

## ***Furijeova analiza vremenski kontinualnih signala***

U dosadašnjim predavanjima smo izvršili analizu svih značajnijih osobina signala do kojih se može doći ukoliko te signale posmatramo u vremenskom domenu. Međutim, već nekoliko vekova unazad razvijene su tehnike transformacije signala koje pružaju značajne a ponekad i pogodnije alate za analizu i sintezu signala i sistema. Vrlo često je priroda nekih signala sa kojima se srećemo svakodnevno, baš takva da je krajnje primerena tim tehnikama. Jedna od tih tehnika jeste transformacija u *frekvencijski domen*. Frekvencijski domen signala nije ništa drugo nego jedan drugačiji pogled na svet oko nas i vrlo često se neki, inače vrlo složeni problemi u vremenskom domenu, vrlo jednostavno rešavaju analizom u frekvencijskom domenu.

Prvi skup takvih transformacija jesu *Furijeova serija* i *Furijeova transformacija* vremenski kontinualnih signala. Ove transformacije su dobile imena po francuskom matematičkaru *J.B.J. Fourier*-u koji je postavio teorijske osnove ovih transformacija početkom devetnaestog veka, a polazeći od naučnih radova *Euler*-a iz osamnaestog veka. Osnovni motiv zbog koga se Fourier bavio ovim problemom jeste pokušaj da se opiše propagacija i širenje toplote, dok se Euler bavio analizom vibracije struna žičanih instrumenata. Međutim, dobijeni rezultati su bili u toj meri opšti da su našli primenu u gotovo svim oblastima nauke i tehnike.

### **Pitanje 16: Sopstvene funkcije kontinualnih LTI sistema**

Pretpostavimo da se ulazni ili pobudni signal jednog kontinualnog LTI sistema  $x(t)$  može napisati u sledećoj formi:

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \quad (6.1)$$

gde je skup funkcija  $\phi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  na neki način pogodno izabran i naziva se bazisom funkcija, a sa  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  su označene odgovarajuće konstante. Znajući da je naš sistem linearan, on zadovoljava osobine homogenosti i aditivnosti, tako da se odziv sistema na ovu pobudu može napisati u sledećoj formi:

$$y(t) = \sum_k a_k \psi_k(t) \quad (6.2)$$

pri čemu je sa  $\psi_k(t)$  označen odziv sistema na pobudu  $\phi_k(t)$ , odnosno, ako sa  $h(t)$  označimo impulsni odziv sistema, sledeća relacija je u važnosti:

$$\psi_k(t) = \phi_k(t) * h(t) \quad (6.3)$$

Ovo je vrlo važan rezultat koji se može iskorisiti u velikom broju različitih primera, međutim, njegov značaj postaje još veći ukoliko za bazis funkcija  $\phi_k(t)$  izaberemo takve funkcije da su one istog oblika kao i funkcije  $\psi_k(t)$  i da se razlikuju samo u jednoj multiplikativnoj konstanti:

$$\psi_k(t) = b_k \phi_k(t) \quad (6.4)$$

jer tada ulaz sistema (6.1) i izlaz sistema (6.2) imaju istu formu. Tada se odziv sistema  $y(t)$ , umesto relacije (6.2) može napisati u obliku:

$$y(t) = \sum_k c_k \phi_k(t) \quad (6.5)$$

gde je  $c_k = a_k b_k$ . Takav bazis funkcija  $\phi_k(t)$  koji zadovoljava ovu osobinu se naziva bazisom *sopstvenih funkcija* za zadati sistem. U engleskoj literaturi se ove funkcije nazivaju terminom *eigenfunctions*.

Od neprocenjivog značaja je rezultat koji se dobije ukoliko pretpostavimo da su sopstvene funkcije u obliku kompleksnih sinusoida:

$$\phi_k(t) = e^{s_k t} \quad (6.6)$$

sa, za sada, proizvoljnom vrednošću kompleksne konstante  $s_k$ . Indeks  $k$ , takođe, za sada nije strogo definisan i on označava da ovih funkcija u bazisu može biti ili konačan ili beskonačan ali prebrojiv broj. Međutim, pod ovakvim ograničenjem, često nije moguće naći odgovarajući bazis funkcija, pa se zbog toga usvaja da bazis sopstvenih funkcija može da bude skup od neprebrojivo mnogo funkcija. Kaže se da na taj način dozvoljavamo kontinuum sopstvenih funkcija u obliku:

$$\phi(t) = e^{st} \quad (6.7)$$

gde je  $s$  kompleksna promenljiva. Lako se pokazuje da funkcija (6.7) zaista predstavlja sopstvenu funkciju LTI sistema. Naime, ako pretpostavimo da je ulazni signal oblika

$$x(t) = \phi(t) = e^{st} \quad (6.8)$$

koristeći konvoluciju, lako sračunavamo odziv sistema

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \phi(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st} \end{aligned} \quad (6.9)$$

gde je sa  $H(s)$  označena kompleksna konstanta, koja ne zavisi od vremenske varijable  $t$ :

