

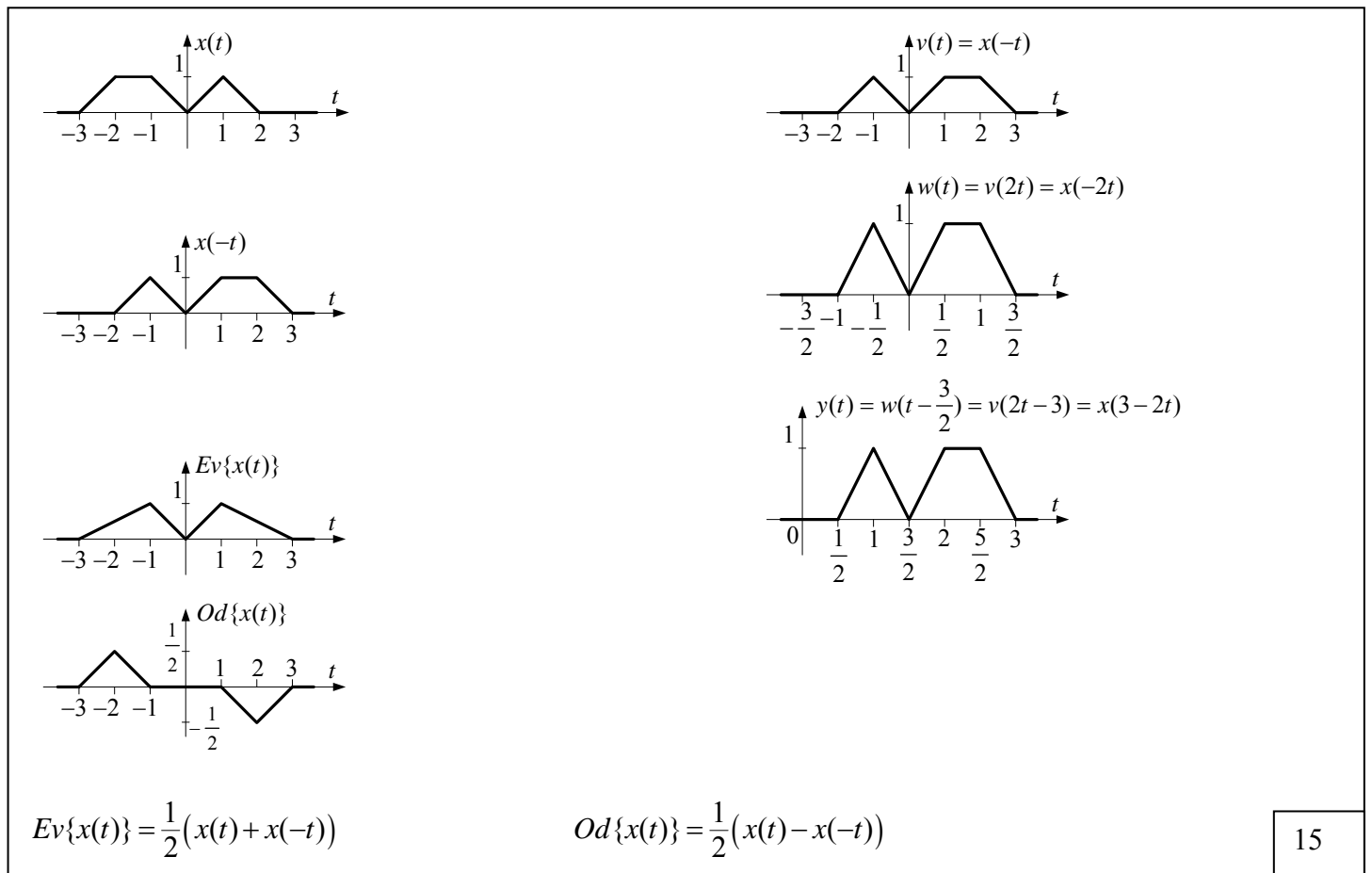
# REŠENJE PRVOG KOLOKVIJUMA IZ PREDMETA SIGNALI I SISTEMI

odseci TE, RI, SS, FE

05.05.2005.

