

# OPŠTI PREGLED I UVOD U TEORIJU SIGNALA I SISTEMA

Teorija, analiza i projektovanje signala i sistema igraju značajnu ulogu u gotovo svim oblastima elektrotehnike kao i u mnogim drugim inženjerskim i naučnim oblastima. Mnogi primeri elektronskih sistema uključuju radio i televiziju, telefonske mreže, sonar i radar, navigaciju i vođenje, laboratorijsku instrumentaciju, upravljanje industrijskim procesima, biomedicinsku instrumentaciju, daljinsko ili satelitsko osmatranje, komunikacionu inteligenciju, vojno i vatrogasno osmatranje, seizmičku analizu, radio astronomiju i tako dalje. Mnogi primeri mehaničkih sistema podrazumevaju analizu vibracija, prigušenje oscilacija, mikrofone i hidrofone, zvučnike, merače ubrzanja i tako dalje. Pod **signalima** podrazumevamo sve ulaze i izlaze, kao i unutrašnje funkcije koje ovi sistemi obrađuju ili proizvode, kao što su napon, pritisak, pomeraj ili intenzitet. Uglavnom je nezavisna promenljiva ovih funkcija signala vreme, ali ne mora biti. Ponekada je to odstojanje, ugao a vrlo često, kao što je to na primeru slike, u pitanju dvodimenzioni signal po nezavisnim koordinatama dužine. Jednom rečju, zbog velikog broja različitih vrsta i raznolikosti prirode navedenih signala, teško je dati jednu opštu definiciju signala. Nekada se, u nekim od udžbenika može naći iskaz da je **signal svaki vremenski promenljivi fizički fenomen ili pojava koja sa sobom nosi informaciju**. Ovaj iskaz je delimično tačan, jer vrlo često pod signalima podrazumevamo i funkcije koje za nezavisnu promenljivu nemaju vreme, a ponekada kao signale možemo posmatrati i imaginarne funkcije koje nisu u tesnoj vezi sa fizičkim pojavama. Međutim, ono što svakako jeste zajedničko za sve ono što pod širokim pojmom signala podrazumevamo, je informacija.

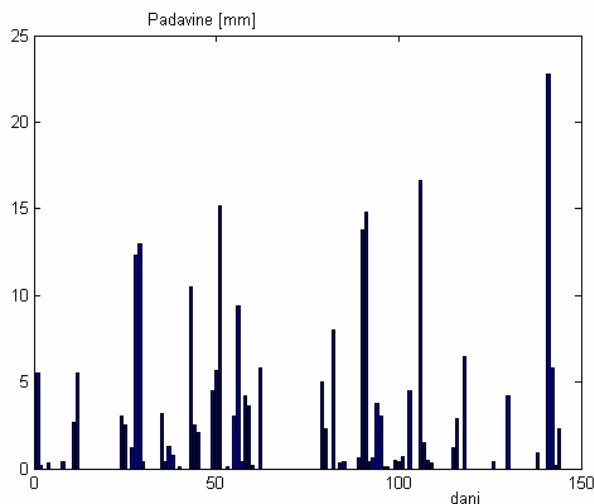
Sa istom težinom, sa kojom je teško definisati raznoliki pojam signala, jeste teško i definisati pojam sistema. Intuitivno podrazumevamo da su sistemi oni subjekti (tehnički, biološki ili društveni) koji obrađuju ili proizvode signale. Ovako opšta definicija sistema podrazumeva čitave klase uređaja, struktura, subjekata (veliki broj drugih imenica se može upotrebiti umesto reči sistem) kao što su **društveni sistemi**: kapitalistički sistem, socijalistički sistem, bankarski sistem, parlamentarni sistem, ekonomski sistem, sistem hartija od vrednosti, sistem obrazovanja, sistem pravosuđa, pa preko **tehničkih sistema**: televizijski sistem, satelitski sistem, upravljački sistem, mikrofonski sistem, kamera, nadzorni sistem, sistem za gašenje požara, sistem za prenos električne energije i tako dalje, do **bioloških sistema** kao što su sistem organa za varenje, sistem žlezda sa unutrašnjim lučenjem, nervni sistem, čulo vida, čulo sluha, mišićni sistemi, sistemi za regulaciju temperature kod ptica i tako dalje.

Dakle, mi ćemo se u ovom kursu baviti signalima i sistemima, mada je očigledno da među njima mnogo zajedničkih tačaka i preklapanja. Tradicionalno se ovim oblastima u elektrotehnici bave tehnika komunikacija i upravljanja, ali je opet granica između ove dve oblasti vrlo nejasna i fluidna. Dok komunikacioni signali moraju biti generisani od strane nekog sistema, dotle svaki upravljački sistem ima svoj ulazni i izlazni signal. Otuda je osnovna namera ovog kursa da predstavi osnovne koncepte i matematičke alate koji su od koristi za obe navedene oblasti. Kroz sledeće pitanje ćemo izvršiti osnovnu karakterizaciju signala i sistema i uvesti terminologiju koja će nam kroz kasnija poglavlja pomoći da se lakše razumemo.

## Pitanje 1: Osnovne karakteristike i podele signala i sistema

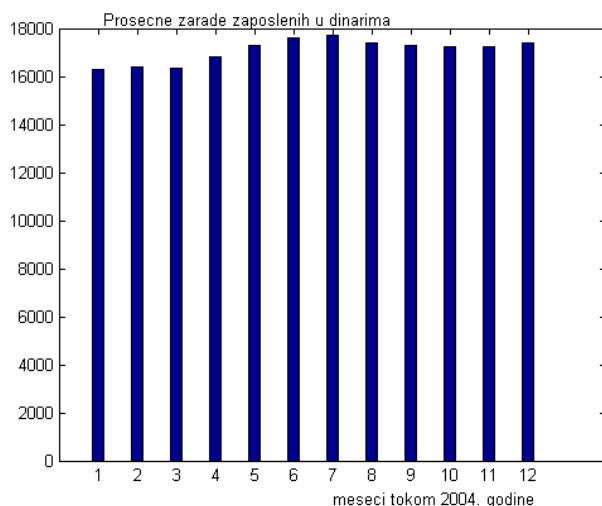
Kao prvi primer signala posmatrajmo dijagram prikazan na slici 1. On predstavlja izmerene padavine u Hidrometeorološkoj stanici "Karadorđev park" u Beogradu u periodu od 144 dana. Padavine su merene svakoga dana u ovom periodu i izražene su u milimetrima vodenog stuba. Ovakav dijagram (signal padavina) je od velikog značaja za veliki broj meteorologa jer im on pomaže da izvrše vremensku prognozu, inženjera poljoprivrede jer pomoću njega je moguće pratiti i predvideti razvoj biljnih kultura, važan je i za inženjere melioracija jer oni mogu pratiti i predvideti

nivo voda u rekama i kanalima za navodnjavanje i odvodnjavanje i tako dalje. Ako bi posmatrali ovaj dijagram padavina u mnogo dužem periodu, mogla bi se uočiti neka periodičnost u obliku signala jer jesen i proleće obiluju mnogo većim padavinama nego zima i leto, zatim bi se lako mogle uočiti sušne godine za razliku od vlažnih godina i tako dalje. Do ovih zaključaka se može doći raznoraznim tehnikama kao što su *usrednjavanje*, *filtracija*, *spektralna analiza* i slično.