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (6.10)$$

Drugim rečima, za pobudu  $x(t) = e^{st}$  dobili smo odziv  $y(t) = H(s) e^{st}$  za bilo koju vrednost kompleksne promenljive  $s$  i bilo koji impulsni odziv  $h(t)$ , što znači da je  $\phi(t) = e^{st}$  sopstvena funkcija proizvoljnog LTI sistema. Ponekada se vrednost  $H(s)$  naziva *sopstvenom vrednošću* (u engleskoj literaturi *eigenvalue*) koja odgovara sopstvenoj funkciji  $\phi(t)$ .

Ovaj rezultat je zapravo osnova transformacija koje ćemo analizirati u ovom i sledećem predavanju, a to su Fourier-ov red, Fourierova transformacija i Laplace-ova transformacija. Specijalno, ako se pobuda  $x(t)$  zaista može napisati kao konačna, ili beskonačna ali prebrojiva suma sopstvenih funkcija

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad (6.11)$$

tada i odziv sistema dobija istu formu

$$y(t) = \sum_k a_k \psi_k(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \quad (6.12)$$

Fourier-ov red predstavlja periodične signale napisane u ovoj formi (6.12), usvajajući da je  $s_k = jk\omega_0$ . Ukoliko je priroda signala takva da se ne mogu predstaviti prebrojivom sumom sopstvenih funkcija, već njihovim kontinuumom, opet posežemo za funkcijom tipa  $\phi(t) = e^{st}$ , a izrazi (6.11) i (6.12) prerastaju u integrale umesto u sume. Ako još usvojimo da je  $s$  čisto imaginarni broj  $s = j\omega$ , dobija se Fourier-ova transformacija. Ako dozvolimo da  $s$  bude proizvoljna kompleksna varijabla, dobija se kao rezultat Laplace-ova transformacija. O tome ćemo detaljnije govoriti u ovom i sledećem poglavlju.

## Pitanje 17: Periodični signali i Fourier-ov red

Već smo rekli da je kontinualni signal  $x(t)$  periodičan ukoliko zadovoljava sledeću relaciju:

$$x(t+T) = x(t) \quad (6.13)$$

za neku nenultu konstantu  $T$  i za sve vrednosti vremenske promenljive  $t$ . Perioda signala je manjmanje nenulta pozitivna vrednost  $T$  za koju je (6.13) zadovoljeno. Osnovni primer periodičnog signala je realna sinusoida

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6.14)$$

gde je  $A$  realna konstanta i  $\omega_0 > 0$ , ili kompleksna sinusoida

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \quad (6.15)$$

gde je  $A$  kompleksni broj. Oba ova signala su periodična sa periodom  $T = 2\pi / \omega_0$ . Vrlo često se u literaturi sreće i takozvani harmonični signal definisan sledećom relacijom:

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad (6.16)$$

gde je  $k$  element skupa celih brojeva, i ovaj signal ima periodu  $T = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$  ako je  $k$  različito od nule

(u slučaju  $k=0$  signal  $x_k(t)$  je konstantan, takozvani *DC* signal i svaka realna vrednost  $T$  zadovoljava relaciju (6.13)). Kako smo u prethodnom pitanju zaključili, svi eksponencijalni signali, realni ili kompleksni, su sopstvene funkcije LTI sistema. To znači da je i harmonični signal (6.16) takođe sopstvena funkcija.

Posmatrajmo sada harmonični ili trigonometrijski red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.17)$$

sa kompleksnim koeficijentima  $a_k$ . Komponente ovog reda koje se dobijaju za  $k = \pm 1$  se nazivaju osnovnim ili fundamentalnim komponentama reda, dok se sabirci za  $|k| \geq 2$  nazivaju harmoničnim komponentama ili višim harmonicima. Pošto je perioda osnovne komponente  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  ceo multipl

periode  $k$ -tog harmonika  $T_k = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$ , zaključujemo da je trigonometrijski red (6.17) periodičan sa periodom  $T_1$ . Osnovna ideja od koje je krenuo Fourier je bila da se svaki periodičan signal može predstaviti harmoničnim ili trigonometrijskim redom u formi koja je identična ili slična relaciji

(6.17). P.L. Dirichlet je kasnije ovu pretpostavku i dokazao za sve osim za ograničen broj, takozvanih devijantnih slučajeva. Otuda se reprezentacija periodičnog signala kakva je data relacijom (6.17) naziva *Fourier-ovim redom*, a uslovi pod kojima jednakost u ovoj relaciji važi se nazivaju *Dirichlet-ovim* uslovima.

