Pitanje 26: Zed transformacija i inverzna zed transformacija

U ovom predavanju ćemo se baviti diskretnim signalima, diskretnim sistemima i transformacijom koja u svetlu diskretnih signala i sistema zauzima jednako važno mesto kakvo zauzima Laplace-ova transformacija u svetu kontinualnih signala i sistema.

Pojam sopstvenih funkcija i sopstvenih vrednosti možemo definisati na potpuno analogan način za linearne, vremenski nepromenljive diskretne sisteme, kao što smo to uradili i za LTI kontinualne sisteme. Pretpostavimo da je ulazni signal nekog diskretnog LTI sistema $x[n]$ moguće napisati u oblki linearne kombinacije bazisa funkcija $\phi_k[n]$

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] \tag{10.1}$$

Tada se odziv sistema može napisati u sličnoj formi

$$y[n] = \sum_k a_k \psi_k[n] \tag{10.2}$$

gde je sa $\psi_k[n]$ označen odziv sistema na pobudu $\phi_k[n]$:

$$\psi_k[n] = \phi_k[n] * h[n] \tag{10.3}$$

U specijalnom slučaju, kada signali ϕ_k i ψ_k imaju istu formu:

$$\psi_k[n] = b_k \phi_k[n] \tag{10.4}$$

gde je b_k konstanta, za funkciju $\phi_k[n]$ se kaže da je sopstvena funkcija LTI sistema sa odgovarajućom sopstvenom vrednošću b_k. Po analogiji sa kontinualnim sistemima, lako se dokazuje da kompleksna eskponencijaln funkcija

$$\phi_k[n] = z_k^n \tag{10.5}$$

za proizvoljnu kompleksnu konstantu z_k, jeste sopstvena funkcija svakog LTI sistema. Ukoliko posmatramo samo jednu od funkcija iz bazisa

$$\phi[n] = z^n \tag{10.6}$$

odziv sistema na ovakvu pobudu postaje

$$\psi[n] = \phi[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n \tag{10.7}$$

Dakle, signal $\phi[n] = z^n$ jeste sopstvena funkcija bilo kog LTI diskretnog sistema, za bilo koju kompleksnu vrednost *z*, pri čemu je odgovarajuća sopstvena vrednost

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \tag{10.8}$$

Poslednja relacija (10.8) definiše zed transformaciju impulsnog odziva $h[n]$. Slično tome, za bilo koji diskretni signal $x[n]$, odgovarajuća zed transformacija se definiše na identičan način:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{10.9}$$

Slično kao kod Laplace-ove transformacije i zed transformacija konvergira samo za određeni skup kompleksnih varijabli z i geometrijsko mesto tačaka za koje je uslov konvergencije zadovoljen se naziva *oblašću konvergencije zed transformacije* (u engleskoj literaturi obično obeležavan kao ROC ili Region Of Convergence).

Primer 10.1: Posmatrajmo kauzalni eksponencijalni signal

$$x[n]=a^n u[n] \tag{10.10}$$

Odgovarajuća zed transformacija glasi

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n \tag{10.11}$$

Očigledno je u pitanju geometrijski red koji konvergira samo pod uslovom da je moduo koeficijenta reda manji od 1, odnosno da je $\left|az^{-1}\right|<1$, što je ekvivalentno uslovu $|z|>|a|$. Ukoliko je ovaj uslov zadovoljen, signal $X(z)$ postaje

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\ ;\ |z|>|a| \tag{10.12}$$

Dobijena funkcija $X(z)$ se ponovo može napisati (kao i kod Laplace-ove transformacije) u obliku količnika dva polinoma, koji definišu nule i polove dobijene funkcije. Informacija o zed transformaciji je potpuna (do multiplikativne konstante) ukoliko se definiše položaj nula i polova zajedno sa oblašću konvergencije funkcije. Otuda je uobičajen način da se ove informacije prikažu grafički u z ravni, pri čemu se koristi oznaka 'x' za poziciju polova i oznaka 'o' za poziciju nula. Ova funkcija ima jedan pol u tački $z=a$ i jednu nulu $z=0$. Na slici 10.1 je prikazano četiri slučaja, zavisno od vrednosti parametra a. Primetimo da granične vrednosti $a=1$ i $a=-1$ odgovaraju slučajevima $x[n]=u[n]$ i $x[n]=(-1)^n u[n]$, respektivno. Što nas dovodi do rezultata da je

$$u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}\ ;\ |z|>1 \tag{10.13}$$

i

$$(-1)^n u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z+1}\ ;\ |z|>1 \tag{10.14}$$