Slika 1: Dijagram padavina u periodu od 144 dana

Posmatrajmo sada signal prikazan na slici 2 koji predstavlja prosečnu vrednost zarade zaposlenih van privrede u Republici Srbiji u periodu Januar-Decembar 2004. godine (podaci su izmišljeni).

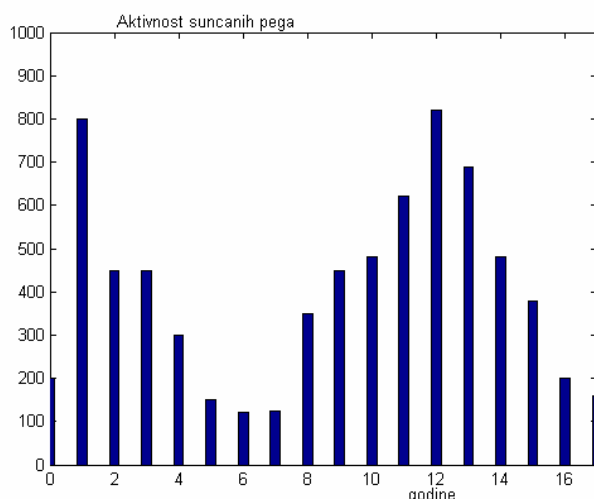


Slika 2: Prosečne zarada zaposlenih tokom 2004. godine

Ovakvi podaci su zanimljivi za ekonomske stručnjake, investitore, bankare i tako dalje, jer govore o ekonomskoj moći zaposlenih, njihovoj kreditnoj sposobnosti, ali istovremeno i stanju privrede, nezaposlenosti i tome slično. Sa ovog dijagrama se raznoraznim operacijama, kao što je na primer metod konačnih razlika, može sračunati da li postoji povećanje industrijske proizvodnje ili možda smanjenje javne potrošnje.

Treći primer je dijagram koji predstavlja aktivnost sunačnih pega na suncu. Na slici 3. je prikazana ova aktivnost tokom 18 godina merenja. Interesantno je da ova aktivnost na suncu jeste

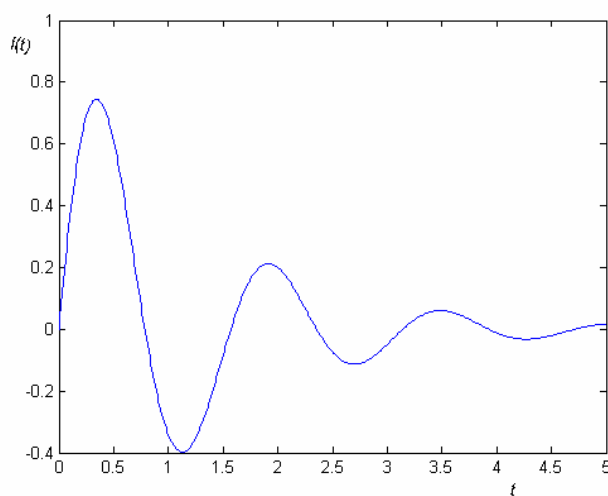
periodična promena, ona se dosta jasno prepoznaje sa prikazanog grafika, perioda se lako može sračunati kao i odstupanja od te periodičnosti.



Slika 3: Merenja aktivnosti sunčanih pega tokom perioda od 18 godina

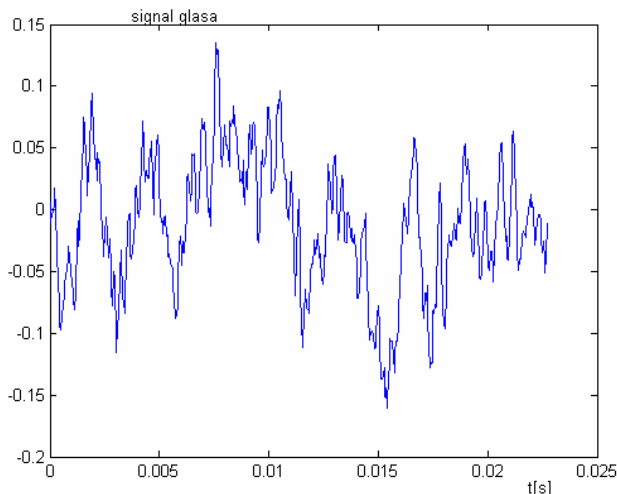
Sva tri gorenavedena primera signala imaju nešto zajedničko. Oni se nazivaju signalima koji su **diskretni u vremenu** (uobičajena oznaka za njih je DT signali od engleskih reči *Discrete-Time Signals*) jer su oni definisani samo u diskretnim vremenskim trenucima, kao što su sati, dani, meseci ili godine. Bez obzira na to što je vreme kontinualna funkcija, ovi signali su diskretni ili zbog toga što mi merenja vršimo u fiksnim intervalima vremena (primer je aktivnosti sunačnih pega koja se meri jednom godišnje mada bi, kada bi za to bilo uslova, mogla da se meri neprekidno) ili zbog toga što je po svojoj prirodi signal diskretan (na primer besmisleno je pitati kolika je prosečna mesečna zarada zaposlenih bila u četvrtak, dvanaestog novembra u 17 časova i 13 minuta).

Druga, široka klasa signala su oni signali koji su dostupni i merljivi u svakom vremenskom trenutku. Kako su ovi signali definisani u kontinualnom, neprekidnom intervalu vremena, takvi signali se zovu **kontinualni signali** (uobičajena oznaka za njih su CT signali od engleskih reci *Continuous-Time Signals*). Primer takvog signal je struja  $i(t)$ , prikazana na slici 4, koja se pojavljuje u jednoj od grana RLC kola kada se u trenutku  $t = 0$  na ovo kolo priključi izvor elektromotorne sile konstantnog napona  $V_0$ .