**Primer 6.1:** Pođimo od vrlo jednostavne realne sinusoide

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (6.18)$$

Imajući u vidu Euler-ovu predstavu kompleksnih brojeva, ova realna sinusoida se može napisati preko kompleksnih sinusoida u formi

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad (6.19)$$

Očigledno je forma (6.19) zapravo Fourier-ov red pri čemu je

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k &= 0 \text{ za } k \neq \pm 1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Slično tome, ukoliko posmatramo realni sinusni signal

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (6.21)$$

opet možemo doći do Fourier-ovog reda na sledeći način:

$$x(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.22)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_{-1} = \frac{1}{2j} \\ a_k &= 0 \text{ za } k \neq \pm 1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ukoliko posmatramo nešto složeniji signal kao što je

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \quad (6.24)$$

u želji da ga predstavimo Fourier-ovim redom, treba da se poslužimo trigonometrijskim identitetom:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \quad (6.25)$$

pa onda dobijamo jednakost:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} (e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-2j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4} e^{2j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (6.26)$$

odnosno

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.27)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{-2} &= -\frac{1}{4}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_k &= 0 \quad \text{za } k \geq 3 \end{aligned} \quad (6.28)$$

Na ovim jednostavnim primerima smo ilustrovali traženje sopstvenih funkcija i sopstvenih vrednosti nekih jednostavnijih periodičnih signala. Takođe, podsetimo se da ako je  $x(t)$  periodičan signal koji je doveden na ulaz nekog LTI sistema, tada se odziv tog sistema  $y(t)$  može dobiti konvolucijom impulsnog odziva i pobude:  $y(t) = x(t) * h(t)$ . Kako smo pretpostavili da je pobuda  $x(t)$  periodična onda se ona može napisati u formi  $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$ , gde je  $s_k = jk\omega_0$ , i pošto je u pitanju linearan sistem, tada se odziv može takođe napisati u formi Fourier-ovog reda

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (6.29)$$

gde je

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \quad (6.30)$$

**Primer 6.2:** Potražimo izlaz LTI sistema ako je njegov impulsni odziv

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t); \quad \alpha > 0 \quad (6.31)$$

i ako je na njegovom ulazu periodičan signal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \quad (6.32)$$

Uzimajući u obzir rešenje prethodnog primera (relacije (6.27) i (6.28)) i relaciju (6.30) jednostavno možemo pisati:

$$y(t) = \sum_{k=-2}^2 c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.33)$$

gde su nepoznati koeficijenti:

$$c_{-2} = -\frac{1}{4} H(-2j\omega_0), c_{-1} = \frac{1}{2} H(-j\omega_0), c_0 = \frac{1}{2} H(0), c_1 = \frac{1}{2} H(j\omega_0), c_2 = -\frac{1}{4} H(2j\omega_0) \quad (6.34)$$

U želji da sračunamo koeficijente  $H(jk\omega_0)$  treba rešiti sledeći integral:

$$\begin{aligned} H(jk\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + jk\omega_0)\tau} d\tau \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha + jk\omega_0} e^{-(\alpha + jk\omega_0)\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha + jk\omega_0} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Tada konačno, konačno koeficijenti u Fourier-ovom redu (6.33) postaju:

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{\alpha/2}{\alpha + j\omega_0}, c_{-1} = \frac{\alpha/2}{\alpha - j\omega_0}, c_2 = \frac{-\alpha/4}{\alpha + 2j\omega_0}, c_{-2} = \frac{-\alpha/4}{\alpha - 2j\omega_0} \quad (6.36)$$

## Fourier-ov red realnih signala

Primetimo da smo u svim dosadašnjim primerima tražili Fourier-ove redove realnih signala i da je za svaki od njih važio uslov:

$$a_{-k} = a_k^* \quad (6.37)$$

ili  $c_{-k} = c_k^*$ , gde superskript  $*$  označava konjugovanu kompleksnost. Ovo se tvrđenje lako može dokazati. Ako pođemo od relacije (6.27) i na nju primenimo operaciju konjugacije, dobijamo