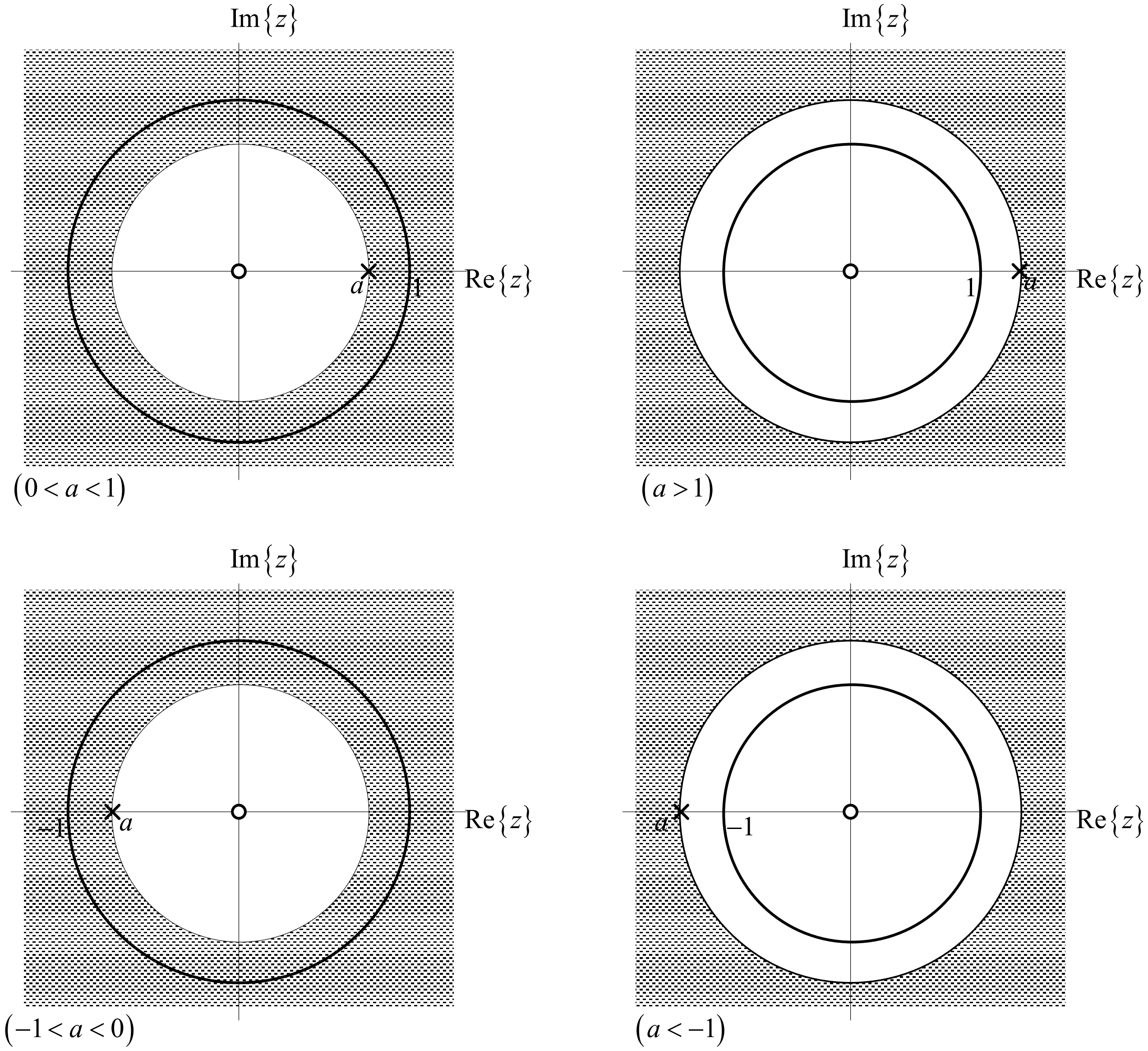
Uobičajena notacija kojom se kaže da diskretni signal $x[n]$ i funkcija $X(z)$ čine transformacioni par zed transformacije je sledeća

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{10.15}$$

ili

$$x[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{10.16}$$

pri čemu će izraz za inverznu zed transformaciju kojom se odbirci signala $x[n]$ mogu sračunati na osnovu funkcije $X(z)$ biti definisan kasnije.



Slika 10.1: Oblasti konvergencije $|z|>|a|$ za četiri različite vrednosti parametra a

Primer 10.2: Posmatrajmo antikauzalni signal

$$x[n]=-a^n u[-n-1] \tag{10.17}$$

koji je jednak nuli za $n \geq 0$. Odgovarajuća zed transformacija ovog signala je

$$X(z)=-\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k}=-\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n=-a^{-1} z \sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{-1} z\right)^n \tag{10.18}$$

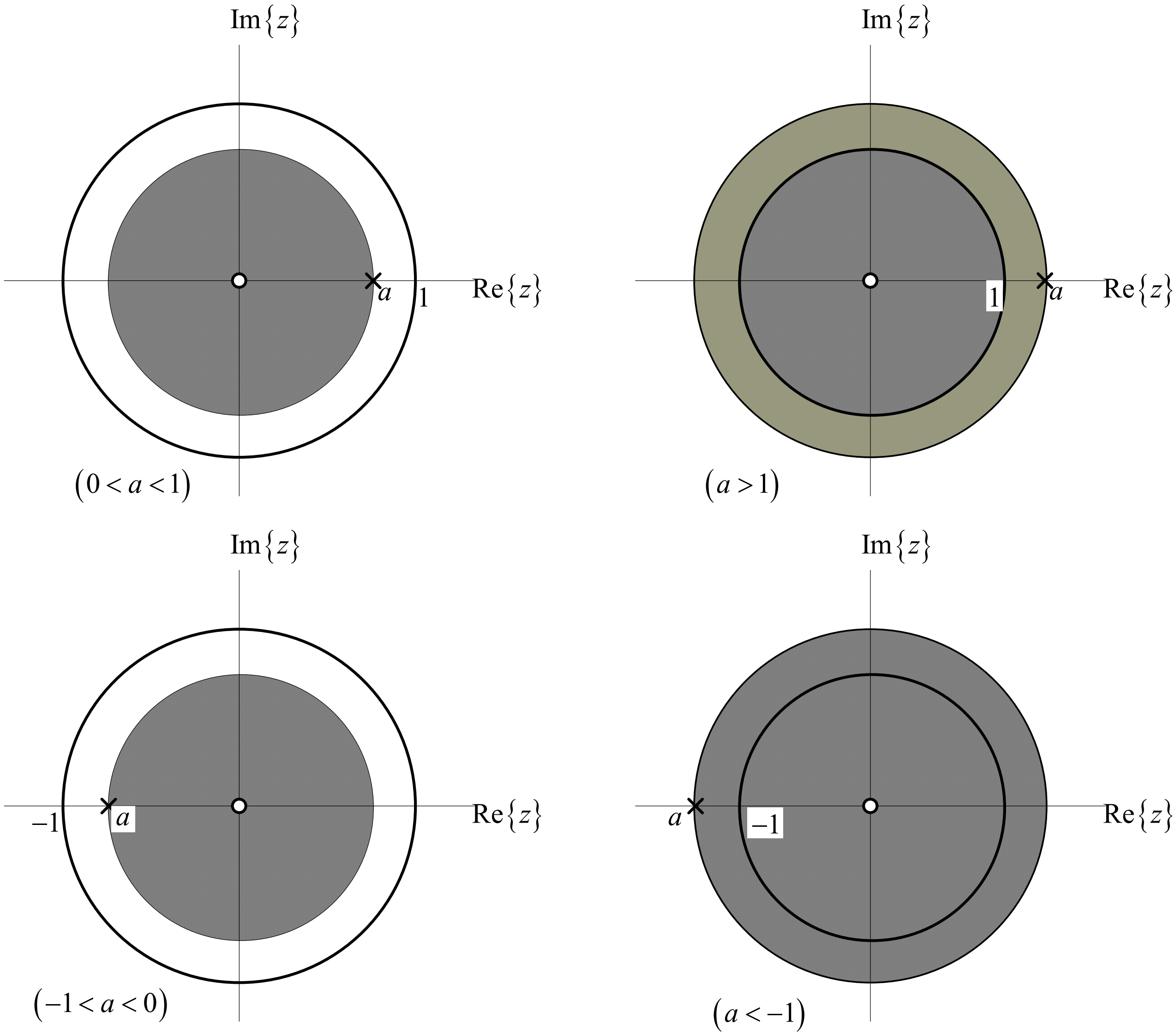
Očigledno da ovaj red konvergira pod uslovom da je $\left|a^{-1} z\right|<1$, odnosno $|z|<|a|$, i tada njegova vrednost postaje

