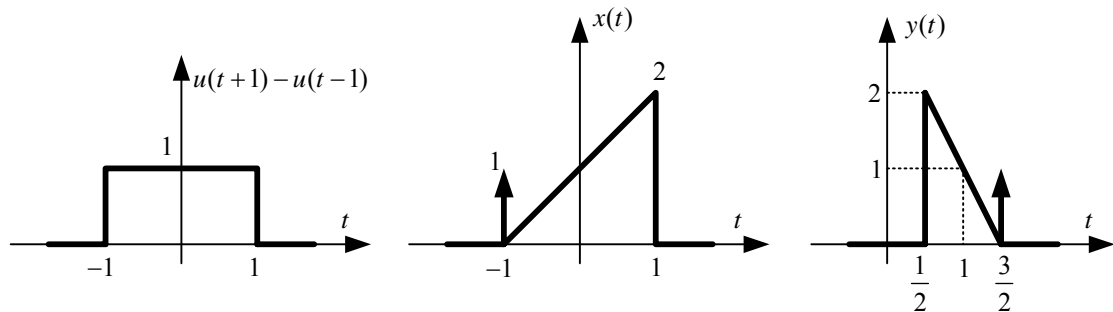


Ime i prezime studenta: _____ Odsek _____ Broj indeksa: _____

1. (a) Skicirati kontinualni signal $x(t) = [u(t+1) - u(t-1)](1+t) + \delta(t+1)$, gde je sa $u(t)$ označena jedinična odskočna funkcija a sa $\delta(t)$ jedinični Dirakov impuls, i na osnovu njega formirati i skicirati signal $y(t) = x(2-2t)$.

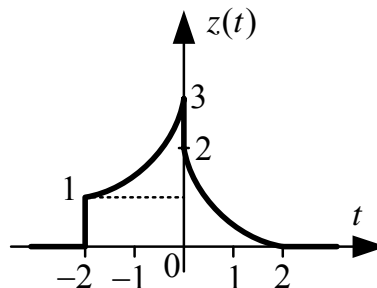


$$y(t) = x(2-2t) = \left[u\left(t - \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{3}{2}\right) \right] (3-2t) + \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

6

b) Sračunati i skicirati signal $z(t)$ koji se dobija kao konvolucija signala $x(t)$ i signala $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \frac{t^2}{2} + 2t + 3, & -2 \leq t < 0 \\ 2 - \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

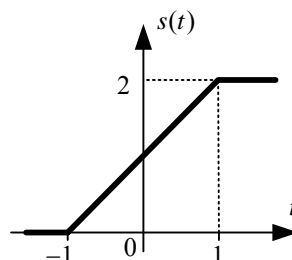


8

c) Šta možete reći o stabilnosti i kauzalnosti sistema čiji je impulsni odziv $h(t)$ iz prethodne tačke. Odrediti jedinični odskočni odziv $s(t)$ tog sistema.

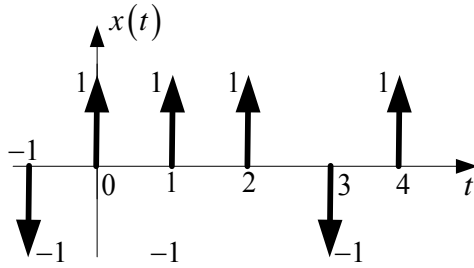
Sistem je stabilan i nije kauzalan.

$$s(t) = \int_{\tau=-\infty}^t h(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases}$$



6

2. a) Signal $x(t)$, periodičan sa periodom $T = 4s$, prikazan na slici 2.1. Predstaviti ga Fourier-ovim redom i odrediti koeficijente ovog reda.



Slika 2.1

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{pOT} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_{t=0_-}^{4_-} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= 0.25 \left(e^{-jk\omega_0 0} + e^{-jk\omega_0 1} + e^{-jk\omega_0 2} - e^{-jk\omega_0 3} \right) \\ &= 0.25 \left(1 + e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\pi} - e^{-jk\frac{3\pi}{2}} \right) \\ &= 0.25 \left(1 + (-j)^k + (-1)^k - j^k \right) \end{aligned}$$

10

b) Da li je dobijeni red konvergentan i zašto?