Slika 4: Struja u grani RLC kola

Sledeći primer kontinualnog signala je signal ljudskog glasa. Na slici 5 je prikazan audio signal koji je izdvojen iz pesme "Whit Flag", pevačice Dido. Ovaj signal je zapravo signal koji pokazuje kako se menja i vazdušni pritisak na membranu mikrofona, i otpornost prijemnika u mikrofona (ukoliko je u pitanju mikrofona sa promenljivom otpornošću), kao i naponski signal koji se generiše kao izlaz iz mikrofona, i uobičajeno je podvrgnut ograničenju da se mora nalaziti u intervalu  $[-1,1]$ .



Slika 5: Snimljeni ljudski glas

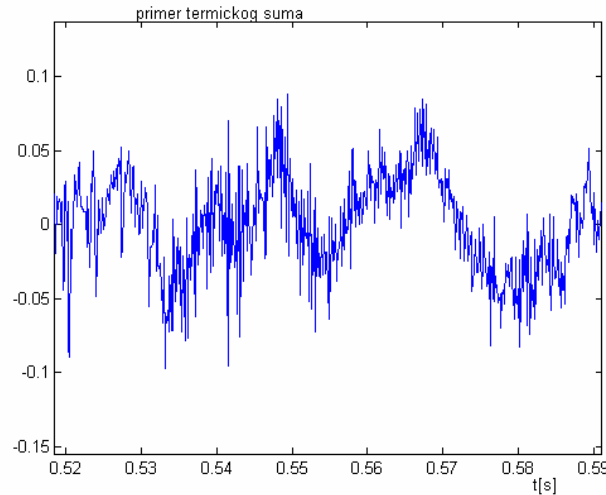
Prisetimo da je oblik ovog signala prilično periodičan jer se pikovi (izraženi maksimumi) u snimljenom glasu pojavljuju sa regularnim vremenskim intervalom. Ova pojava je logična s obzirom da vokalni trakt koji proizvodi glas u ljudskom grlu generiše vibracije koje se periodično ponavljaju. Do sličnih zaključaka možemo doći ukoliko posmatramo EKG (elektrokardiogram) rada zdravog ljudskog srca.

Postoji mnogo zajedničkih tačaka između kontinualnih i diskretnih signala u vremenu, ali zato postoje i mnoge, često suštinske razlike među njima. Zbog toga ćemo uvek jasno naznačiti o kakvom signalu govorimo, i pre nego što bilo koji matematički alat za analizu signala primenimo, moramo biti sigurni da je to i opravdano.

Osim podele na kontinualne i signale diskretne u vremenu, postoji podela na *determinističke* i *stohastičke* ili slučajne signale. Pod determinističkim signalima podrazumevamo one signale čija se vrednost sa nepogrešivom tačnošću može predvideti i u dalekoj budućnosti. Jedan jednostavan primer determinističkih signala jesu signali koji se analitički (drugim rečima pomoću nekog matematičkog izraza) definišu. Ako pogledamo signal  $x(t)$  definisanog pomoću sledeće jednakosti

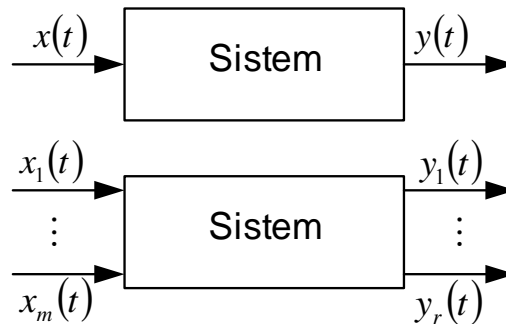
$$x(t) = e^{-0.02t} \sin(4t) \quad (1)$$

tada je moguće sračunati vrednost ovog signala u bilo kom vremenskom trenutku u budućnosti. Sa druge strane, ako pogledamo signal koji je snimljen kao izlazni napon sa mikrofona u potpunoj tišini, videće se da postoji signal male snage, koji očigledno nije posledica nekog zvuka, već procesa koji postoje svuda oko nas a mi ih ne možemo kontrolisati. Naime termičko kretanje molekula u svakoj materiji, kretanje molekula vazduha koje je zavisno od temperature, kretanje elektrona u svakoj provodnoj sredini su primeri takvih pojava, koji se, često zbog njihove direktne veze sa temperaturom, nazivaju termičkim šumovima. Primer takvog termičkog šuma (napon na izlazu iz mikrofona u potpunoj tišini) je prikazan na slici 6. Iako se na njemu primećuju osobine periodičnosti, to nije regularna osobina koja se može predvideti. Vrednost ovog signala u budućnosti se ne može prognozirati već se samo može sa nekom verovatnoćom izračunati interval u kome se taj signal može realizovati.



Slika 6: Primer termičkog šuma

Sa druge strane, u kontekstu ovog kursa, pod sistemom ćemo podrazumevati uređaj, proces ili algoritam koji za neki ulazni signal  $x(t)$ , na svom izlazu generiše izlazni signal  $y(t)$ , kako je to prikazano na slici 6.

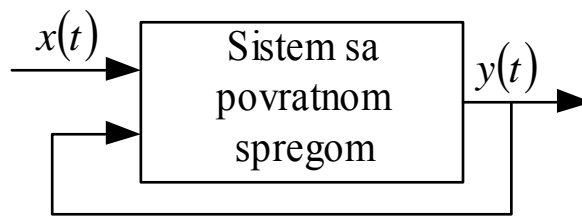


Slika 6: Predstava sistema sa jednim ili više ulaza i izlaza

Za sada podrazumevajmo da nezavisna promenljiva  $t$  može biti i kontinualna i diskretna. Moguće je da sistem ima i više ulaza i više izlaza, kao što je to prikazano na slici 6. Uobičajeno je da električni kontinualni sistemi (čiji su ulazni i izlazni signali kontinualne funkcije vremena) u sebi sadrže integratore, diferencijatore, množače, RLC kola, dok diskretni sistemi (koji operišu sa signalima diskretnim u vremenu) imaju kola za kašnjenje, akumulatore umesto integratora, elemente za računanje konačnih razlika umesto diferencijatora i tako dalje.

Po svojoj nameni sistemi mogu biti grubo podeljeni u nekoliko grupa. **Analizatori** su sistemi koji izdvajaju željenu informaciju iz signala i prikazuju je korisniku. **Sintetizatori**, sa druge strane, generišu željeni izlazni signal na svom izlazu. **Transdjuseri** ili pretvarači pretvaraju signal iz jedne fizičke forme u drugu (kao što su na primer mikrofoni koji pritisak na membranu mikrofona pretvaraju u naponski signal, ili termo-elementi koji temperaturu pretvaraju u električnu otpornost). **Komunikacioni kanali** kao što su koaksijalni kablovi, mikrotalasni vodovi, fiberoptički kablovi nose signal sa jedne na drugu lokaciju. **Filteri** modifikuju signal na odgovarajući način trudeći se da potisnu učianak neželjenih smetnji i šumova. **Kompenzatori** su specijalni filtri koji imaju za zadatak da izmene neželjene osobine nekih drugi sistema.