$$X(z)=-\frac{a^{-1} z}{1-a^{-1} z}=\frac{1}{1-a z^{-1}} \;;\; |z|<|a| \tag{10.19}$$

ili u formi

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \;;\; |z| < |a| \tag{10.20}$$

Oblast konvergencije sa položajem nula i polova za različite vrednosti parametra a je prikazana na slici 10.2.



Slika 10.2: Lokacija nula i polova i oblast konvergencije signala $-a^n u[-n-1]$

Primetimo da je zed transformacija ovog signala identična zed transformaciji signala $a^n u[n]$ iz prethodnog primera, i jedina razlika je u oblasti konvergencije. Očigledno da možemo izvesti sličan zaključak o vezi između konvergencije zed transformacije i obliku signala u vremenskom dimenu, kakav smo izveli u domenu Laplace-ove transformacije. Ukoliko je signal kauzalan oblast konvergencije je oblika $|z| > r$ i obrnuto, ukoliko je oblast konvergencije oblika $|z| > r$ tada je signal ograničen sa leve strane, odnosno postoji n_0 tako da je $(\forall n < n_0)\ x[n] = 0$. Takođe, ukoliko je signal antikauzalan tada je oblast konvergencije njegove zed transformacije u obliku $|z| < r$ i obrnuto, ukoliko je oblast konvergencije forme $|z| < r$, tada je signal ograničen sa leve strane, odnosno postoji n_0 tako da je $(\forall n \geq n_0)\ x[n] = 0$.

Primer 10.3: Zed transformacija jediničnog impulsnog signala $\delta[n]$ se jednostavno sračunava:

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] z^{-k} = \delta[0] z^{0} = 1 \tag{10.21}$$

Očigledno da zed transformacija jediničnog diskretnog impulsa konvergira za svako z, i to će biti karakteristika svih signala koji imaju ograničeno trajanje.

Inverzna zed transformacija

Postoji nekoliko različitih načina kako se iz funkcije $X(z)$ mogu rekonstruisati vrednosti odbiraka signala $x[n]$. Prvi od njih je, svakako teorijski vrlo značajan, međutim praktično često nepodesan i komplikovan a zasniva se na Cauchy-jevom integralu i teoriji kompleksne promenljive i dat je sledećom relacijom:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \tag{10.22}$$

gde je sa Γ označena kontura koja leži u oblasti konvergencije funkcije $X(z)$ i koju treba obilaziti u smeru kazaljke na satu.

Mnogo jednostavniji način određivanje odbiraka signala na osnovu zed transformacije se sastoji u razvoju funkcije $X(z)$ u potencijalni red. Naime, ako se ova funkcija napiše u formi količnika dva polinoma

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{10.23}$$

deljenjem polinoma B polinomom A dobija se potencijalni red oblika

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = \frac{B(z)}{A(z)} = a_0 + a_1 z + a_{-1} z^{-1} + a_2 z^2 + a_{-2} z^{-2} + \ldots \tag{10.24}$$

gde se upoređivanjem koeficijenata redova na levo j i desnoj strani jednakosti dolazi do zaključka da koeficijent razvoji koji stoji uz član z^k zapravo predstavlja vrednost odbirka $x[-k]$. Pri tome, oblast konvergencije funkcije $X(z)$ nam govori o tome kakva je priroda signala u vremenu (je li ograničen sa leve ili desne strane, je li konačnog trajanja ili je neograničen) pa u tome smislu možemo znati kakav razvoj tražimo.

Primer 10.4: Data je zed transformacija

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \ ; \ |z| > 2 \tag{10.25}$$

Očigledno je u pitanju signal koji je ograničen sa leve strane, i deljenjem polinoma dobijamo sledeći rezultat:

$$
\begin{array}{l}
X(z) = 1 : \left(1 - 2z^{-1}\right) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \cdots \\
\quad \underline{-\left(1 - 2z^{-1}\right)} \\
\qquad +2z^{-1} \\
\qquad \underline{-\left(2z^{-1} - 4z^{-2}\right)} \\
\qquad\qquad +4z^{-2} \\
\qquad\qquad \underline{-\left(4z^{-2} - 8z^{-3}\right)} \\
\qquad\qquad\qquad +8z^{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \cdots
\end{array}
\tag{10.26}
$$

Na osnovu čega prepoznajemo da je $x[0]=1,\ x[1]=2,\ x[2]=4,\ x[3]=8,\ x[n]=2^n$ i da je u pitanju kauzalni signal.

Treći postupak za nalaženje inverzne zed transformacije jeste da se funkcija $X(z)$ napiše u obliku zbira parcijalnih razlomaka i da se svaki od tih sabiraka prepozna u smislu koji mu vremenski signal odgovara.