Red je konvergentan, jer je ispunjen uslov $\int_{pOT} |x(t)| dt < +\infty$

i ima konačan broj minimuma, maksimuma i prekida na jednoj periodi.

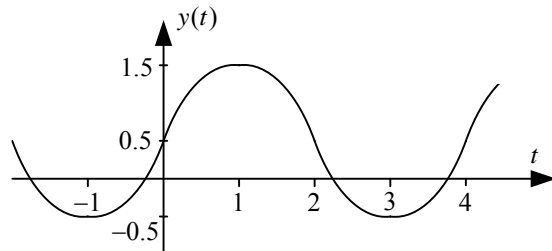
4

c) Ako se signal $x(t)$ dovede na ulaz idealnog niskopropusnog filtra čiji je frekvencijski spektar

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1; & |\omega| < 3\pi/4 \\ 0; & |\omega| \geq 3\pi/4 \end{cases} \quad \text{odrediti odziv ovog filtra } y(t) \text{ i skicirati ga.}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}; \quad c_k = H(jk\omega_0) a_k; \quad H(jk\omega_0) = \begin{cases} 1, & k = -1, 0, +1 \\ 0, & |k| > 1 \end{cases}; \quad c_k = \begin{cases} a_{-1}, & k = -1 \\ a_0, & k = 0 \\ a_1, & k = +1 \\ 0, & k \neq -1, 0, +1 \end{cases}$$

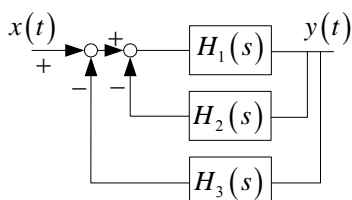
$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t} - \frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{aligned}$$



6

3. Strukturni blok dijagram kontinualnog sistema prikazan je na slici 3.1.

a) Odrediti ekvivalentnu funkciju prenosa celog sistema.



Slika 3.1.

$$\text{Funkcija prenosa celog sistema je } G(s) = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2 + H_1 H_3}.$$

7

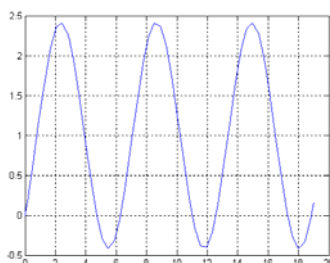
b) Ukoliko su navedeni blokovi kauzalni sa funkcijama prenosa $H_1(s) = 1/(s-1)$, $H_2(s) = 1/(s+1)$ i $H_3(s) = 1/(s+1)$, ispitati stabilnost celog sistema.

Za navedene pojedinačne funkcije prenosa dobija se funkcija prenosa $G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$. Polovi sistema su koreni polinoma $f(s) = s^2 + 1$. Kako su polovi $p_{1,2} = \pm j$ na imaginarnoj osi s ravni, sistem nije BIBO stabilan.

5

c) Za vrednosti pojedinih blokova iz prethodne tačke sračunati Laplace-ovu transformaciju odskočnog odziva celog sistema, odrediti njen vremenski oblik i skicirati je.

Laplaceova transformacije odskočnog odziva je $S(s) = \frac{s+1}{s(s^2+1)}$. Odskočni odziv se dobija inverznom Laplaceovom transformacijom $S(s)$, $s(t) = [1 - \cos t + \sin t]u(t)$. Odskočni odziv je skiciran na sledećoj slici.



8

4. Za kontinualni signal $x(t) = [u(t + \pi/2) - u(t - \pi/2)]\cos(t)$ gde je $u(t)$ jedinična odskočna funkcija

a) Odrediti Fourier-ovu transformaciju.

