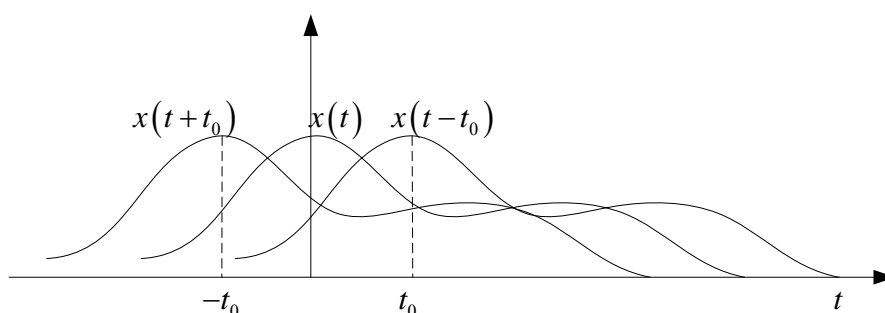


### Pitanje 3: Modifikacija nezavisne vremenske promenljive $t$ u kontinualnim signalima

#### *Pomeranje signala u vremenu*

Mnoge jednostavne ali važne operacija nad signalima se mogu predstaviti jednostavnom modifikacijom vremenske promenljive  $t$  u analitičkim izrazima za signale. Već smo videli da signal  $x(t - t_0)$  nije ništa drugo nego pomeranje signala  $x(t)$  za vremenski interval  $t_0$ . Ukoliko je  $t_0 > 0$  to je zapravo kašnjenje signala (pomeranje u desno), ukoliko je  $t_0 < 0$  to je takozvano prednjačenje signala (pomeranje u levo). Na slici 2.1. ilustrovano je prednjačenje i kašnjenje signala.



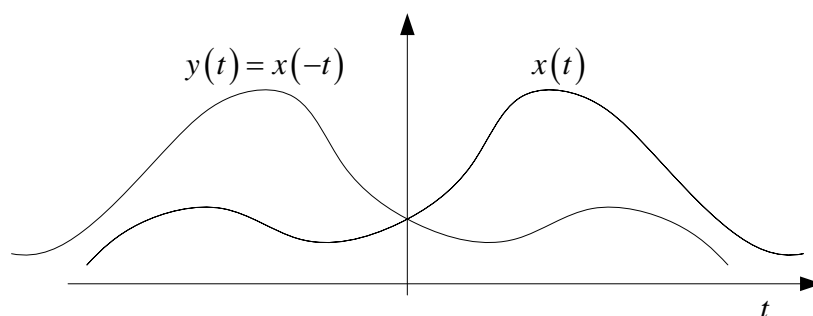
Slika 2.1: Ilustracija vremenskog pomeranja signala

#### *Inverzija vremena*

Posmatrajmo modifikovani signal

$$y(t) = x(-t) \quad (2.1)$$

Poslednja relacija govori da je, na primer,  $y(1) = x(-1)$ ,  $y(\pi) = x(-\pi)$ , i tako dalje za sve vrednosti nezavisne promenljive  $t$ . Primer ovakvih signala je prikazan na slici 2.2. Efekat inverzije vremena je najuočljiviji ukoliko se video traka premotava unazad.



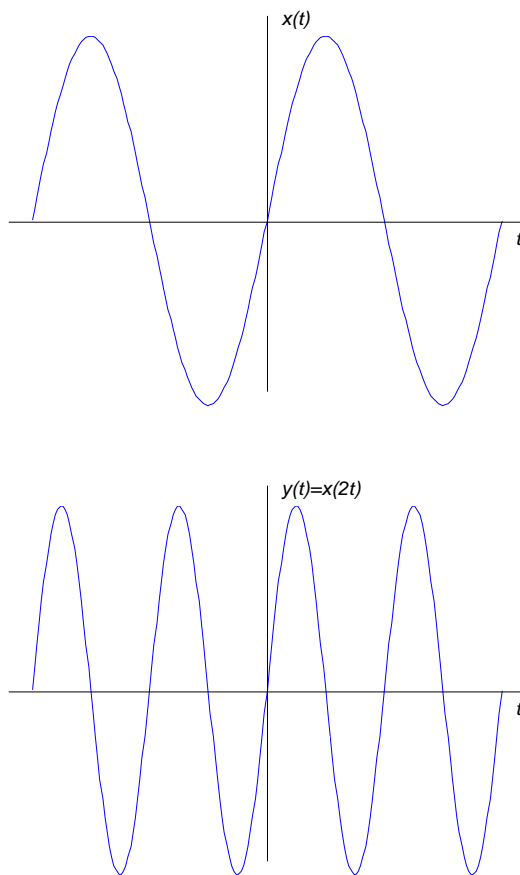
Slika 2.2: Ilustracija signala sa inverzijom vremena