Primer 10.5: Zed transformacija signala je

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.2)(z-0.5)} \ ; \ |z| > 0.5 \tag{10.27}$$

Na osnovu oblasti konvergencije odmah zaključujemo da je u pitanju signal koji je ograničen sa leve strane. Razvojem u zbir parcijalnih razlomaka dobijamo:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a}{z-0.2} + \frac{b}{z-0.5} \ ; \ |z| > 0.5 \tag{10.28}$$

gde je

$$a = \lim_{z \to 0.2} (z-0.2)\frac{X(z)}{z} = -10/3; \ b = \lim_{z \to 0.5} (z-0.5)\frac{X(z)}{z} = 10/3 \tag{10.29}$$

odnosno

$$X(z) = \frac{az}{z-0.2} + \frac{bz}{z-0.5}, \ |z| > 0.5 \tag{10.30}$$

Znajući, iz primera 10.1 da je $z/(z-k)$ zed transformacija signala $k^n u[n]$ ako je oblast konvergencije $|z| > r$, lako dolazimo do zaključka da su vrednosti signala $x[n]$:

$$x[n] = a\ 0.2^n u[n] + b\ 0.5^n u[n] = \frac{10}{3}\left[0.5^n - 0.2^n\right] u[n] \tag{10.31}$$

Pitanje 26: Osobine zed transformacije

Kao i u slučaju Fourier-ove i Laplace-ove transformacije, i za zed transformaciju postoji čitav niz osobina koje su od izuzetnog značaja sa stanovišta obrade signala i analize sistema. Svakako jedna od važnijih jeste da je ovo linearna transformacija:

linearnost zed transformacije se definiše kroz sledeću implikaciju

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n]\right\}=X_1(z),\ \mathcal{Z}\left\{x_2[n]\right\}=X_2(z)\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\right\}=a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \quad (10.32)$$

pri čemu se mora naglasiti da je oblast konvergencije funkcije $a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$ jednaka preseku oblasti konvergencija signala $X_1(z)$ i $X_2(z)$

pomeranje u vremenu

Pretpostavimo da su signal $x[n]$ i funkcija $X(z)$ transformacioni par. Postavlja se pitanje šte će biti transformacioni par signala $x[n-n_0]$ koji je pomeren u vremenu za n_0 odbiraka. Do rezulatata se jednostavno dolazi primenom definicionog izraza za zed transformaciju:

$$\mathcal{Z}\left\{x[n-n_0]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k-n_0}=z^{-n_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}=z^{-n_0}X(z) \quad (10.33)$$

što za specijalne slučajeve dovodi do rezultata

$$\begin{aligned} x[n-1]&\leftrightarrow z^{-1}X(z)\\ x[n+1]&\leftrightarrow zX(z)\end{aligned} \quad (10.34)$$

Drugim rečima, zakasniti signal za jedan period odabiranja u zed domenu znači pomnožiti funkciju $X(z)$ sa z^{-1}. Zbog toga se često z^{-1} označava kao operator jediničnog kašnjenja. Iz istog razloga se često kompleksna promenljiva *z* označava kao operatnog jediničnog prednjačenja. Primetimo još da, zavisno od vrednosti parametra n_0, signal $x[n-n_0]$ ne mora biti kauzalan (antikauzalan) iako je signal $x[n]$ bio kauzalan (antikauzalan).

modulacija

Pretpostavimo da su signali $x[n]$ i $X(z)$ transformacioni par. Osobina modulacije tvrdi da je zed transformaciju signala $z_0^n x[n]$ jednostavno dobiti na sledeći način:

$$\mathcal{Z}\left\{z_0^n x[n]\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z_0^k x[k]z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-k}=X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (10.35)$$

odnosno

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (10.36)$$

pri čemu se i oblast konvergencije signala $z_0^n x[n]$ R' dobija na osnovu oblasti konvergencije R originalnog signala $x[n]$:

$$R' = |z_0| R \tag{10.37}$$

Potpuno analogno dobijenom rezultatu, u slučaju kompleksne modulacije signala dobija se sledeći rezultat:

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \;\leftrightarrow\; X\left(z e^{-j\Omega_0}\right)\ ,\quad R' = R \tag{10.38}$$

inverzija vremena

Ukoliko umesto signala $x[n]$ posmatramo njegovu reflekciju u vremenu $x[-n]$, odgovarajuća zed transformacija postaje:

$$\mathcal{Z}\{x[-n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(z^{-1}\right)^{-k} = X\left(z^{-1}\right) \tag{10.39}$$

odnosno

$$x[-n] \;\leftrightarrow\; X(1/z)\ ,\quad R' = 1/R \tag{10.40}$$

konvolucija signala

Pretpostavimo da se signal $y[n]$ dobija kao konvolucija signala $x[n]$ i $h[n]$. Tada se zed transformacija signala y može dobiti kao proizvod zed transformacija signala x i h. Ovo se tvrđenje jednostavno dokazuje:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[k-m] z^{-k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k-m] z^{-(k-m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] z^{-r} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} H(z) = H(z) X(z) \end{aligned} \tag{10.41}$$

U poslednjoj relaciji su iskorišćene činjenice, da sumatori mogu zameniti mesta, da se član z^{-k} može napisati kao $z^{-m} z^{-(k-m)}$ i na kraju je izvršena smena promenljivih $r = k - m$. Pri tome važi relacija:

$$R_y = R_h \cap R_x \tag{10.42}$$

odnosno oblast konvergencije funkcije $Y(z)$ se dobija kao presek oblasti konvergencija funkcija $H(z)$ i $X(z)$.

Slično kao kod Laplace-ove transformacije, može se formirati tabela zed transformacija elementarnih diskretnih signala.

Signal	Zed transformacija	Obast konvergencije
$\delta[n]$	1	Svako z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$

$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$r^n\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$
$r^n\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>r$

Tabela: Zed transformacije elementarnih diskretnih signala

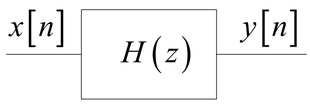
Navedena tablica je vrlo ilustrativna, jer ona ne samo da sadrži zed transformacije signala koji se najčešće koriste, već nam govori o tome da dva različita signala mogu imati identične zed transformacije, ali se razlikuju po oblastikonvergencije. Takođe sa iz tablice može zaključiti da kauzalnim signalima odgovara oblast konvergencije oblika $|z|>r_{\min}$ dok antikauzalni signalima odgovara oblast konvergencije tipa $|z|<r_{\max}$, što znači da se po tipu konvergencije može odrediti priroda signala u vremenskom domenu.