Posebnu klasu vrlo važnih sistema čine sistemi sa povratnom spregom (u engleskoj terminologiji se koristi reč *feedback* za povratnu spregu) koji se može koristiti u bilo kom od gorenavedenih tipova sistema. Struktura sistema sa povratnom spregom je prikazana na slici 7.



Slika 7: Struktura sistema sa povratnom spregom

U sistemima sa povratnom spregom se izlazni signal, ili signal dobijen na osnovu izlaznog, vraća kao dodatni ulazni signal u sistem. Osnovni cilj povratne sprege može biti da se ceo sistem stabilise, da se poveća njegov propusni opseg, da se uskladi željeno ponašanje, da se kontroliše izlazni signal ili nešto slično. Ovo je vrlo moćan koncept sa velikim brojem primena u elektronici, teoriji upravljanja i telekomunikacijama.

## Pitanje 2: Elementarni kontinualni signali

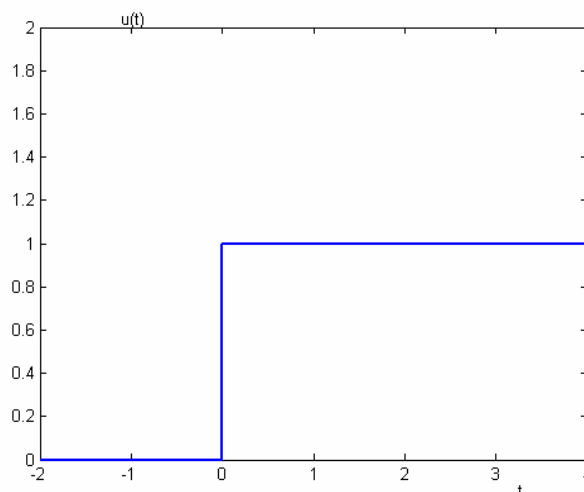
Mnogi od signala sa kojima se inženjeri sreću u svakodnevnoj praksi su po svojoj prirodi kontinualni u vremenu. Primeri takvih signala su napon, struja, snaga, pritisak, protok, zapremina, ugao, pomeraj, ubrzanje i tako dalje. I dok vremenski oblici ovih signala mogu biti vrlo komplikovani, postoje vremenski oblici koje je lako uočiti i matematički opisati. Vrlo često se i komplikovani vremenski oblici signala mogu prikazati linearnom kombinacijom elementarnih ili osnovnih kontinualnih vremenskih oblika.

### *Jedinična odskočna funkcija*

Ako kažemo da je signal  $x(t)$  signal kontinualan u vremenu (CT signal) to ne znači da je to kontinualna funkcija, već da je vreme  $t$  neprekidna, kontinualna nezavisna promenljiva. Važan primer za takvu vrstu signal je **jedinična odskočna funkcija** ili jedinični odskočni signal koji se uobičajeno obeležava kao  $u(t)$  i definiše na sledeći način:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ovaj signal je prikazan na slici 8.

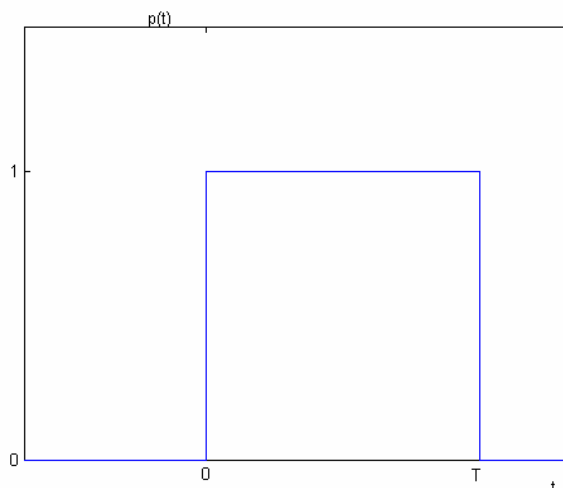


Slika 8: CT jedinična odskočna funkcija

U nekim udžbenicima se ova funkcija naziva **Hevisajdovom funkcijom** i označava kao  $h(t)$ . Primetimo da jedinična odskočna funkcija ima diskontinuitet za  $t = 0$  i da definicijom (2)  $u(0)$  nije ni definisano. Neki autori ovoj funkciji pridružuju u nuli vrednosti  $u(0) = 0$  ili  $u(0) = 1$  ili  $u(0) = 0.5$ , međutim primetimo da ni jedna od ovih definicija ne može promeniti diskontinuitet u toj tački, a sa druge strane sa aspekta gotovo svih analiza efekat je isti.

Jedinična odskočna funkcija je vrlo korisna jer se pomoću nje može definisati čitav skup drugih signala. Na primer, pravougaona četvrtka  $p(t)$  prikazana na slici 9, se jednostavno može predstaviti razlikom dve jedinične odskočne funkcije:

$$p(t) = u(t) - u(t - T), \quad T > 0 \quad (3)$$



Slika 9: CT pravougaona četvrtka

Primetimo da smo u relaciji (3) uveli takozvanu zakašnjenu jediničnu odskočnu funkciju  $u(t - T)$  koja ima vrednost 0 dok god je  $t - T < 0$ , odnosno  $t < T$ , i koja ima vrednost 1 dok je  $t - T > 0$ , odnosno  $t > T$ .

### Jedinična impulsna funkcija (Dirakov impuls)

Sledeći važan elementarni signal jeste **jedinični impuls**, često nazivan **Dirakovim impulsom**. Definiše se tako da zadovolji sledeća tri uslova:

1.  $\delta(t) = 0$  za  $t \neq 0$ .
2.  $\delta(t)$  nije definisana za  $t = 0$ .
3.  $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{ako je } t_1 < 0 < t_2 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$

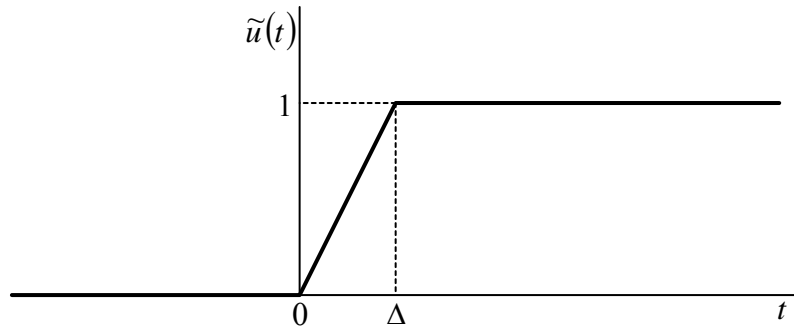
(4)