Ime i prezime:	Broj indeksa:	Odsek:	Zbir:
----------------	---------------	--------	-------

1. Signal  $x(t)$  je prikazan na slici 1. Odrediti i nacrtati njegov parni i neparni deo i formirati signal  $y(t) = x(3-2t)$ , pa i njega skicirati.



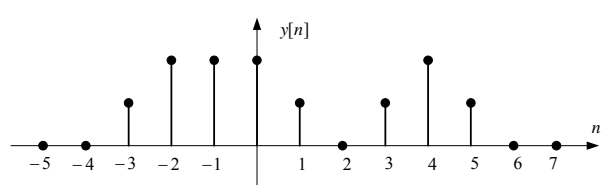
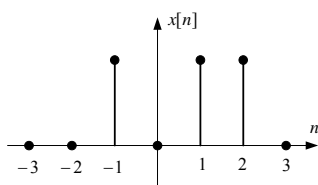
15

2. Dat je diskretni signal  $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$ .

a) Napisati šta znači postupak interpolacije pa ga primeniti i skicirati signal  $y[n] = x[1 - n/2]$ .

Postupak interpolacije se primenjuje u slučaju usporavanja diskretnih signala kada nezavisna promenljiva ne pripada skupu celih brojeva:

$$y[n] = \begin{cases} x[1 - n/2], & n - \text{parno} \\ \frac{x[1 - (n+1)/2] + x[1 - (n-1)/2]}{2}, & n - \text{neparno} \end{cases}$$



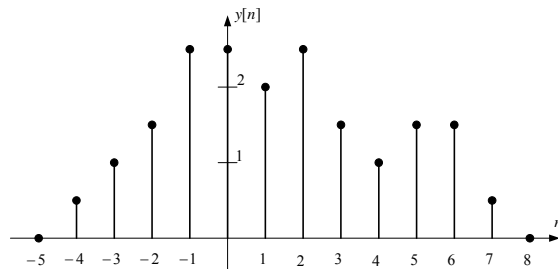
$$\begin{aligned} y[-4] &= x[1+2] = x[3] = 0 \\ y[-2] &= x[1+1] = x[2] = 1 \\ y[0] &= x[1] = 1 \\ y[2] &= x[0] = 0 \\ y[4] &= x[-1] = 1 \\ y[6] &= x[-2] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[-3] &= 1/2 \\ y[-1] &= 1 \\ y[1] &= 1/2 \\ y[3] &= 1/2 \\ y[5] &= 1/2 \end{aligned}$$

8

b) Skicirati signal  $z[n]$  koji se dobija kao konvolucija signala  $x[n]$  i  $y[n]$ .

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-1}^2 x[k]y[n-k]. \text{ Signal } z[n] \text{ će imati nenulte odbirke za } n \text{ od } -4 \text{ do } 7.$$



7

3. Diskretni sistem je opisan sledećom relacijom koja definiše vezu između ulaznog signala  $x[n]$  i izlaznog signala  $y[n]$ :  $y[n] = x[n] - 0.5x[n-1]$

a) Da li ovaj sistem ima memoriju i da li je kauzalan?

Sistem ima memoriju i kauzalan je.

5

b) Ispitati linearnost i stacionarnost ovog sistema.

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] \quad x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

$$y[n] = (ax_1[n] + bx_2[n]) - 0.5(ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) =$$

Dakle, sistem je linearan.

$$= a(x_1[n] - 0.5x_1[n-1]) + b(x_2[n] - 0.5x_2[n-1]) = ay_1[n] + by_2[n]$$

$$x[n] \rightarrow y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$$

Dakle, sistem je stacionaran.

$$y_1[n] = x[n-n_0] - 0.5x[n-n_0-1] = x[\alpha] - 0.5x[\alpha-1] = y[\alpha] = y[n-n_0]$$

5

c) Da li je ovaj sistem invertibilan i ako jeste odrediti relaciju koja definiše njegov inverzni sistem.