Pitanje 27: Funkcija diskretnog prenosa sistema i jednostrana zed transformacija

Ukoliko na impulsni odziv $h[n]$ jednog diskretnog LTI sistema primenimo zed transformaciju, dobićemo funkciju

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k} \tag{10.43}$$

koja u potpunosti opisuje sistem i naziva se *funkcijom diskretnog prenosa sistema.* Uobičajeno je da se takav sistem označi pravougaonikom u koji se upiše funkcija prenosa, kao na slici 10.3.



Slika 10.3: Šematska oznaka diskretnog sistema opisanog funkcijom diskretnog prenosa

Tada je jednostavno uspostaviti vezu između ulaznog i izlaznog signala:

$$Y(z) = H(z)X(z) \ , \quad R_y = R_h \cap R_x \tag{10.44}$$

Postoji nekoliko, često korišćenih, jednostavnih diskretnih sistema, kao što su jedinično kašnjenje (*unit delay*), jedinično prednjačenje (*unit advance*) i akumulator. Njihovi impulsni odzivi i odgovarajuće funkcije prenosa su:

jedinično kašnjenje: $h[n] = \delta[n-1]$, $H(z) = z^{-1}$, $|z| > 0$

jedinično prednjačenje: $h[n] = \delta[n+1]$, $H(z) = z$, $|z| < \infty$

akumulator: $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$, $H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$.

Primer 10.6: Impulsni odziv diskretnog sistema je

$$h[n] = 0.5^n u[n] \tag{10.45}$$

Ako se na ulaz ovakvog sistema dovede signal

$$x[n] = 2^n u[-n] = 0.5^{-n} u[-n] \tag{10.46}$$

lako možemo odrediti odziv takvog sistema, primenjujući zed transformaciju:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(0.5z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \ , \ |z| > 0.5 \tag{10.47}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{k} = \frac{1}{1-0.5z} = \frac{-2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \ , \ |z| < 2 \tag{10.48}$$

Konačno, zed transformacija izlaznog signala postaje:

$$Y(z) = -\frac{2z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} \ , \ 0.5 < |z| < 2 \tag{10.49}$$

U želji da na osnovu dobijene zed transformacije odredimo vremenski oblik signala $y[n]$, možemo rešavati integral kojim je definisana inverzna zed transformacija (relacija 10.22), međutim, možemo izraz (10.49) napisati u obliku parcijalnih razlomaka i na osnovu njih, jednostavno prepoznati pojedine članove iz tabele zed transformacija elementarnih signala:

$$Y(z) = \frac{a}{1-0.5z^{-1}} + \frac{b}{1-2z^{-1}} \ , \ 0.5 < |z| < 2 \tag{10.50}$$

gde se parameri a i b određuju na osnovu relacija:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{z\to 0.5}\left(1-0.5z^{-1}\right)Y(z) = 4/3 \\ b &= \lim_{z\to 2}\left(1-2z^{-1}\right)Y(z) = -4/3 \end{aligned} \tag{10.51}$$

Konačno, prvi član u relaciji (10.50) odgovara tabličnom kauzalnom signalu (jer je oblast konvergencije oblika $|z| > 0.5$), dok drugi član odgovara tabličnom antikauzalnom signalu (jer je oblast konvergencije oblika $|z| > 2$), pa onda možemo pisati:

$$y[n] = \frac{4}{3}0.5^n u[n] + \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \tag{10.52}$$

Frekvencijski odziv diskretnog sistema

Ukoliko na ulaz diskretnog sistema dovedemo kompleksnu diskretnu sinusoidu

$$x[n] = e^{j\Omega n} \tag{10.53}$$

proizvoljne učestanosti Ω, jednostavno se primenom konvolucije dobija odziv sistema

$$y[n] = x[n] * h[n] = H\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n} \tag{10.54}$$

što je znak da će i odziv sistema biti kompleksna sinusoida iste učestanosti, s tim što je pomnožena kompleksnim brojem $H\left(e^{j\Omega}\right)$:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} \tag{10.55}$$

Ukoliko poslednja suma konvergira, ona se naziva *frekvencijskim odzivom diskretnog sistema za* učestanost Ω, jer nam ona govori šta se dešava sa amplitudom i fazom kompleksne sinusoide koja propagira kroz zadati LTI sistem. Slično kao što smo frekvencijski odziv analizirali kod kontinualnih sistema, i kod diskretnih sistema se analizira posebno amplituda i posebno faza frekvencijskog odziva, i za sisteme čiji je impulsni odziv realna funkcija, važe sledeće dve relacije:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\Omega}\right)\right| \tag{10.56}$$

što znači da je amplitudska frekvencijska karakteristika diskretnog sistema parna funkcija, i

$$\arg\left\{H\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = -\arg\left\{H\left(e^{-j\Omega}\right)\right\} \tag{10.57}$$

što označava da je fazna karakteristika neparna funkcija učestanosti Ω. Dakle, rezulati su identični onima do kojih smo došli za kontinualne sisteme.

Kauzalnost i stabilnost sistema

Na osnovu tabele zed transformacija elementarnih diskretnih signala, kao i na osnovu primera koji su dosada ilustrovali osnovne osobine zed transformacije, možemo zaključiti da su kauzalni signali ili kauzalni sistemi (sistemi su kauzalni ako je njihov impulsni odziv kauzalni signal) prepoznatljivi po tome da je njihova oblast konvergencije oblika

$$|z| > r_{\max} \tag{10.58}$$

dok se za antikauzalne signale ili antikauzalne sisteme oblast konvergencije pojavljuje u formi

$$|z| < r_{\min} \tag{10.59}$$

Takođe se može zaključiti da ukoliko neki signal ili funkcija prenosa sistema imaju oblast konvergencije oblika

$$r_1 < |z| < r_2 \tag{10.60}$$

tada je u vremenskom domenu karakteristika sistema ili signala da nisu ograničeni ni sa leve ni sa desne strane. Konačno, ako je oblast konvergencije cela z ravan, tada se radi o signalima koji su ograničenog trajanja u vremenu, što znači da su ograničeni sa obe strane.