Na osnovu navedenih osobina možemo intuitivno osetiti da je jedinični impuls zapravo prvi izvod jedinične odskočne funkcije. Međutim, s obzirom da jedinična odskočna funkcije nije diferencijabilna za  $t = 0$ , ovakav iskaz matematički nije potpuno korektan. Ako bismo se ovim problemom pozabavili na rigorozan matematički korektan način, morali bi da se pomognemo teorijom generalizovanih funkcija, što prevazilazi okvire ovog kursa. Zato ćemo se zadovoljiti sledećim argumentima, koji su sa stanovišta inženjerske prakse sasvim zadovoljavajući. Naime, posmatrajmo signal  $\tilde{u}(t)$  koji je prikazan na slici 10. Jasno je da ovaj signal jeste neka

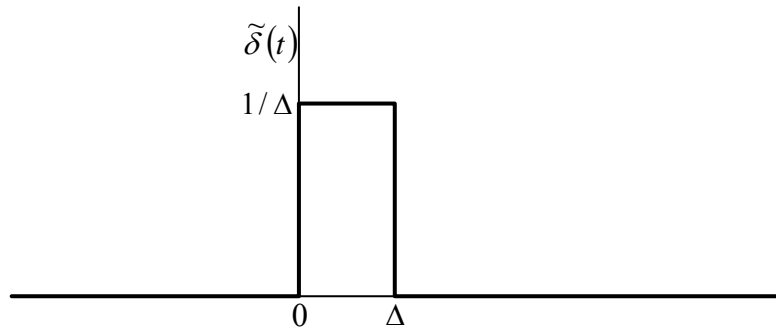
aproksimacija jedinične odskočne funkcije i da u graničnom slučaju kada  $\Delta \rightarrow 0$  ova dva signala postaju identična. Definišimo sada signal  $\tilde{\delta}(t)$  koji će biti prvi izvod signala  $\tilde{u}(t)$ , odnosno

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \quad (5)$$

Očigledno je da sada signal  $\tilde{\delta}(t)$  postaje aproksimacija Dirakovog jediničnog impulsa i on je prikazan slikom 11.



Slika 10: Aproksimacija jedinične odskočne funkcije



Slika 11: Aproksimacija jedinične impulsne funkcije (Dirakovog impulsa)

Primetimo da je površina ispod funkcije  $\tilde{\delta}(t)$  uvek jednaka 1, nezavisno od veličine parametra  $\Delta$  i da je vrednost signala jednaka nuli van intervala  $0 \leq t \leq \Delta$ . Kako su zadovoljene relacije:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{u}(t) = u(t) \quad (6)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{\delta}(t) = \delta(t) \quad (7)$$

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \quad (8)$$

u tom smislu možemo pisati da je

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (9)$$

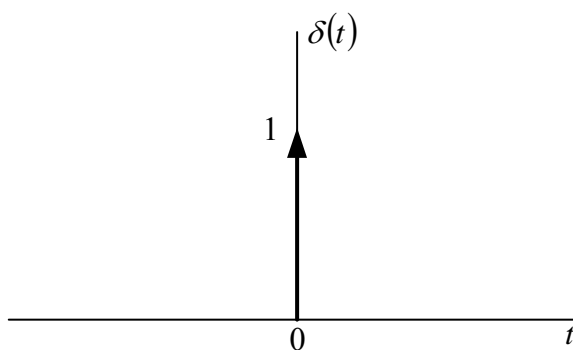
Potpuno ekvivalentno relaciji (9) možemo pisati odgovarajuću integralnu relaciju

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (10)$$

Dalje, dogovorimo se da jediničnu impulsnu funkciju (Dirakov impuls) grafički predstavljamo na način koji je prikazan slikom 12, pri čemu oznaka "1" na slici ne predstavlja vrednost signala u tački



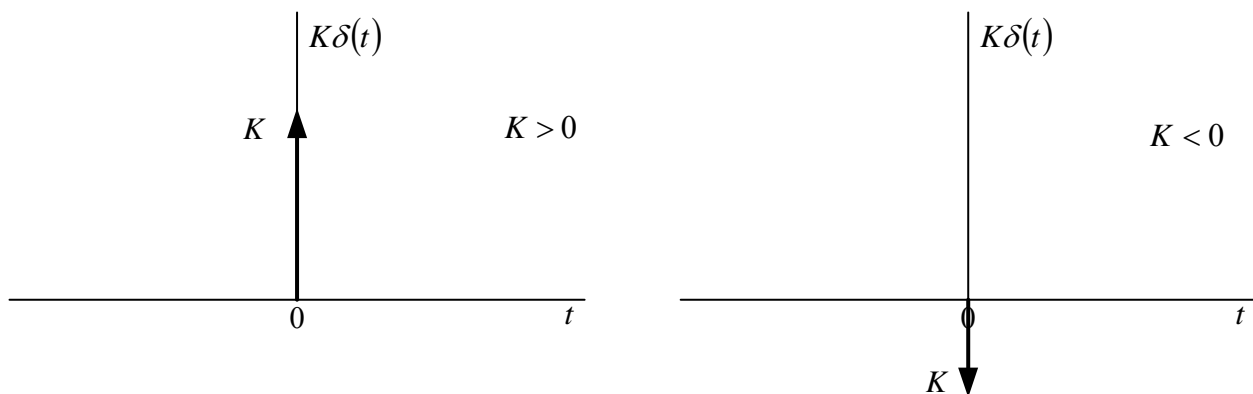
$t = 0$  već da je to vrednost površine koja se nalazi ispod ove funkcije (odnosno integral impulsne funkcije po celom prostoru nezavisne promenljive  $t$ ).



Slika 12: Grafički prikaz CT Dirakovog impulsa (CT jedinične impulsne funkcije)

### Osobine Dirakovog impulsa

Skalirani Dirakov impuls  $K\delta(t)$  jednostavno možemo posmatrati kao prvi izvod skalirane jedinične odskočne funkcije  $Ku(t)$  gde vrednost skaliranog impulsa iznosi  $K$  koji se u grafičkoj predstavi takvog signala označava na način prikazan slikom 13.

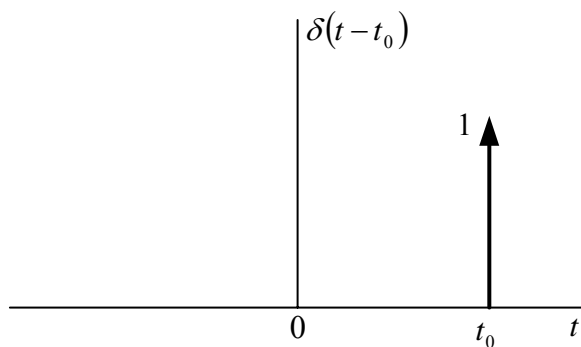


Slika 13: Skalirani Dirakov impuls za  $K > 0$  i  $K < 0$

Vrlo često ćemo analizirati signale koji se dobijaju proizvodom Dirakovog impulsa i neke druge proizvoljne funkcije  $x(t)$ :

$$y(t) = x(t)\delta(t - t_0) \quad (11)$$

gde smo iskoristili mogućnost da se Dirakov impuls može pomerati u vremenu za neki konačni interval  $t_0$  što rezultuje signalom prikazanim na slici 14.