$$x[n] = y[n] + 0.5x[n-1] = y[n] + 0.5(y[n-1] + 0.5x[n-2]) =$$

$$= y[n] + 0.5y[n-1] + 0.5^2(y[n-2] + 0.5x[n-3]) =$$

$$= y[n] + 0.5y[n-1] + 0.5^2y[n-2] + 0.5^3y[n-3] + \dots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^n 0.5^{n-k} y[k]$$

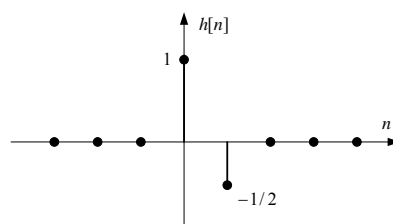
Sistem je invertibilan.

5

d) Odrediti impulsni odziv ovog sistema i na osnovu njega ispitati da li je BIBO stabilan.

$$y[n] = x[n] - 0.5x[n-1] \Rightarrow h[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-1]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < G$$



Dakle, sistem je BIBO stabilan.

5

4. Na ulaz sistema čiji je impulsni odziv  $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$  gde je  $u(t)$  jedinična odskočna funkcija, je doveden signal  $x(t) = (\sin(t))^3$ .

a) Predstaviti signal  $x(t)$  Fourier-ovim redom.

$$\sin^3(t) = \left( \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^3 = \frac{e^{3jt} - 3e^{jt} + 3e^{-jt} - e^{-3jt}}{-8j} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkt}$$

$$a_{-4} = 0; \quad a_{-3} = \frac{1}{8j}; \quad a_{-2} = 0; \quad a_{-1} = -\frac{3}{8j}; \quad a_0 = 0;$$

$$a_1 = \frac{3}{8j}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{8j}; \quad a_4 = 0; \quad \dots$$

10

b) Na osnovu rezultata iz prethodne tačke predstaviti odziv sistema  $y(t)$  Fourier-ovim redom

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k e^{jkt}; \quad b_k = H(j\omega_0 k) = H(jk); \quad \omega_0 = 1$$

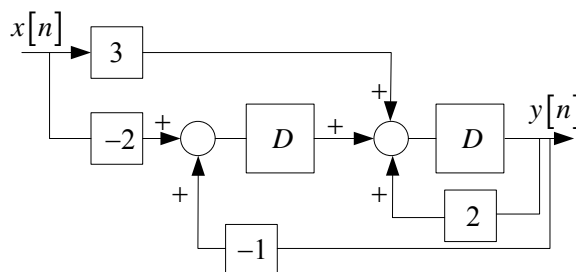
$$H(jk) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jkt} dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-2t} e^{-jkt} dt = 2 \frac{e^{-t(2+jk)}}{-2-jk} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{2+jk}$$

$$b_{-3} = \frac{2}{2-3j}; \quad b_{-1} = \frac{2}{2-j}; \quad b_1 = \frac{2}{2+j}; \quad b_3 = \frac{2}{2+3j}$$

$$y(t) = a_{-3} b_{-3} e^{-3jt} + a_{-1} b_{-1} e^{-jt} + a_1 b_1 e^{jt} + a_3 b_3 e^{j3t}$$

10

5. Diskretni sistem je opisan blok dijagramom na slici 3.



Slika 3.

gde je sa  $D$  označen blok za jedinično kašnjenje.

a) Odrediti diferencnu jednačinu koja opisuje rad ovog sistema.

$$y[n+1] = 2y[n] + 3x[n] + v[n]$$

$$v[n+1] = -y[n] - 2x[n]$$

$$y[n+1] = 2y[n] + 3x[n] - y[n-1] - 2x[n-1]$$

$$y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 3x[n-1] - 2x[n-1]$$

5

b) Odrediti prvih pet odbiraka impulsnog odziva ovog sistema.