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \quad (6.38)$$

Ukoliko u poslednjoj sumi izvršimo smenu  $k$  sa  $-k$  i uzimajući u obzir da je  $x(t) = x^*(t)$  za realne signale, dobija se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad (6.39)$$

Upoređujući poslednji izraz sa izrazom (6.27), zaključuje se da je relacija (6.37) valjana za svaki realan signal  $x(t)$ . Shodno tome Fourier-ov red realnih signala se može napisati u sledećoj formi:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) \quad (6.40)$$

ili ekvivalentno tome

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}) \quad (6.41)$$

Ukoliko koeficijent  $a_k$  napišemo u Euler-ovoj formi

$$a_k = A_k e^{j\Theta_k} \quad (6.42)$$

relacija (6.41) postaje

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{j(k\omega_0 t + \Theta_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \Theta_k)}) \quad (6.43)$$

odnosno

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \Theta_k) \quad (6.44)$$

Time je signal  $x(t)$  napisan u formi zbira realnih sinusoida učestanosti  $k\omega_0$ , sa početnim fazama  $\Theta_k$  i amplitudama  $A_k$ . Ovo je jedan od najčešćih načina reprezentacije Fourier-ovog reda za realne signale.

Druga alternativna forma reprezentacije Fourier-ovog reda jeste takozvana pravougaona forma, u kojoj se koeficijent  $a_k$  predstavi preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$a_k = B_k + jC_k \quad (6.45)$$

Tada relacija (6.41) postaje

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)) \quad (6.46)$$

gde u poslednjoj relaciji ne figuriše faza sinusoida  $\Theta_k$  ali se zato pojavljuju i sinusna i kosinusna komponenta. U svom originalnom radu, Fourier je predstavio red baš u formi kakva je relacija (6.46).

### **Određivanje koeficijenata Fourier-ovog reda**

U primerima 6.1 i 6.2. mi smo odredili koeficijente Fourier-ovog reda na osnovu Euler-ove formule i nekih trigonometrijskih identiteta. Međutim, u opštem slučaju, kada su signali koje analiziramo složenije prirode, primena ovakvog postupka je prilično ograničena. Potrebno nam je da razvijemo opšti postupak za nalaženje koeficijenta Fourier-ovog reda za bilo koji periodičan signal  $x(t)$ , naravno pod pretpostavkom da Fourier-ov red konvergira (setimo se Dirichlet-ovih uslova). U ovom odeljku ćemo razviti takav metod.

Pođimo opet od početne pretpostavke da se periodični signal  $x(t)$  može predstaviti u formi Fourier-ovog reda:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.47)$$

i pomnožimo levu i desnu stranu ove relacije sa  $e^{-jn\omega_0 t}$ :

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \quad (6.48)$$

Integraleći obe strane poslednje jednačine u vremenu dužine koja je jednaka periodi  $T$  signala  $x(t)$ , dobija se

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (6.49)$$

gde oznaka  $\int_T$  označava integral po proizvoljnom intervalu  $(t_0, t_0 + T)$  dužine  $T$ . Ukoliko izvršimo zamenu redosleda operacije integraljenja i sumiranja, poslednja relacija postaje:

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (6.50)$$

Ukoliko želimo da izračunamo integral na desnoj strani jednakosti, primenim Euler-ovu formulu:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_T \cos((k-n)\omega_0 t) dt + j \int_T \sin((k-n)\omega_0 t) dt \quad (6.51)$$

Za  $k \neq n$ ,  $\cos((k-n)\omega_0 t)$  i  $\sin((k-n)\omega_0 t)$  su realne sinusoidne učestanosti  $(k-n)\omega_0$  i periode  $T/|k-n|$ . Otuda, integraleći ove sinusoidne po intervalu dužine  $T$ , mi jedan isti oblik integralimo  $|k-n|$  puta jer toliko se perioda sadrži u intervalu vremena  $T$ , pa se za svaki od ovih integrala kao rezultat dobija nula. Sa druge strane, kada je  $k=n$  podintegralna funkcija na levoj strani postaje  $e^{j0} = 1$ , pa je vrednost integrala jednaka  $T$ . Kombinujući ova dva rezultata dobijamo:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (6.52)$$

Ako ovaj rezultat uvrstimo u desnu stranu relacije (6.50), dobijamo

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n T \quad (6.53)$$

što nas dovodi do željenog rezultata. Sledeće dve relacije su vrlo važne i definišu takozvani *Fourier-ov par*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.54)$$