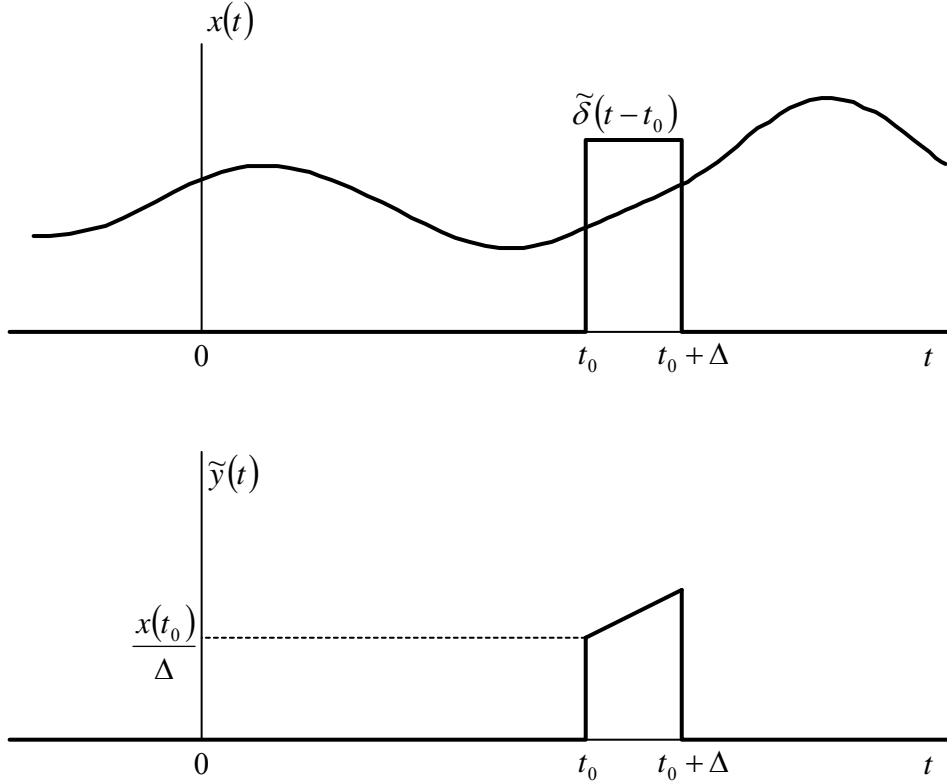


Slika 14: CT jedinična impulsna funkcija pomerena u vremenu za  $t_0$

Da bi interpretirali proizvod  $y(t)$  definisan jednačinom (11), ponovo se poslužimo aproksimacijom Dirakovog impulsa  $\tilde{\delta}(t)$  i pomoću njega formirajmo aproksimaciju signala  $y(t)$ :

$$\tilde{y}(t) = x(t)\tilde{\delta}(t - t_0) \quad (12)$$

Ovi signali su prikazani na slici 13.



Slika 13: Ilustracija aproksimacije proizvoda  $\tilde{y}(t) = x(t)\tilde{\delta}(t - t_0)$

Pretpostavimo da je funkcija  $x(t)$  neprekidna na intervalu  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta$  i da je interval  $\Delta$  dovoljno mali da možemo pretpostaviti da je signal  $x(t)$  približno konstantan u tom intervalu, tako da možemo pisati sledeću aproksimaciju

$$\tilde{y}(t) \approx x(t_0)\tilde{\delta}(t - t_0) \quad (13)$$

Ova je aproksimacija utoliko tačnija ukoliko je  $\Delta$  manje, a kako u graničnom slučaju kada  $\Delta \rightarrow 0$  funkcija  $\tilde{\delta}(t - t_0)$  konvergira ka funkciji  $\delta(t - t_0)$ , konačno možemo pisati:

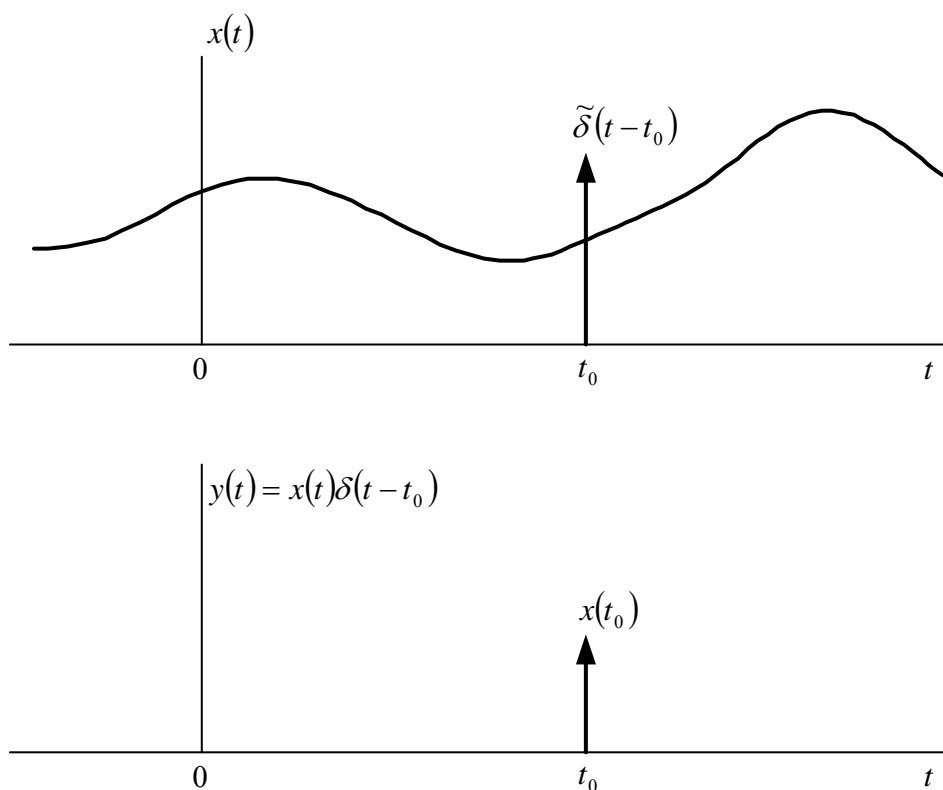
$$y(t) = x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (14)$$

To praktično znači da funkcija  $y(t)$  nije ništa drugo nego Dirakov impuls  $\delta(t - t_0)$  skaliran vrednošću signala  $x(t)$  u trenutku  $t = t_0$ . Ovi signali su ilustrovani na slici 14.