#### *Skaliranje vremena*

Dalje, posmatrajmo modifikaciju signala na sledeći način:

$$y(t) = x(2t) \quad (2.2)$$

Tada je  $y(1) = x(2)$ ,  $y(1/2) = x(1)$  i tako dalje, što znači da je u signalu  $y(t)$  vreme kompresovano i da je signal  $y$  zapravo dva puta ubrzani signal  $x$  (u engleskoj literaturi se za ovakve sisteme kaže *compressed-time signals*). Primer ovih signala je prikazan na slici 2.3.

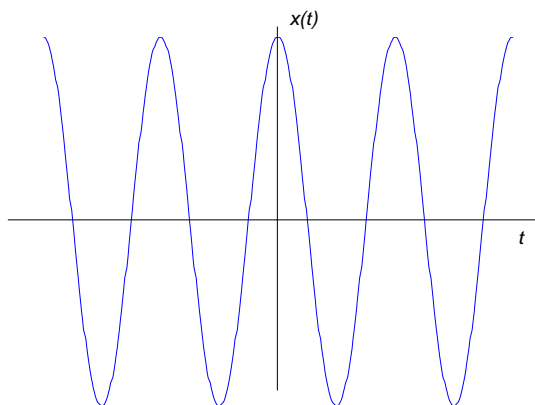


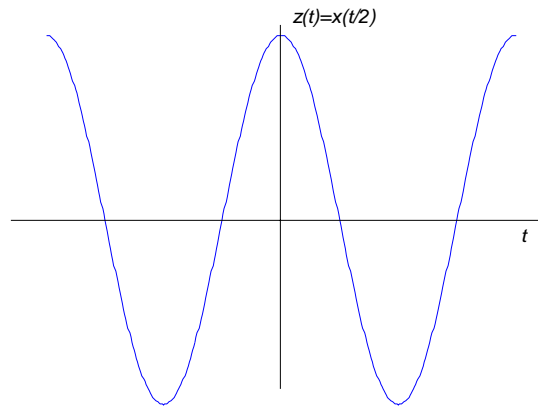
Slika 2.3: Ilustracija skaliranja (kompresije) vremena

Ukoliko definišemo novi signal  $z(t)$  na sledeći način:

$$z(t) = x(t/2) \quad (2.3)$$

Sada će vrednost signala  $z(1)$  biti jednaka  $x(0.5)$ ,  $z(2)$  biti jednaka  $x(1)$  i tako dalje. Drugim rečima, posmatrani signal  $z$  biti 'razvučena' ili usporena verzija signala  $x$ . U engleskoj literaturi se za ovakve signale koristi termin *stretched-time signals*. Primer ovakvih signala dat je na slici 2.4.

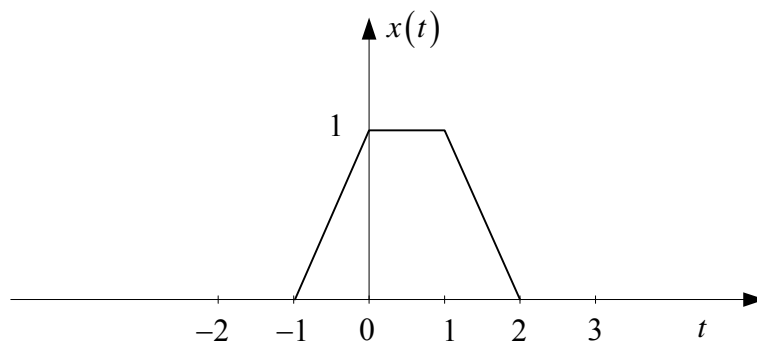




Slika 2.4: Primer skaliranja signala (*stretched-time signal*)