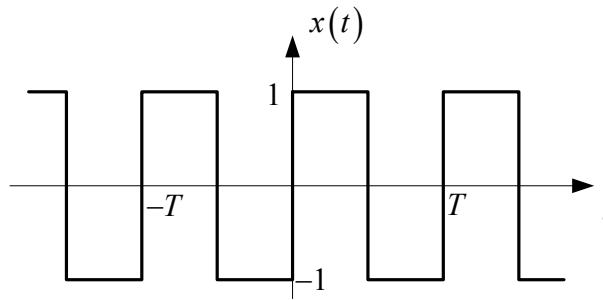
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (6.55)$$

Relacija (6.54) se naziva *sintetičkom relacijom*, a relacija (6.55) *analitičkom relacijom* Fourier-ovog reda. Još na kraju primetimo da je

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (6.56)$$

što zapravo znači da koeficijent  $a_0$  predstavlja srednju vrednost signala  $x(t)$  u toku jedne njegove periode.

**Primer 6.3:** Posmatrajmo periodičan signal  $x(t)$  prikazan na slici 6.1. U pitanju je takozvana povorka četvrtki i ovo je signal koji se često koristi u teoriji obrade signala i teoriji komunikacija.



Slika 6.1: Povorka četvrtki sa neparnom simetrijom

Shodno relaciji (6.55) koeficijente  $a_k$  izračunavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-1) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{T/2} - \frac{1}{-Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{T/2}^T \\ &= \frac{1}{-Tjk\omega_0} (e^{-jk\pi} - e^{-j0}) - \frac{1}{-Tjk\omega_0} (e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Uzimajući u obzir da je  $e^{-j\pi} = -1$  i da je  $e^{-j2\pi} = 1$ , dalje se dobija



$$a_k = \frac{2}{jk2\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \frac{2}{jk\pi}, & \text{za neparno } k \\ 0, & \text{za parno } k \end{cases} \quad (6.58)$$

Ovaj rezultat je vrlo važan, jer nam on govori da povorka četvrtki sa neparnom simetrijom ima samo neparne harmonike i da njihova vrednost opada brzinom  $1/k$ . Ako zamenimo ovaj rezultat u relaciju (6.54) dobijamo

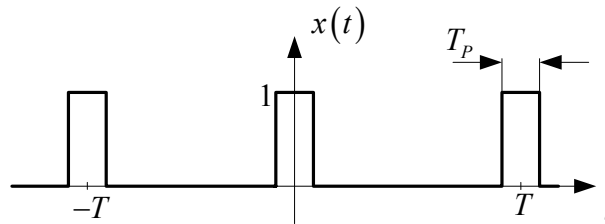
$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\omega_0 t} \quad (6.59)$$

Sređivanjem poslednje sume i uzimajući u obzir posebno pozitivne a posebno negativne indekse  $k$ , možemo signal  $x$  napisati u sledećoj formi:

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \quad (6.60)$$

što predstavlja formu Fourier-ovog reda kakva je data u relaciji (6.46) s tim što su koeficijenti  $C_k = -2/k\pi$ .

**Primer 6.4:** Posmatrajmo povorku pravougaonih četvrtki  $x(t)$  kakva je prikazana na slici 6.2.



Slika 6.2: Pravougaona povorka četvrtki

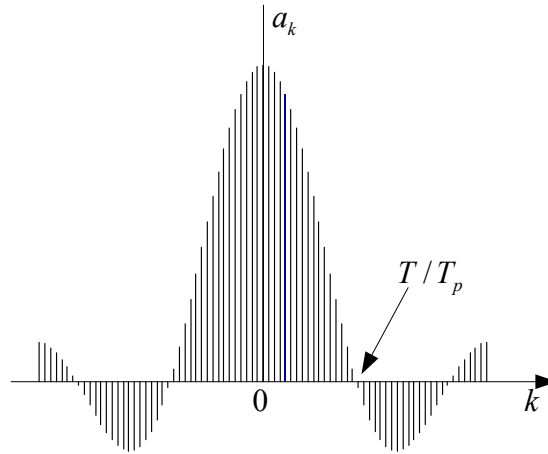
Slično malopredašnjem postupku, ako želimo da odredimo Fourier-ov red za prikazani signal, treba sračunati sledeći integral:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{-jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_p/2}^{T_p/2} \\ &= -\frac{1}{jk2\pi} (e^{-jk\omega_0 T_p/2} - e^{jk\omega_0 T_p/2}) = \frac{\sin(k\omega_0 T_p/2)}{k\pi} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Jasno je da za  $k=0$ , poslednji izraz dobija formu  $0/0$ , pa je potrebno primeniti L'Hopital-ovo pravilo na osnovu koga se dobija da je

$$a_0 = \frac{\omega_0 T_p}{2\pi} = \frac{T_p}{T} \quad (6.62)$$

što očigledno predstavlja srednju vrednost signala na intervalu dužine  $T$ . Na slici 6.3. su prikazani koeficijenti  $a_k$  pod pretpostavkom da je  $T_p \ll T$ . Ovakva reprezentacija Fourier-ovih koeficijenata se naziva *spektrumom signala*.