Jednostavna, ali vrlo korisna posledica ovog rezultata jeste sledeća relacija:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (15)$$

koja kaže da se integracijom signala  $y(t)$  po celom skupu nezavisne vremenske promenljive  $t$  može dobiti vrednost signala  $x(t)$  u trenutku  $t = t_0$ . Ova osobina se zove osobina pomeranja impulsne funkcije (ili u engleskoj literaturi *shifting property of the unit impulse*).



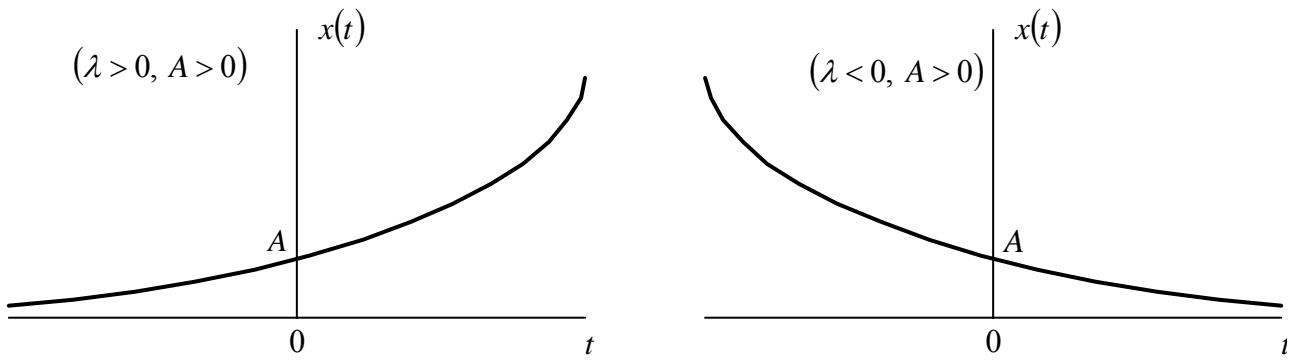
Slika 14: Ilustracija proizvoda signala  $y(t) = x(t)\delta(t - t_0)$

### ***Eksponecijalni signali***

Sledeća klasa vrlo važnih kontinualnih signala jeste klasa kompleksnih eksponecijalnih signala:

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (16)$$

gde u opštem slučaju parametri  $A$  i  $\lambda$  mogu biti kompleksni brojevi. Ukoliko su ovi parametri realni brojevi, onda se signal  $x(t)$  naziva realnom eksponecijalnom funkcijom ili signalom. Ukoliko je realni parametar  $\lambda$  pozitivan (slika 15) tada se za signal  $x(t)$  kaže da je eksponecijalno rastući. Eksponecijalno rastuća funkcija se koristi vrlo često da opiše neke prirodne pojave koje su po svojoj prirodi nestabilne. Sa druge strane, ako je realan parametar  $\lambda$  negativan, tada govorimo o eksponecijalno opadajućem signalu. Ovakva vrsta signala opisuje mnoge stabilne pojave u prirodi, kao što je na primer odziv RC ili RL kola, emisija nuklearnih čestica iz radioaktivnog materijala i tako dalje. U graničnom slučaju kada je parametar  $\lambda$  jednak nuli, signal  $x(t)$  postaje konstantan.



Slika 15: Realni eksponencijalni signali za pozitivne i negativne vrednosti parametra  $\lambda$

### **Sinusoidalni signali**

Drugi specijalan slučaj koji je vrlo interesantan je kada parametar  $\lambda$  uzme čistu imaginarnu vrednost:  $\lambda = j\omega_0$ . Tada signal  $x(t)$  postaje:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \quad (17)$$

gde se podrazumeva da je  $\omega_0$  realan broj. Za signal  $x(t)$  se kaže da je kompleksna sinusoida. Ako je  $A$  realan broj, primenom Ojlerove formule možemo dalje pisati:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + jA \sin(\omega_0 t) \quad (18)$$

Ukoliko je parametar  $A$  takođe kompleksan:  $A = |A|e^{j\phi}$ , tada signal  $x(t)$  postaje

$$x(t) = |A|e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} = |A|e^{j(\omega_0 t + \phi)} = |A|\cos(\omega_0 t + \phi) + j|A|\sin(\omega_0 t + \phi) \quad (19)$$

U bilo kom od ovih slučajeva, jasno je da je signal  $x(t)$  **periodičan signal**, odnosno da za svako  $t$  važi relacija:

$$x(t+T) = x(t) \quad (20)$$

gde je  $T$  odgovarajuća konstanta. Najmanja pozitivna (nenulta) konstanta  $T$  za koju važi relacija (20) se naziva periodom signala  $x(t)$ . Vrlo se lako dokazuje da je signal  $x(t)$  periodičan i izračunava njegova perioda na osnovu relacije (20):

$$x(t+T) = Ae^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 T} Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 t} = x(t) \quad (21)$$

odnosno

$$e^{j\omega_0 T} = 1 = e^{2k\pi j} ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