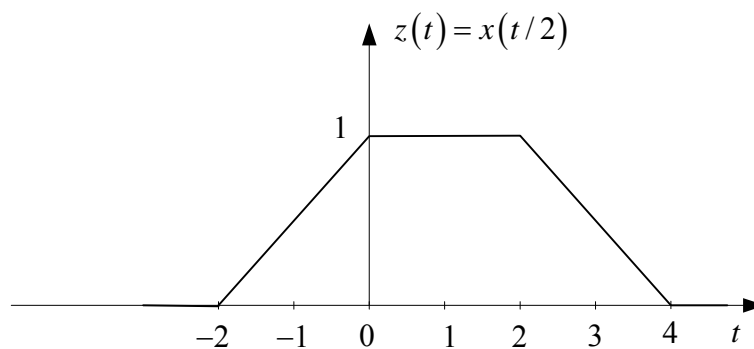
Vrlo često se u obradi signala istovremeno srećemo sa više modifikacija nezavisne vremenske promenljive  $t$  u istom signalu. Recimo, ukoliko je potrebno da na osnovu zadatog signala  $x(t)$  generišemo signal  $y(t) = x(2 - 3t)$ , jasno je da su tri modifikacije vremenske ose izvršene uzastopno. Prvo je od na signalu  $x(t)$  izvršeno skaliranje vremenske ose i dobijen je signal  $x(3t)$ , zatim je izvršena inverzija vremena koja rezultuje signalom  $x(-3t)$  da bi konačno bilo izvršeno pomeranje u vremenskom domenu što nas dovodi do konačnog rezultata  $x(2 - 3t)$ . Naravno, redosled ovih transformacija nije jednoznačan, međutim, kada god imamo ovakav problem dobro je da se vežemo za neko konkretno  $t = t_0$  i da pomoću njega pratimo regularnost sekvence transformacija. Ovaj problem je ilustrovan na sledećem primeru.

**Primer 1:** Na slici 2.5 je prikazan trapezoidni signal  $x(t)$ . Na osnovu njega skicirati signal  $y(t) = x(1 - t/2)$ .



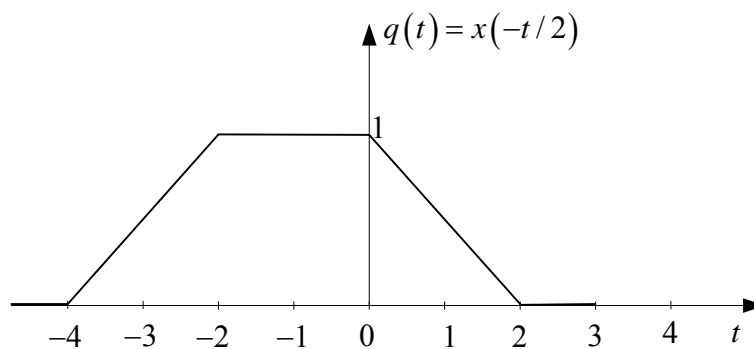
Slika: 2.5: Primer trapezoidnog signala

Kao prvi korak ćemo od signala  $x(t)$  formirati pomoćni signal  $z(t) = x(t/2)$ . U pitanju je vremensko skaliranje (usporavanje ili razvlačenje signala) sa faktorom 2. Neka nam kontrolna tačka bude  $t = 0$ , i kao uslov ispravnosti rada treba da vodimo računa da je  $z(0) = x(0) = 1$ . Na slici 2.6. prikazan je signal  $z(t) = x(t/2)$ .



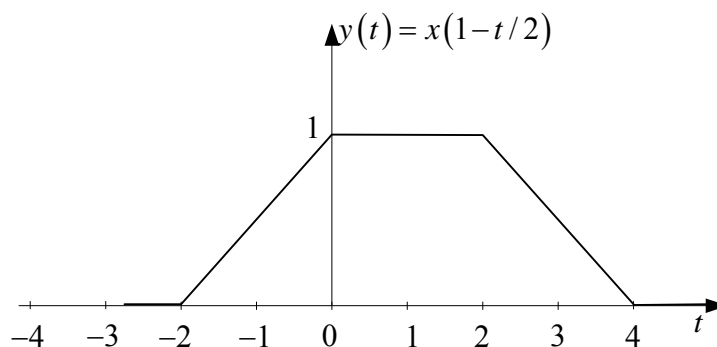
Slika 2.6: Signal  $z(t) = x(t/2)$

Sada formirajmo novi, pomoćni signal  $q(t) = z(-t) = x(-t/2)$  koji će uključiti inverziju vremena. On se jednostavno dobija od signala  $z(t)$  tako što se izvrši prosta refleksija u odnosu na oordinatu (zbog toga se ponekada ova modifikacija inverzija vremena naziva refleksijom). Ovaj signal je prikazan na slici 2.7. Opet nam je kontrolna tačka  $q(0) = x(0) = 1$ .