Ako želimo da analiziramo stabilnost diskretnih LTI sistema, podsetimo se da je potreban i dovoljan uslov BIBO stabilnosti sledeći:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| < \infty \tag{10.61}$$

Sa druge strane, lako se dokazuje sledeća nejednakost:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\Omega}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| \left|e^{-jk\Omega}\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| \tag{10.62}$$

koja nam kaže da ako želimo da sistem bude BIBO stabilan, mora biti zadovoljena relacija (10.61), što na osnovu (10.62) znači da mora biti zadovoljena i sledeća relacija:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| < \infty \tag{10.62}$$

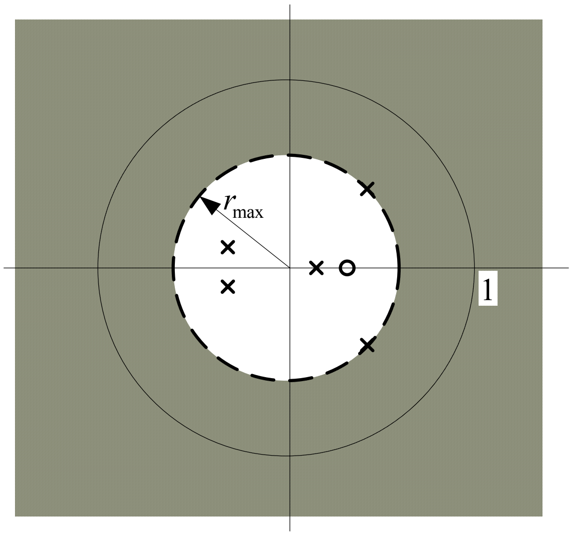
što sa druge strane znači da jedinični krug z ravni mora pripadati oblasti konvergencije funkcije diskrentog prenosa sistema. Ovaj ćemo zaključak posebno da izdvojimo u formi sledećeg tvrđenja:

Potreban i dovoljan uslov da diskretni LTI sistem bude stabilan jeste da jedinični krug z ravni pripada oblasti konvegencije funkcije diskretnog prenosa sistema.

Ukoliko se pozabavimo samo kauzalnim sistemima, i ukoliko pretpostavimo da se funkcija diskretnog prenosa može napisati u formi

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{10.63}$$

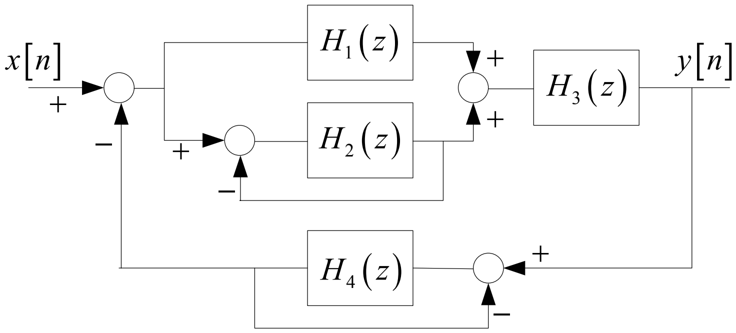
dakle, kao količnih dva polinoma, gde položaj nula i polova ove funkcije diskretnog prenosa definiše funkciju diskretnog prenosa do multiplikativne konstante, tada se kompletna informacija o sistemu može dati grafičkom predstavom u z ravni, gde ćemo simbolom 'x' označiti položaj polova, simobolom 'o' položaj nula, a šrafiranjem oblast konvergencije. Sa druge strane, jasno je da tačke u z ravni koje označavaju polove sistema ne mogu pripadati oblasti konvergencije, jer je u njima vrednost funkcije $H(z)$ beskonačno velika. Dakle, ako želimo da naš sistem bude kauzalan i stabilan grafički prikaz u z ravni mora biti kao na slici 10.4.



Slika 10.4: Grafički prikaz stabilnog kauzalnog sistem

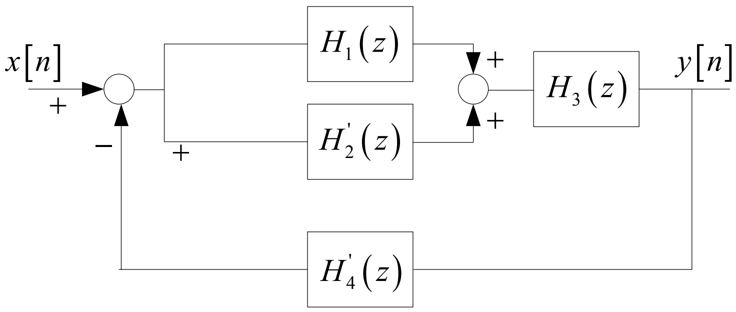
Na osnovu poslednje slike možemo zaključiti da $r_{\max}$, predstavlja maksimalni moduo svih polova funkcije $H(z)$, kako je za stabilnost važno da jedinični krug pripada oblasti konvergencije, jednostavno dolazimo do sledećeg potrebno i dovoljnog uslova stabilnosti diskretnog sistema: ***Potreban i dovoljan uslov da diskretni LTI sistem bude stabilan jeste da svi polovi funkcije diskretnog prenosa budu unutar jediničnog kruga, odnosno da moduo svakog od polova bude manji od 1.***

Primer 10.7: Strukturni blok dijagram diskretnog sistema je prikazan na slici 10.5.



Slika 10.5: Strukturni blok dijagram sistema

Pravila kojima se dati strukturni blok dijagram može transformisati i pojednostaviti, su identična pravilima algebre funkcije prenosa koju smo naveli za kontinualne sisteme. Primenom trećeg pravila, blokovi sa zatvorenom povratnom spregom se mogu zameniti jednom funkcijom prenosa, i pojednostavljeni strukturni blok dijagram je dat na slici 10.6.