$$h[n] = 2h[n-1] - h[n-2] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$h[0] = 2h[-1] - h[-2] + 3\delta[-1] - 2\delta[-2] = 0$$

$$h[1] = 2h[0] - h[-1] + 3\delta[0] - 2\delta[-1] = 3$$

$$h[2] = 2h[1] - h[0] + 3\delta[1] - 2\delta[0] = 6 - 0 + 0 - 2 = 4$$

$$h[3] = 2h[2] - h[1] + 3\delta[2] - 2\delta[1] = 5$$

$$h[4] = 2h[3] - h[2] + 3\delta[3] - 2\delta[2] = 6$$

$$h[5] = 7, \quad h[6] = 8, \dots \quad h[n] = n + 2$$

10

c) Na osnovu prethodne tačke odrediti prvih pet odbiraka odskočnog odziv sistema.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \Rightarrow s[0] = h[0]$$

$$s[1] = h[0] + h[1] = 3, \quad s[2] = 7, \quad s[3] = 12, \quad s[4] = 18, \quad s[5] = 25, \dots$$

10

6. Za koje od navedenih periodičnih signala Fourier-ov red konvergira. Obrazložite odgovor. Zatim izaberite jedan (po izboru) od signala čiji red konvergira i predstavite ga Fourier-ovim redom.

a)  $t \in [0, T), x(t) = t$ ,    b)  $t \in [0, T), x(t) = 2\delta(t) + \delta(t - T/2)$

c)  $t \in [0, T), x(t) = \sin(1/t)$ ,    d)  $t \in [0, T), x(t) = u(t) - u(t - T/2)$

Signal pod a) konvergentan  $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$

b) konvergentan  $\int_T |x(t)| dt < \infty$  i konačan broj min, max i prekida

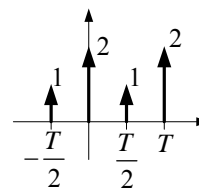
c) divergentan – beskonačan broj minimuma i maksimuma

d) konvergentan -  $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$

Recimo pod b)  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ ,  $a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

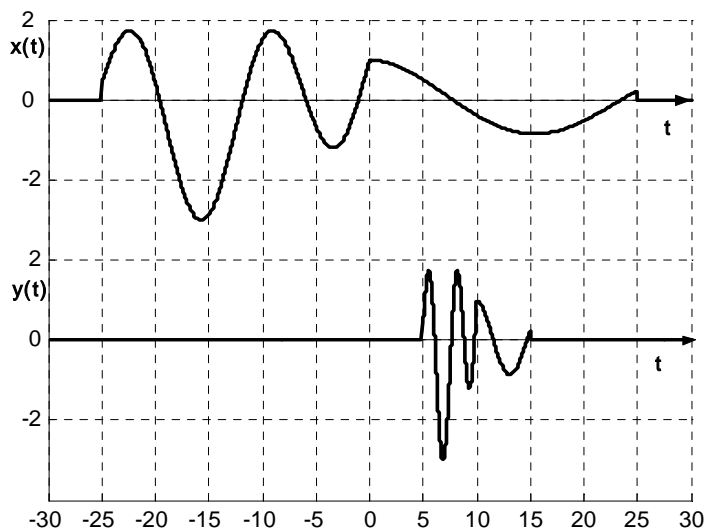
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{T-\varepsilon} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left( 2e^{-jk\omega_0 0} + e^{-jk\omega_0 T/2} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \left( 2 + e^{-jk\pi} \right) = \frac{1}{T} \left( 2 + (-1)^k \right) = \begin{cases} \frac{3}{T}, & k \text{ parno} \\ \frac{1}{T}, & k \text{ neparno} \end{cases}$$



15

7. Na slici su prikazana dva signala. Signal  $y(t)$  nastao je transformacijom nezavisne promenljive signala  $x(t)$ . Odredite transformaciju, odnosno parametre  $a$  i  $b$  ako se zna da je  $y(t) = x(a + bt)$ .



Izaberu se karakteristične tačke:

$$\begin{cases} y(5) = x(-25) \Rightarrow a + 5b = -25 \\ y(15) = x(25) \Rightarrow a + 15b = 25 \end{cases} \Rightarrow a = -50, b = 5$$

10