Slika 2.7: Pomoćni signal  $q(t) = x(-t/2)$

Konačno, treba izvršiti skaliranje u vremenu da bi dobili željeni signal  $y(t) = x(1-t/2)$ . Ova poslednja transformacija se dobija jednostavnim pomeranjem poslednjeg signala  $q(t)$ , ali da bismo dobili tačnu informaciju o tome za koliko treba izvršiti pomeranje i u kome pravcu, napišimo signal  $y(t)$  na sledeći način:  $y(t) = x(1-t/2) = x(-(t-2)/2) = q(t-2)$ . Dakle, konačni signal  $y(t)$  se dobija iz signala  $q(t)$  tako što se on pomera u desno (dakle signal  $y$  kasni u odnosu na signal  $q$ ) za 2 jedinice vremena. Signal  $y(t)$  je prikazan na slici 2.8.



Slika 2.8: Konačni oblik signala  $y(t) = x(1-t/2)$

I naravno, ponovo možemo proveriti korektnost dobijenog signal vezujući se za neke konkretne vrednosti vremenskih trenutaka:  $y(0) = x(1-0/2) = 1$ ,  $y(1) = x(1-1/2) = 1$  i t.d.

**Primer 2:** Zanimljivo je pogledati Dirakov signal u kome je nezavisna vremenska promenljiva skalirana koeficijentom  $1/a$ . Dakle posmatrajmo signal  $\delta(t/a)$ . Ako se setimo uslova koje treba da zadovolji Dirakov signal  $\delta(t)$  videćemo da ih i signal  $\delta(t/a)$  zadovoljava. Naime:

1. Signal  $\delta(t/a) = 0$  za svako  $t \neq 0$ ,
2. Vrednost  $\delta(t/a)$  nije definisano za  $t = 0$ .
3. Konačno,  $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t/a) dt = a \int_{t_1/a}^{t_2/a} \delta(\tau) d\tau = a$  ako je  $t_1 < 0 < t_2$

Dakle, signal  $\delta(t/a) = a\delta(t)$  pod pretpostavkom da je parametar  $a$  pozitivan.

### Simetričnost signala

Neke važne definicije i osobine signala potiču iz osobina simetričnosti. Iz matematike je poznato da neki signali imaju osobine parnosti ili neparnosti. Za signal koji zadovoljava sledeću jednakost

$$x(t) = x(-t) \quad (2.4)$$

kažemo da je paran. Sa druge strane, za signal sa sledećim svojstvom

$$x(t) = -x(-t) \quad (2.5)$$

kažemo da je neparan. Tipični parni signali su  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  ili  $x(t) = e^{-|t|}$ , dok su predstavnici neparnih signala ili funkcija  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$  ili  $x(t) = u(t) - 0.5$ . Važnost parnih i neparnih signala potiče uglavnom iz činjenice da se realni signal (signal koji za svaki trenutak nezavisne vremenske promenljive uzima vrednost iz skupa realnih brojeva) može napisati kao zbir njegovog parnog i neparnog dela. Parni deo signal se definiše na sledeći način:

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (2.6)$$

dok se neparni deo signala sračunava kao:

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (2.7)$$

Oznake  $Ev$  i  $Od$  potiču od engleskih reči *even* i *odd*, što znači paran, odnosno neparan. Lako se na osnovu relacija (2.6) i (2.7) proverava, da se signal  $x(t)$  zaista može srećunati kao zbir njegovog parnog i neparnog dela:

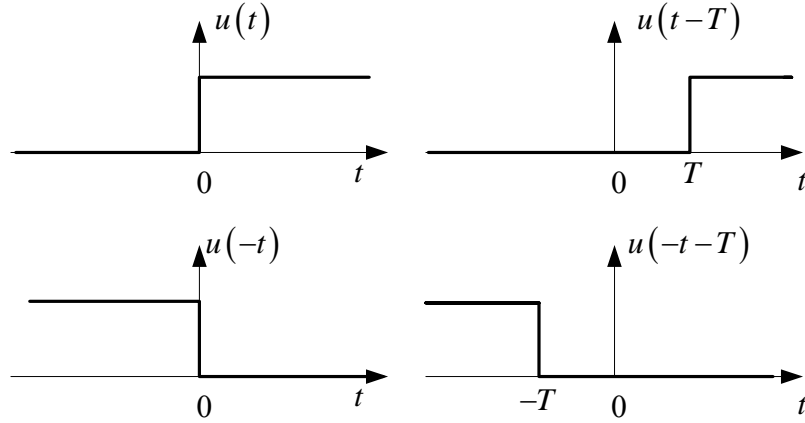
$$x(t) = Ev\{x(t)\} + Od\{x(t)\} \quad (2.8)$$

**Primer 3:** Sračunajmo parni i neparni deo pravougaone četvrtke  $p(t) = u(t) - u(t-T)$ . Po definiciji parnog i neparnog dela signala, možemo pisati:

$$Ev\{p(t)\} = \frac{1}{2}[p(t) + p(-t)] = \frac{1}{2}[u(t) - u(t-T) + u(-t) - u(-t-T)] \quad (2.9)$$

$$Od\{p(t)\} = \frac{1}{2}[p(t) - p(-t)] = \frac{1}{2}[u(t) - u(t-T) - u(-t) + u(-t+T)] \quad (2.10)$$

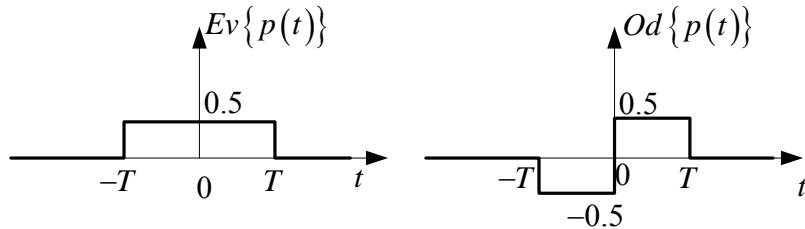
Na slici 2.9 su prikazani signali  $u(t)$ ,  $u(t-T)$ ,  $u(-t)$  i  $u(-t+T)$  na osnovu kojih se lako sračunavaju funkcije  $Ev\{p(t)\}$  i  $Od\{p(t)\}$ .



Slika 2.9.: Oblik signala  $u(t)$ ,  $u(-t)$ ,  $u(t-T)$  i  $u(-t-T)$

Na osnovu ovih signala se vrlo jednostavno sračunavaju signali  $Ev\{p(t)\}$  i  $Od\{p(t)\}$ . Oni su prikazani na slici 2.10. a njihovi analitički oblici glase:

$$\begin{aligned} Ev\{p(t)\} &= \frac{1}{2}[u(t+T) - u(t-T)] \\ Od\{p(t)\} &= \frac{1}{2}[-u(t+T) + 2u(t) - u(t-T)] \end{aligned} \quad (2.11)$$



Slika 2.10: Parni i neparni deo signala  $p(t)$

#### Pitanje 4: Konvolucija kontinualnih vremenskih funkcija

Fundamentalna operacija nad signalima koja se u teoriji obrade signala koristi jeste konvolucija. Ako nad signalim  $x(t)$  i  $h(t)$  primenimo konvoluciju kao rezultat ćemo dobiti treću kontinualnu funkciju  $y(t)$ , pri čemu kao oznaku za konvoluciju koristimo simbol  $*$ :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2.12)$$

a izračunava se shodno sledećoj relaciji

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Ukoliko u poslednjoj relaciji izvršimo smenu promenljivih  $t-\tau = \lambda$  dobija se

$$y(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = h(t)*x(t) \quad (2.14)$$

što je dokaz da je konvolucija komutativna operacija nad signalima, odnosno

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t) \quad (2.15)$$

Lako se dokazuje da je ova operacija ima i osobinu asocijativnosti:

$$\begin{aligned} (x(t)*h(t))*g(t) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\lambda-\tau)d\tau \right] g(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda-\tau)g(t-\lambda)d\lambda \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu)g(t-\tau-\mu)d\mu \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [h(t-\tau)*g(t-\tau)] d\tau = x(t)*(h(t)*g(t)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Takođe, lako se dokazuje da je operacija konvolucija distributivna sa operacijom sabiranja signala:

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t) \quad (2.17)$$

Na osnovu relacije (2.13) se može zaključiti, da ako želimo da sračunamo konvoluciju signala  $x(t)$  i  $h(t)$ , naš algoritam treba da se sastoji u sledeća četiri koraka:

1. **korak:** Signal  $h(\tau)$  se prvo invertuje i pomeri u vremenu kako bi se dobila forma  $h(t-\tau)$ , što postaje funkcija od  $\tau$  gde je  $t$  parametar.
2. **korak:** Signali  $x(\tau)$  i  $h(t-\tau)$  se izmnože za sva moguće vrednosti varijable  $\tau$  a za neko fiksno  $t$ .
3. **korak:** Proizvod  $x(\tau)h(t-\tau)$  se integriše po celom skupu vrednosti  $\tau$  i tako se dobija vrednost  $y(t)$  za neko fiksno  $t$ .
4. **korak:** Ponove se koraci 1,2 i 3 za različite vrednosti parametra  $t$  iz skupa  $(-\infty, \infty)$  kako bi se dobila kompletna funkcija  $y(t)$ .

Dakle, teorijski gledano beskonačno mnogo neodređenih integrala treba odrediti u cilju jedne jedine konvolucije  $y(t)$ . Međutim, na sreću, u najčešćem broju slučajeva, ovaj se problem uglavnom svodi na sračunavanje par određenih integrala.

**Primer 3:** Sračunajmo konvoluciju dve jedinične odskočne funkcije

$$y(t) = u(t)*u(t) \quad (2.18)$$

Po definiciji možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (2.19)$$

Znajući da je  $u(\tau) = 0$  za  $\tau < 0$ , poslednji izraz postaje

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (2.20)$$

Dalje, uzimajući u obzir da je  $u(\tau) = 1$  za  $\tau > 0$ , integral se dalje pojednostavljuje

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau) d\tau \quad (2.21)$$

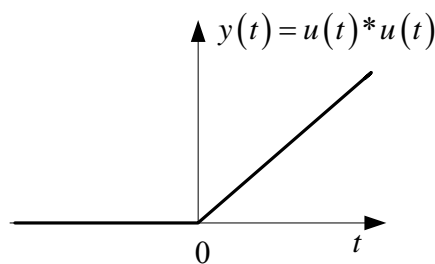
Ukoliko izvršimo smenu promenljivih  $t - \tau = \lambda$ , izraz (2.21) postaje

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda \quad (2.22)$$

Konačno, poslednji integral je jednostavno sračunati ukoliko je poznata vrednost vremenske promenljive  $t$ :

$$\begin{aligned} t < 0 &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t 0 d\lambda = 0 \\ t \geq 0 &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \int_0^t d\lambda = t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Oblik signala  $y(t)$  je prikazan na slici 2.11.



Slika 2.11: Oblik signala  $y(t) = u(t) * u(t)$

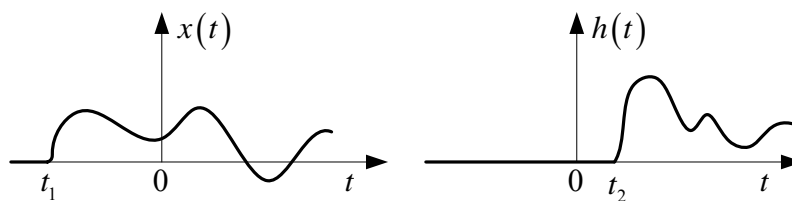
S obzirom na prirodu jediničnog odskočnog signala dobijeni rezultat možemo napisati u pojednostavljenoj formi:

$$y(t) = tu(t) \quad (2.24)$$

**Primer 4:** Jedna od važnih osobina konvolucije  $y(t) = x(t) * h(t)$  je ilustrovana u sledećem primeru. Ako signali  $x(t)$  i  $h(t)$  zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ za } t < t_1 \\ h(t) &= 0 \text{ za } t < t_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

kao što je to prikazano na slici 2.12., tada i njihova konvolucija  $y(t)$  zadovoljava sličan uslov.



Slika 2.12.