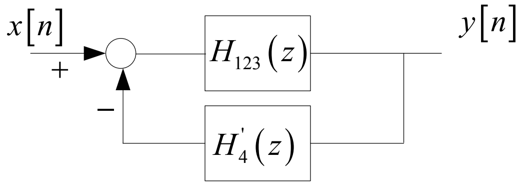


Slika 10.6: Modifikovani strukturni blok dijagram

Novouvedene funkcije diskretnog prenosa su:

$$H_2^{'}(z)=\frac{H_2(z)}{1+H_2(z)}\,,\;H_4^{'}(z)=\frac{H_4(z)}{1+H_4(z)} \tag{10.64}$$

Dalje se jednostavno može prepoznati da su blokovi funkcija prenosa $H_1(z)$ i $H_2^{'}(z)$ vezani u paralelu, a na red sa blokom funkcije diskretnog prenosa $H_3(z)$, pa je sledeći pojednostavljeni strukturni blok dijagram dat na slici 10.7.



Slika 10.7: Modifikovani strukturni blok dijagram sistema

pri čemu je

$$H_{123}(z)=\left[H_1(z)+H_2^{'}(z)\right]H_3(z) \tag{10.65}$$

Konačno, funkcija diskretnog prenosa celog sistema postaje

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{H_{123}(z)}{1+H_{123}(z)H_4^{'}(z)} \tag{10.66}$$

Ako pretpostavimo sledeće konkretne vrednosti za pojedine funkcije diskretnog prenosa:

$$\begin{aligned}&H_1(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\ ,\ |z|>0.5\ ;\quad H_2(z)=\frac{1}{1-0.2z^{-1}};\ |z|>0.2\\&H_3(z)=1\ ;\quad H_4(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},\ |z|>1\end{aligned} \tag{10.67}$$

mogući je odrediti ekvivalentnu funkciju diskretnog prenosa $H(z)$, na sledeći način:

$$H_2^{'}(z)=\frac{H_2(z)}{1+H_2(z)}=\frac{1}{2-0.2z^{-1}}=\frac{0.5}{1-0.1z^{-1}},\ |z|>0.1 \tag{10.68}$$

$$H_4^{'}(z)=\frac{H_4(z)}{1+H_4(z)}=\frac{1}{2-z^{-1}}=\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}};\ |z|>0.5 \tag{10.69}$$

$$\begin{aligned}H_{123}(z)&=\left(H_1(z)+H_2^{'}(z)\right)H_3(z)=\\&=\left[\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.5}{1-0.1z^{-1}}\right]=\frac{1.5-0.35z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-0.1z^{-1}\right)},\ |z|>0.5\end{aligned} \tag{10.70}$$

i konačno

$$H(z)=\frac{H_{123}(z)}{1+H_{123}(z)H_4^{'}(z)}=\frac{\left(1.5-0.35z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)^2\left(1-0.1z^{-1}\right)+0.5\left(1.5-0.35z^{-1}\right)} \tag{10.71}$$

Ukoliko želimo da odredimo impulsni odziv ovakvog sistema, potrebno je da ga predstavimo u obliku parcijalnih razlomaka, koji će zatim biti prepoznatljivi na osnovu table zed transformacija elementarnih diskretnih signala:

$$H(z)=\frac{0.8571-0.6z^{-1}+0.0857z^{-2}}{\left(1-0.4398z^{-1}+0.161z^{-2}\right)\left(1-0.085z^{-1}\right)}\ ,\quad |z|>\sqrt{0.161}=0.4012 \tag{10.72}$$

$$H(z)=\frac{a+bz^{-1}}{1-0.4398z^{-1}+0.161z^{-2}}+\frac{c}{1-0.085z^{-1}} \tag{10.73}$$

Metodom izjednačavanja koeficijenata polinoma, ili metodom reziduma, dobijaju se vrednosti koeficijenata:

$$a=-0.184;\ b=-4.969;\ c=0.27 \tag{10.74}$$

Konačno, funkcija diskretnog prenosa se može napisati u formi koja je prepoznatljiva na osnovu navedene tablice zed transformacija:

$$\begin{aligned} H(z)=0.27&\frac{1}{1-0.085z^{-1}} \\ -0.1842&\frac{1-0.4012\cos(0.9907)z^{-1}}{1-2\times0.4012\times\cos(0.9907)z^{-1}+(0.4012)^2 z^{-2}} \\ +14.9286&\frac{4.012\sin(0.9907)z^{-1}}{1-2\times0.4012\times\cos(0.9907)z^{-1}+(0.4012)^2 z^{-2}} \end{aligned} \tag{10.78}$$

Funkcija diskretnog prenosa je napisana tako da se u prvom članu prepoznaje zed transformacija kauzalnog eksponencijalnog signala, drugi član predstavlja zed transformaciju prigušenog kosinusnog a treći sinusnog člana. Prepoznavanjem koeficijenata a, r i Ω iz tabele zed transformacija, direktno možemo pisati oblik impulsnog odziva:

$$h[n]=\left[0.27\times0.08^n-0.18\times0.40^n\times\cos(0.99n)+14.93\times0.40^n\times\sin(0.99n)\right]u[n] \tag{10.79}$$

Unilateralna (jednostrana) zed transformacija

Vrlo često kada operišemo sa kauzalnim sistemima i kauzalnim signalima mnogo je pogodinije koristiti unilaterlanu ili jednostranu zed transformaciju koja se definiše sledećim definicionim izrazom:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k} \tag{10.80}$$

Prednost unilateralne zed transformacije nad bilateralnom je ta, što u ovom slučaju nije neophodno pisati oblast konvergencije. Podrazumeva se da je oblast konvergencije oblika $|z|>r_{\max}$ gde je sa $r_{\max}$ poluprečnik minimalnog kruga sa centrom u koordinatnom početku koji obuhvata sve polove funkcije $X(z)$. Slično kao i kod jednostrane Laplace-ove transformacije, sve osobine koje smo naveli za dvostranu zed transformaciju važe i za jednostranu, sa jednom razlikom, a to je zed transformacija signala koji prednjači u vremenu. Naime, pretpostavimo da nam je poznata zed transformacija $X(z)$ kauzalnog signala $x[n]$ i da sada želimo da nađemo zed transformaciju kauzalnog signala $x[n+1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n+1]\}&=x[1]z^0+x[2]z^{-1}+x[3]z^{-2}+\cdots= \\ &=z\{x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots\}-zx[0]=zX(z)-zx[0] \end{aligned} \tag{10.81}$$

odnosno

$$x[n]\ \leftrightarrow\ zX(z)-zx[0] \tag{10.82}$$

Potpuno analogno ovom dokazu, lako se sračunava zed transformacija signala koji prednjači više odbiraka:

$$x[n+n_0]\ \leftrightarrow\ z^{n_0}X(z)-z^{n_0}x[0]-z^{n_0-1}x[1]-\cdots-zx[n_0-1] \tag{10.83}$$

Takođe, kao i kod unilateralne Laplace-ove transformacije, postoje dve granične teoreme jednostrane zed transformacije, koje kažu da se na osnovu funkcije $X(z)$ mogu odrediti dve granične vrednosti signala u vremenu $x[0]$ i $x[\infty]$.