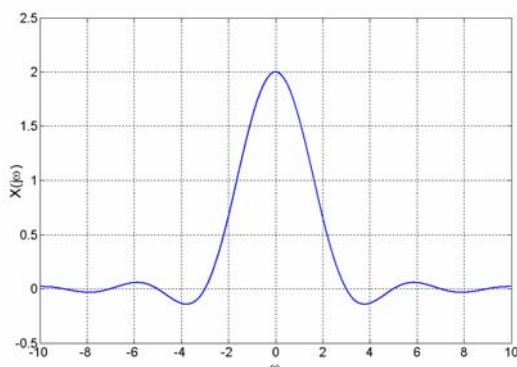
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{j(1-\omega)t} dt + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-j(1+\omega)t} dt \right) = \frac{\sin \frac{(1-\omega)\pi}{2}}{1-\omega} + \frac{\sin \frac{(1+\omega)\pi}{2}}{1+\omega}$$

$$X(j\omega) = 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm 1} \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{1-\omega^2} = \frac{\pi}{2} \lim_{\omega \rightarrow \pm 1} \frac{-2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)}{-2\omega} = \frac{\pi}{2}; \quad \omega = \pm 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \pm 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \pm 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \dots \Rightarrow X(j\omega) = 0$$

8

b) Skicirati spektar ovog signala i na osnovu njega predložiti periodu odabiranja T kojom bi se ovaj signal mogao odabirati.



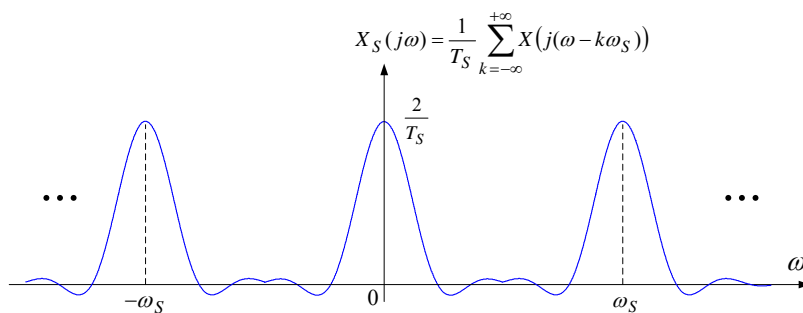
Jedan izbor periode odabiranja :

$$\omega_S = 2 \cdot 7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = 14 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{\pi}{7} [\text{s}]$$

6

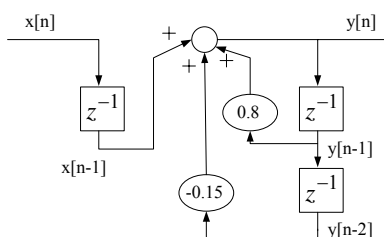
c) Napisati izraz za spektar signala koji se dobija nakon odabiranja sa periodom odabiranja predloženom u prethodnoj tački pa skicirati njegov spektar.



6

5. Kauzalni sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n] - 0.8y[n-1] + 0.15y[n-2] = x[n-1]$.

a) Koristeći elemente za kašnjenje skicirati simulacioni blok dijagram ovog sistema.



4

b) Odrediti funkciju diskretnog prenosa sistema $H(z)$.

$$\text{Funkcija diskretnog prenosa sistema glasi } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - 0.8z + 0.15}.$$

4

c) Ispitati stabilnost navedenog diskretnog sistema.

Polovi sistema su koreni polinoma $f(z) = z^2 - 0.8z + 0.15$. Kako su polovi, $p_1 = 0.5$ i $p_2 = 0.3$ u unutrašnjosti jedinične kružnice z ravni, sistem je stabilan.

4

d) Sračunati impulsni odziv sistema $h[n]$.

Impulsni odziv sistema se dobija inverznom Z transformacijom $H(z)$, $h[n] = 5(0.5^n - 0.3^n)u[n]$.

4

e) Odrediti odziv ovog sistema $y[n]$ ako se na njegov ulaz dovede signal $x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$.

Odziv ovog sistema je $y[n] = 5(0.5^n - 0.3^n)u[n] + 5(0.5^{n-2} - 0.3^{n-2})u[n-2]$.

4