Ovo tvrđenje nije teško dokazati. Ponovo možemo poći od definicionog izraza za konvoluciju:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.26)$$

S obzirom da je signal  $x(\tau)$  jednak nuli za  $\tau < t_1$ , integral (2.26) postaje



$$y(t) = \int_{t_1}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.27)$$

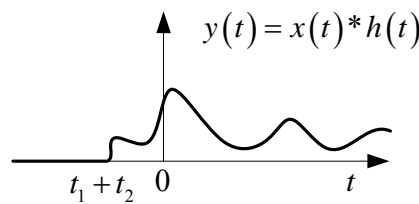
Uvodeći smenu  $t - \tau = \lambda$ , dalje možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (2.28)$$

S obzirom na činjenicu da je  $h(\lambda) = 0$  za  $\lambda < t_2$ , konačni rezultat postaje:

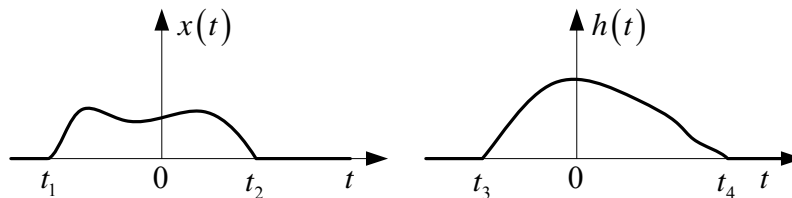
$$y(t) = \begin{cases} 0 & ; t - t_1 < t_2 \\ \int_{t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t - t_1 \geq t_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; t < t_1 + t_2 \\ \int_{t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t \geq t_1 + t_2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Dakle, signal konvolucije  $y(t)$  ima svojstvo da je  $y(t) = 0$  za  $t < t_1 + t_2$ . Oblik signala  $y(t)$  je prikazan na slici 2.13.



Slika 2.13: Oblik signala  $y(t)$

**Primer 5:** Pogledajmo primer konvolucije dva signala koja su ograničenog trajanja kao što je to prikazano na slici 2.14. Dokažimo da je i njihova konvolucija takođe ograničenog trajanja, pri čemu se granice trajanja tog signala vrlo jednostavno određuju.



Slika 2.14: Primer signala ograničenih trajanja u vremenu

Ne uzimajući u obzir znakove vremenskih trenutaka  $t_1, t_2, t_3$  i  $t_4$  (mogu biti i pozitivni i negativni), krenimo opet od definicije konvolucije:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.30)$$

i ponovo uzimajući u obzir granice signala  $x(\tau)$ , možemo pisati:

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.31)$$

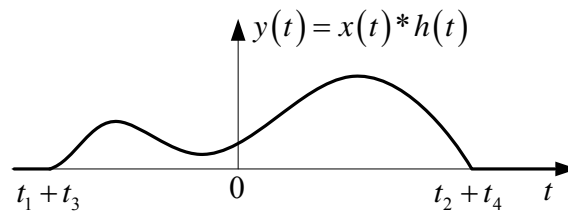
Nakon smene promenljivih  $t - \tau = \lambda$ , dobija se:

$$y(t) = \int_{t-t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (2.32)$$

Uzimajući u obzir ograničeno trajanje signala  $h(\lambda)$ , konačno se dobija

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{cases} 0 ; & t - t_1 < t_3 \\ \int_{\max(t-t_2, t_3)}^{\min(t-t_1, t_4)} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda ; & t - t_1 \geq t_3 \text{ i } t - t_2 < t_4 \\ 0 ; & t - t_2 \geq t_4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 ; & t < t_1 + t_3 \\ \int_{\max(t-t_2, t_3)}^{\min(t-t_1, t_4)} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda ; & t \in [t_1 + t_3, t_2 + t_4) \\ 0 ; & t \geq t_2 + t_4 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Konačno, oblik signala  $y$  je prikazan na slici 2.15.



Slika 2.15: Oblik konvolucije nad signalima  $x(t)$  i  $h(t)$

Dobijeni rezultati su vrlo važni jer se na osnovu njih može zaključiti da ako su signali  $x(t)$  i  $h(t)$  kauzalni (signal  $x(t)$  je kauzalan ako za svako  $t < 0$ ,  $x(t) = 0$ ), tada je i njihova konvolucija  $y(t) = x(t) * h(t)$  takođe kauzalan signal. Ovo je osobina koja će nam u velikoj meri pomoći prilikom određivanja odziva sistema na zadatu pobudu.