Slika 6.3: Fourier-ovi koeficijenti povorke četvrtki

Primetimo da se prvi koeficijent koji je jednak nuli dešava kada je  $k\omega_0 T_p / 2 = \pi$ , odnosno za  $k = T / T_p$ . Primetimo još da u specijalnom slučaju kada je  $T_p = T / 2$ , signal  $x(t)$  počinje da liči na signal iz prethodnog primera, s tim što je transliran naviše, pa ima srednju vrednost  $a_0 = 1/2$  a ostali Fourier-ovi koeficijenti dobijaju formu

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi}, & \text{za neparno } k \\ 0, & \text{za parno } k \neq 0 \end{cases} \quad (6.63)$$

### **Konvergenција Fourier-ovih redova**

U prethodnom izlaganju je pokazano kako se izračunavaju koeficijenti Fourier-ovog reda za zadati periodični signal, ali ni jednog momenta se nismo pitali da li uopšte dobijeni red konvergira, a to jeste vrlo važno pitanje. Pitanje konvergenције možemo formulisati na sledeći način: znamo da Fourier-ov red podrazumeva da se periodičan signal  $x(t)$  može predstaviti na sledeći način:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.64)$$

Ako umesto ovog beskonačnog reda formiramo njegovu aproksimaciju kao red sa konačnim brojem sabiraka:

$$x_K(t) = \sum_{k=-K}^K a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.65)$$

pitanje konvergenције postaje pitanje da li sa povećavanjem broja sabiraka, odnosno kada  $K \rightarrow \infty$ , signal  $x_K(t)$  postaje sve bliži signalu  $x(t)$ . U poslednjoj rečenici je upotrebljen pridev 'bliži' međutim, matematički govoreći neophodno je definisati kriterijum po kome možemo ceniti koliko su dva signala bliska. U tom smislu, definišimo signal greške ili rezlike između ova dva signala na sledeći način:

$$e_K(t) = x(t) - x_K(t) \quad (6.66)$$

U želji da sličnost dva signala merimo preko jedne vrednosti, možemo definisati normu nad signalom  $e_K(t)$ . Uobičajeno se uvodi srednja kvadratna norma (u engleskoj literaturi se ova norma obično označava kao MSE *norm* od reči *Mean-Square-Error*):

$$E_K = \frac{1}{T} \int_T |e_K(t)|^2 dt \quad (6.67)$$

Tada pitanje konvergencije može da se formuliše u smislu da li norma  $E_K \rightarrow 0$  kada  $K \rightarrow \infty$ . Ako je odgovor na ovo pitanje potvrđan, mi onda kažemo da Fourier-ov red konvergira ka signalu  $x(t)$ . Poslednji iskaz je vrlo važan, i ne zaboravimo da konvergencija Fourier-ovog ne znači sledeći iskaz  $\lim_{K \rightarrow \infty} e_K(t) = 0$ . Ponekada jeste tako, ali nije generalno pravilo.

Matematičari su se bavili ovim problemom i definisali dovoljne uslove koje signal treba da zadovolji da bi njegov Fourier-ov red konvergirao. Poznata su tri takva uslova i dovoljno je da signal zadovolji jedan, bilo koji, od njih.

1. **uslov:** Ako je periodičan signal  $x(t)$  kontinualna funkcija vremena  $t$ , Fourier-ov red konvergira. (U tom slučaju je konvergencija uniformna, što je još strožija vrsta konvergencije od MSE konvergencije)
2. **uslov:** Ako je signal  $x(t)$  kvadratno integrabilan duž periode  $T$ , odnosno ako je zadovoljen sledeći uslov

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (6.68)$$

tada je njegov Fourier-ov red takođe konvergentan.

