]$$

⋮

$$h[-1] = s[-1] - s[-2] = 0 - 0 = 0$$

$$h[0] = s[0] - s[-1] = 1 - 0 = 1$$

$$h[1] = s[1] - s[0] = 1 - 1 = 0$$

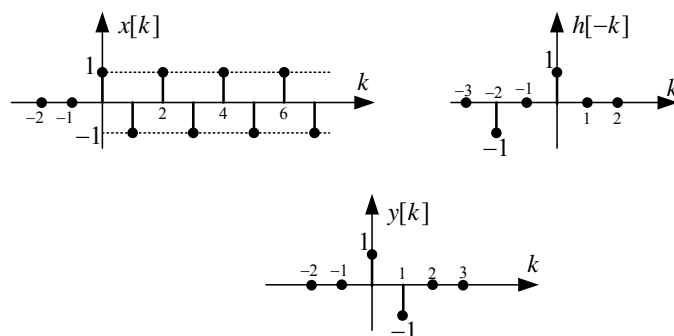
$$h[2] = s[2] - s[1] = 0 - 1 = -1$$

$$h[3] = s[3] - s[2] = 0$$

⋮

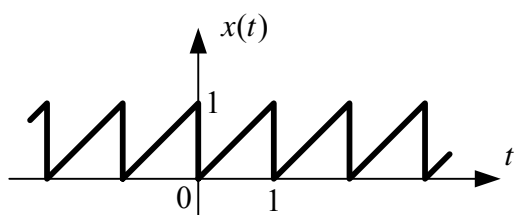
6

b) Primenom konvolucije odrediti i skicirati odziv ovog sistema $y[k]$ na pobudu $x[k] = (-1)^k u[k]$



6

3. Periodični signal $x(t)$ prikazan na slici predstaviti Fourier-ovim redom i odrediti koeficijente tog reda. Ispitati konvergenciju dobijenog reda.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad T = 1; \quad \omega_0 = 2\pi$$

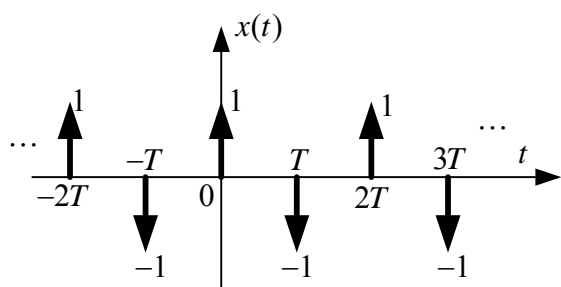
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{poT} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^1 t e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{j}{k\omega_0} = \frac{j}{2k\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{poT} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

Red je konvergentan, pošto je ispunjen uslov: $\int_{poT} |x(t)|^2 dt < \infty$

10

4. Za sledeće periodične signale sračunate odgovarajuće Fourier-ove redove.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad T_X = 2T; \quad \omega_0 = \pi / T$$

$$a_k = \frac{1}{T_X} \int_{poT_X} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_X} \int_0^{2T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{2T} (e^0 - e^{-jk\omega_0 T}) = \frac{1 - (-1)^k}{2T}$$

5

$$x(t) = \sin(2t) + \cos(t).$$

$$x(t) = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \frac{j}{2} e^{-j2t} + \frac{1}{2} e^{-jt} + 0 + \frac{1}{2} e^{jt} + \left(\frac{-j}{2}\right) e^{j2t}$$

$$a_{-2} = \frac{j}{2}; \quad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = -\frac{j}{2}; \quad a_k = 0, k \notin \{-2, -1, +1, +2\}$$

5

5. Impulsni odziv jednog kontinualnog LTI sistema glasi: $h(t) = e^{-t} \cos(t) u(t)$.

a) Odrediti frekvencijski odziv $H(j\omega)$ ovog sistema.

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{2 - \omega^2 + 2j\omega}$$

5

b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal $x(t) = \cos(2t)$. Odrediti Fourier-ov transformacioni par signala $x(t)$ a zatim, na osnovu njega odrediti odziv sistema $y(t)$.

$$X(j\omega) = \pi [\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]$$

$$Y(j\omega) = \pi \frac{3 - j4}{10} \delta(\omega - 2) + \pi \frac{3 + j4}{10} \delta(\omega + 2)$$

$$y(t) = \frac{1}{10} [3 \cos(2t) - 4 \sin(2t)] u(t)$$

6

6. Odrediti Laplace-ove transformacije sledećih kauzalnih signala

$$x(t) = [e^{-at} + e^{bt}] u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-b}$$

5

$$x(t) = \delta(t-2) + u(t-1) - u(t-3)$$

$$X(s) = e^{-2s} + \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-3s})$$

5

$$x(t) = e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

5

7. Odrediti zed transformacione parove sledećih signala

$$x[k] = 0.5^k u[k-2]$$

$$X(z) = \frac{0.25}{z(z-0.5)}$$

5

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2-z+1}$$

$$x[k] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left[\frac{\pi}{3}n\right] u[n] + \sin\left[\frac{\pi}{3}(n-1)\right] u[n-1] \right)$$

5

8. Impulsni odziv jednog kauzalnog diskretnog sistema glasi $h[k] = (0.2^k + 0.2^{-k})u[k]$. a) Odrediti funkciju diskretnog prenosa $H(z)$, njegovu oblast konvergencije i ispitati njegovu stabilnost.

$$H(z) = \frac{z}{z-0.2} + \frac{z}{z-5} = \frac{2z^2-5.2z}{(z-0.2)(z-5)}$$

Oblast konvergencije je $|z| > 5$.

Sistem nije BIBO stabilan.

7

b) Na ulaz ovog sistema se dovodi signal $x[k] = [1 - (-1)^k]u[k]$. Odrediti odziv sistema na ovakvu pobudu.

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1} = \frac{2z}{(z-1)(z+1)}$$

$$Y(z) = -0.42 \frac{z}{z-0.2} + 0.42 \frac{z}{z-5} + \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1}$$

$$y[k] = (-0.42 \cdot 0.2^k + 0.42 \cdot 5^k + 1 - (-1)^k)u[k]$$

7