Prva granična teorema unilateralne zed transformacije

Polazeći od pretpostavke da su $x[n]$ i $X(z)$ transformacioni par zed transformaicje, možemo pisati:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \tag{10.84}$$

Očigledno je da, ako u navedenom izrazu pustimo granični proces u kome kompleksna promenljiva z teži ka ∞, da će nestati svi sabirci na desnoj strani relacije (10.84) osim poslednjeg:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{10.85}$$

Poslednji izraz definiše takozvanu prvu graničnu teoremu zed transformacije.

Druga granična teorema unilateralne zed transformacije.

Pretpostavimo da na osnovu kauzalnog signala $x[n]$ generišemo pomoćni signal $x_k[n]$ na sledeći način:

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n], & n \le k \\ 0\ , & n > k \end{cases} \tag{10.86}$$

Odgovarajući transformacioni par ovog signala je

$$X_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{k} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots x[k]z^{-k} \tag{10.87}$$

Sada posmatrajmo signal $\overline{x}_k[n]$ koji je definisan na sledeći način:

$$\overline{x}_k[n] = \begin{cases} 0\ ;\ n = 0 \\ x[n-1];\ 1 \le n \le k \\ 0\ ;\ n > k \end{cases} \tag{10.88}$$

i njemu odgovarajuću zed transformaciju

$$\overline{X}_k(z) = x[0]z^{-1} + x[1]z^{-2} + \cdots + x[k-1]z^{-k} \tag{10.89}$$

Očigledno je na osnovu izraza (10.87) i (10.89) da je vrednost signala $x[k]$ moguće dobiti na sledeći način:

$$x[k] = \lim_{z\to 1}\left(X_k(z) - \overline{X}_k(z)\right) \tag{10.89}$$

a sada na dobijeni izraz pustimo granični proces u kome k teži ∞:

$$x[\infty] = \lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{k\to\infty}\lim_{z\to 1}\left(X_k(z) - \overline{X}_k(z)\right) \tag{10.90}$$

Ukoliko limesi zamene mesta dobijamo

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1}\lim_{k\to\infty}\left(X_k(z) - \overline{X}_k(z)\right) = \lim_{z\to 1}\left(1 - z^{-1}\right)X(z) \tag{10.91}$$

jer je

$$\lim_{k\to\infty} x_k[n] = x[n]\ ,\ \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k[n] = x[n-1] \tag{10.92}$$

pa je

$$\lim_{k\to\infty} X_k(z) = X(z)\ ,\ \lim_{k\to\infty} \overline{X}_k(z) = z^{-1}X(z) \tag{10.93}$$

Relacija (10.91) se naziva drugom graničnom teoremom zed transformacije, i ponovo je neophodno dati napomenu da je ova teorema primenjiva samo pod uslovom da svi polovi funkcije $X(z)$ leže unutar jediničnog kruga z ravni.

Kao što je Laplace-ova transformacija vrlo pogodan alat za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, tako se linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima jednostavno rešavaju primenom zed transformacije. Ovu tehniku možemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 10.8: Neka je data diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima:

$$y[n+2]-0.8y[n+1]+0.15y[n] = x[n+1]-x[n] \tag{10.94}$$

pri čemu je signal

$$x[n] = \left(1-0.5^n\right)u[n] \tag{10.95}$$

Ukoliko na relaciju (10.94) primenimo unilateralnu zed transformaciju dobićemo algebarsku jednačinu po funkciji $Y(z)$:

$$z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]-0.8zY(z)+0.8zy[0]+0.15Y(z) = zX(z)-zx[0]-X(z) \tag{10.96}$$

Rešavanjem ove jednačine po $Y(z)$, dalje dobijamo

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(z-1)X(z)-zx[0]+(z^2-0.8z)y[0]+zy[1]}{z^2-0.8z-0.15} \\ &= \frac{(z-1)X(z)-zx[0]+(z^2-0.8z)y[0]+zy[1]}{(z-0.5)(z-0.3)} \\ &= \frac{\left(z^{-1}-z^{-2}\right)X(z)-z^{-1}x[0]+(1-0.8z^{-1})y[0]+z^{-1}y[1]}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-0.3z^{-1}\right)} \end{aligned} \tag{10.97}$$

Uzimajući u obzir da je

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{0.5z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}\ ,\ x[0]=0 \tag{10.98}$$

i pretpostavljajući da je

$$y[0]=0\ ,\ y[1]=1 \tag{10.99}$$

dobijamo

$$Y(z) = \frac{0.5z^{-2}+z^{-1}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-0.3z^{-1}\right)} = \frac{5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} - \frac{4z^{-1}}{1-0.3z^{-1}} \tag{10.100}$$

Znajući da je zed transformacija kauzalnog signala $a^n u[n]$ jednaka $1/\left(1-az^{-1}\right)$ i da množenje sa z^{-1} u kompleksnom domenu odgovara kašnjenju za jedan odbirak u vremenskom domenu, konačno možemo napisati čemu je jednako rešenje posmatrane diferencne jednačine:

$$y[n]=5\times 0.5^{n-1}u[n-1]-4\times 0.3^{n-1}u[n-1]=\left[5\times 0.5^{n-1}-4\times 0.3^{n-1}\right]u[n-1] \tag{10.101}$$