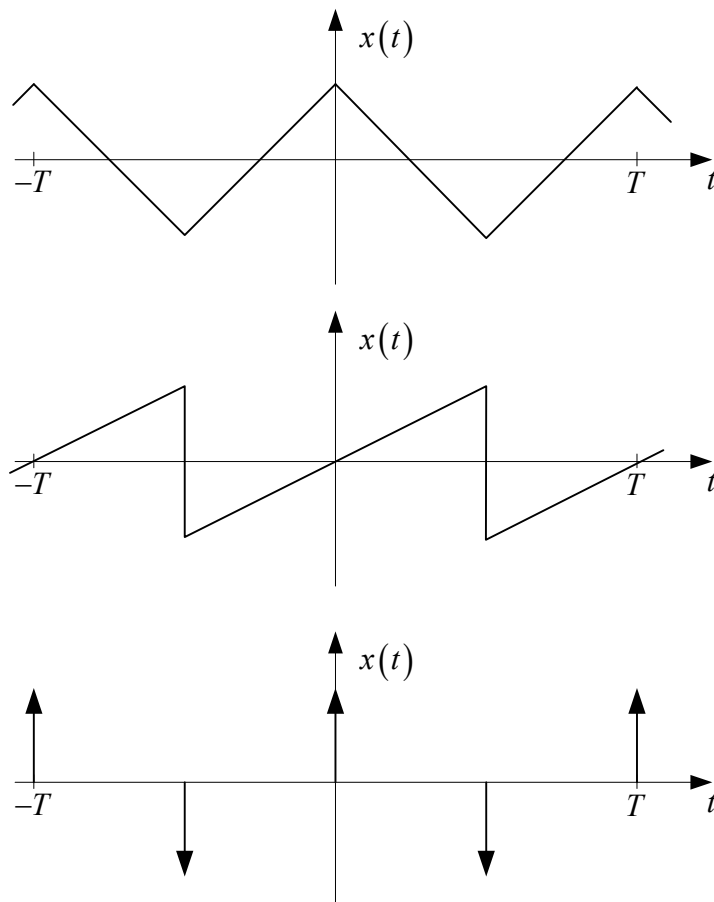
3. **uslov:** (Dirichlet-ov uslov) Osim za konačan broj 'patoloških' specijalnih slučajeva, dovoljan uslov da Fourier-ov red konvergira je da signal  $x(t)$  bude apsolutno integrabilan duž periode  $T$ :

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \quad (6.69)$$

Patološki slučajevi se eliminišu dodavanjem dva dodatna zahteva, a to su: a) da signal  $x(t)$  mora imati konačan broj maksimuma i minimuma duž jedne periode  $T$ , i b) da signal  $x(t)$  mora imati konačan broj diskontinuiteta duž jedne periode  $T$  i da je vrednost funkcije u tim diskontinuitetima konačna.

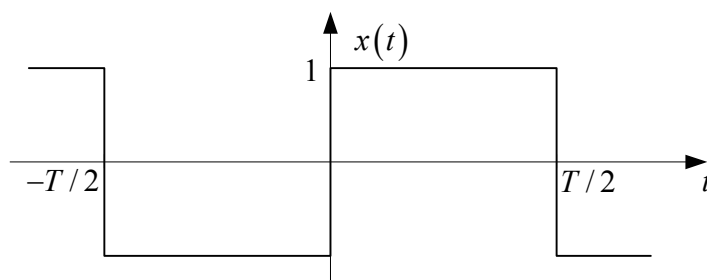
**Primer 6.5:** Na slici 6.4. su data tri periodična signala. Ako želimo da odredimo da li odgovarajući Fourier-ovi redovi konvergiraju, treba da proverimo da li prikazani signali zadovoljavaju neki od navedenih uslova. Prvi signal, takozvani trougaoni jeste neprekidna funkcija vremena, pa po prvom uslovu njegov Fourier-ov red konvergira. Drugi, testerasti signal ima prekide u tačkama  $0, \pm T/2, \pm 3T/2, \dots$  tako da se na njega ne može primeniti prvi uslov, ali sigurno zadovoljava drugi uslov jer je integral njegovog kvadrata duž jedne periode očigledno konačan. Dakle i njegov Fourier-ov red je konvergentan. Konačno, treći prikazani signal, odnosno periodična povorka impulsa ne zadovoljava ni prvi ni drugi uslov, ali zadovoljava treći. Naime, treći signal jeste apsolutno integrabilan duž jedne periode, i još, duž jedne periode ima samo jedan maksimum i jedan minimum, i pri tome ima dva diskontinuiteta a granične vrednosti i sa jedne i sa druge strane diskontinuiteta su konačne. Time treći signal zadovoljava treći uslov pa je i njegov Fourier-ov red konvergentan. Treba još reći da ukoliko neki signal (kao što je periodična povorka impulsa) zadovoljava treći uslov, da tada signal  $e_K(t) \rightarrow 0$  kada  $K \rightarrow \infty$  za svako  $t$  osim u tačkama

diskontinuiteta. U tačkama diskontinuiteta Fourier-ov red konvergira ka srednjoj vrednosti graničnih vrednosti sa leve i desne strane diskontinuiteta.