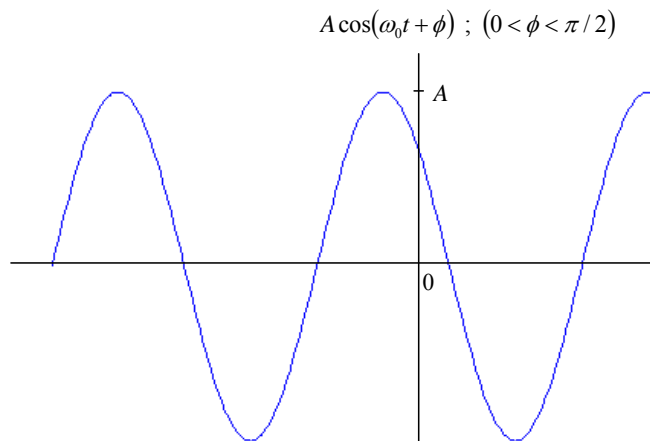
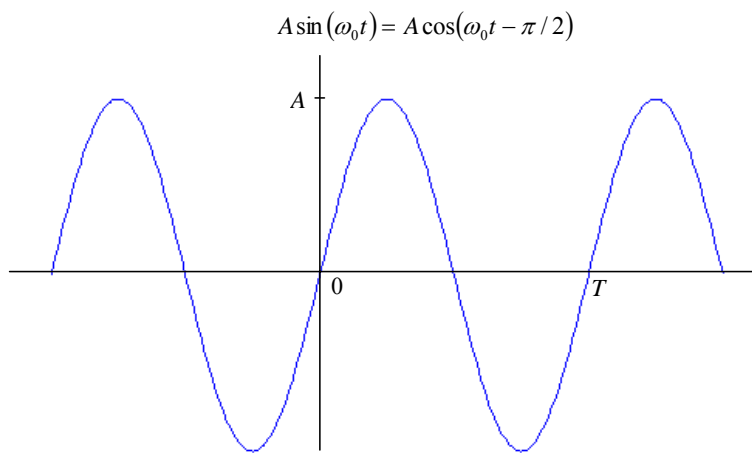
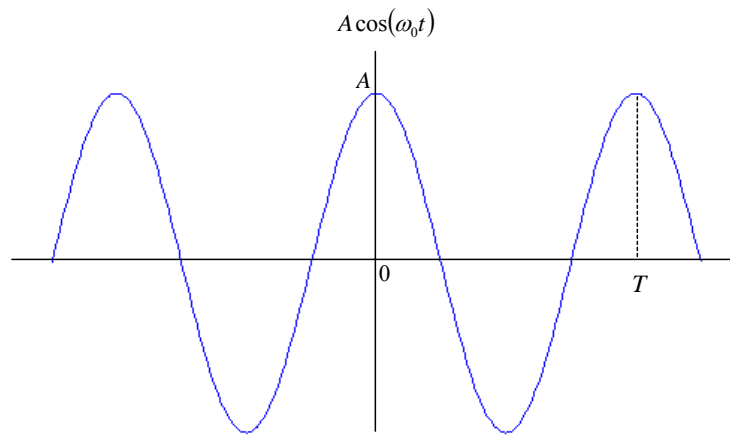
Kako za periodu  $T$  tražimo najmanju pozitivnu, nenultu vrednost koja zadovoljava poslednju relaciju, jednostavno dolazimo do sledeće jednakosti:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (23)$$

Realna sinusoida (realni deo kompleksne sinusoide definisane relacijom (19)) obično se piše u formi:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (24)$$

i prikazana je na slici 16. za različite vrednosti faze  $\phi$ .



Slika 16: Realne sinusoide za različite vrednosti faze  $\phi$

Dakle, realna sinusoida se može napisati kao realni deo kompleksne sinusoide

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \quad (25)$$

ili ekvivalentno

$$x(t) = \frac{A}{2} (e^{j(\omega_0 t + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)}) \quad (26)$$

Parametar  $\omega_0$  se naziva kružnom učestanošću (ili kružnom frekvencijom) i jedinica u kojoj se izražava je radijan u sekundi  $[rad/s]$ , a parametar  $\phi$  fazom signala (ili ponekad početnom fazom) i izražava se u radijanima  $[rad]$ . Vrlo često se kružna učestanost  $\omega_0$  predstavlja u formi  $\omega_0 = 2\pi f_0$

gde je  $f_0$  frekvencija ili učestanost i ona se izražava u hercima  $[Hz]$ . Njihova veza se periodom sinusoidalnog signala je:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{1}{|f_0|} \quad (27)$$

Primetimo da u imeniocima izraza (27) stoje apsolutne vrednosti, jer u generalnom slučaju kružna učestanost i frekvencija mogu biti i negativne, dok je po definiciji perioda  $T$  pozitivan realni broj.

U generalnom slučaju i parametar  $A$  i  $\lambda$  mogu biti kompleksni brojevi. Ako ih napišemo u formi:

$$A = |A|e^{j\phi} \quad (28)$$

i

$$\lambda = r + j\omega_0 \quad (29)$$

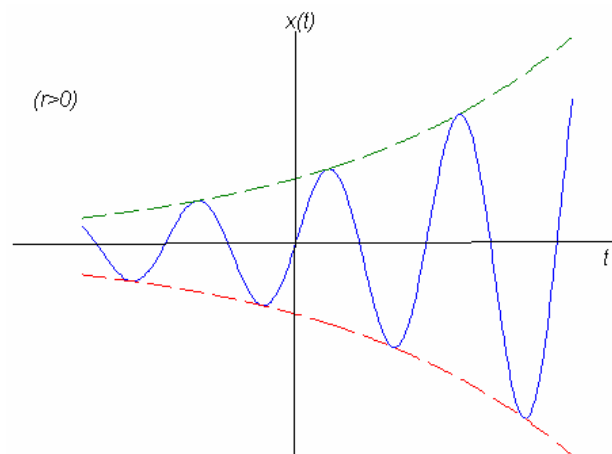
kompleksni sinusni signal postaje

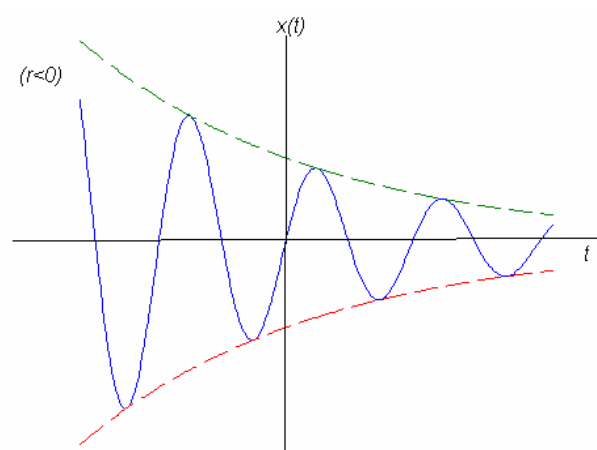
$$\begin{aligned} Ae^{\lambda t} &= |A|e^{j\phi}e^{(r+j\omega_0)t} = |A|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= |A|e^{rt}[\cos(\omega_0 t + \phi) + j\sin(\omega_0 t + \phi)] \end{aligned} \quad (30)$$

U poređenju sa izrazom (18), izraz (30) uvodi takozvani prigušujući faktor (u engleskom jeziku je to *damping factor*)  $e^{rt}$  koji eksponencijalno raste ako je  $r > 0$  ili eksponencijalno opada ako je  $r < 0$ . Signal koji sadrži realni deo signala definisanog preko relacije (30) glasi

$$\text{Re}\{Ae^{\lambda t}\} = |A|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (31)$$

a njegov oblik je prikazan na slici 17 za slučaj pozitivnog i negativnog  $r$ . Na ovoj slici su isprekidanim linijama prikazane takozvane *anvelope* signala  $\pm |A|e^{rt}$ . Signal koji ima negativno  $r$  se u literaturi označava kao prigušena sinusoida i često se pojavljuje analizama mehaničkih i električnih sistema.





Slika 17: Primer rastuće i prigušene sinusoide