Slika 6.4: Primer tri periodična signala (trougoni, testerasti i periodična povorka impulsa)

**Primer 6.6:** Pogledajmo signal  $x(t)$  koji je prikazan na slici 6.5.

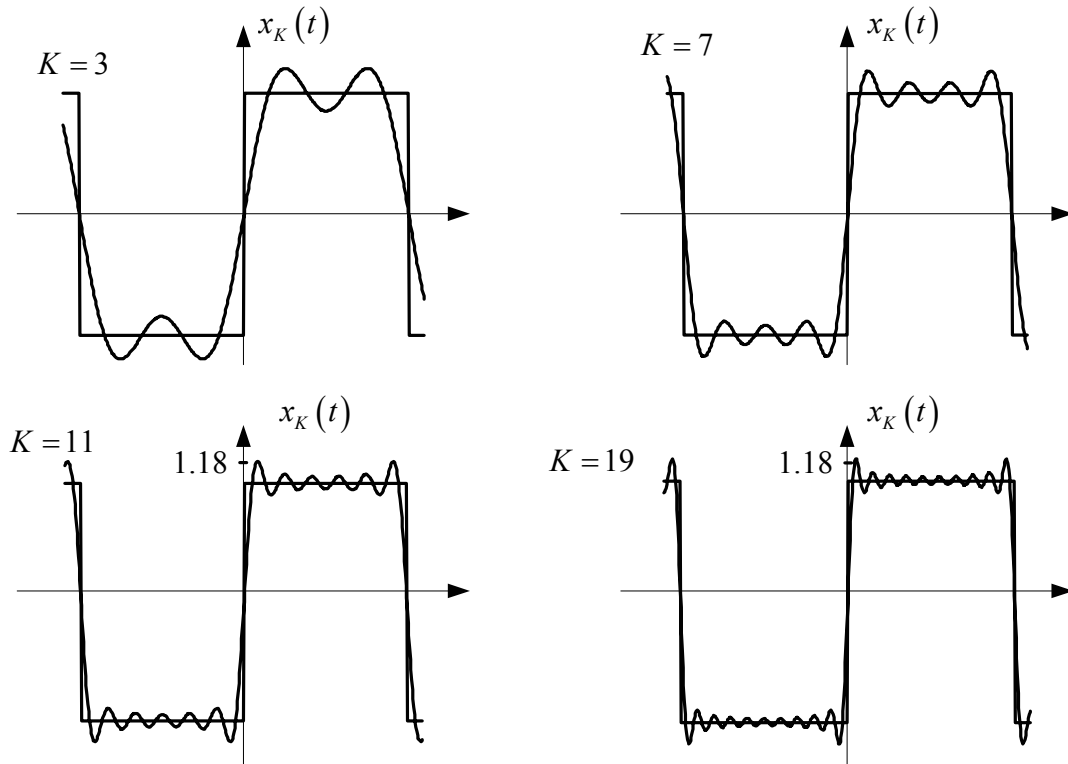


Slika 6.5: Primer periodičnog signala

Ako poželimo da odredimo Fourier-ov red koji odgovara ovom signalu treba da ponovimo postupak iz primera 6.3, gde je dobijena sledeća relacija:

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \quad (6.70)$$

Na slici 6.6. su prikazani signali  $x_K(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno}}}^K \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t)$  za različite vrednosti  $K$  kako bi ilustrovali proces konvergencije reda.



Slika 6.6: Ilustracija konvergencije Fourier-ovog reda

Primetimo da sa povećanjem parametra  $K$ , talasanja u signalu  $x_K(t)$  (takozvani *rippling* u engleskoj literaturi) postaje sve uže i uže, ali preskoci se ne smanjuju. I za  $K=11$  i za  $K=19$ , preskok iznosi oko 18%. Ova se pojava naziva *Gibbs-ovim* efektom i uvek se javlja kada Fourier-ovim redom aproksimiramo signal koji sadrži diskontinuitete. Možda deluje zbunjujuće da  $e_K(t) \rightarrow 0$  kada  $K \rightarrow \infty$  a da se pri tome ovaj prekok ne smanjuje. Međutim, objašnjenje leži u činjenici da se širina ovog preskoka sa povećanjem  $K$  smanjuje, i da se za svaku vrednost vremenske promenljive  $t$  može naći dovoljno veliko  $K$  tako da je  $e_K(t)$  proizvoljno malo.