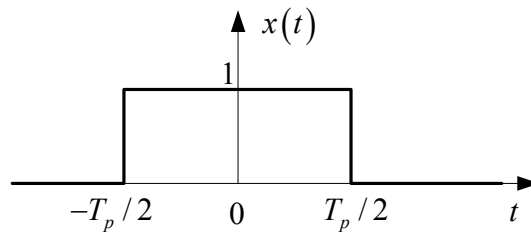


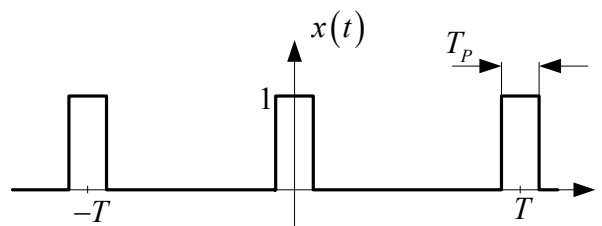
Pitanje 18: Fourier-ova transformacija kontinualnih signala

S obzirom na primenljivost Fourier-ovih redova u analizi periodičnih signala, bilo je vrlo važno razviti sličnu tehniku koja se može primenjivati i na signale koji nisu periodični. Posmatrajmo na primer aperiodičan signal, pravougaonu četvrtku širine T_p prikazanu na slici 7.1.



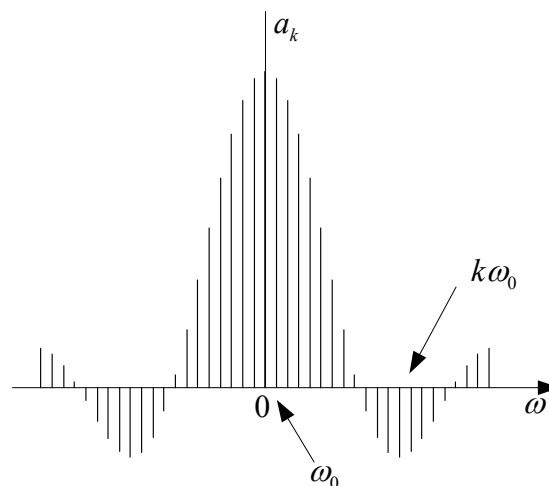
Slika 7.1: Primer aperiodičnog signala (pravougaona četvrtka)

Ovaj bi se signal mogao, u nekom graničnom slučaju smatrati periodičnim, pod pretpostavkom da njegova period T teži beskonačnosti. Zaista, ako pogledamo periodični signal prikazan na slici 7.2, pod pretpostavkom da $T \rightarrow \infty$, dobio bi se signal kao na slici 7.1.



Slika 7.1: Periodična povorka četvrtki

Tada se i njegov spektar (prikazan na slici 7.3) može smatrati graničnim slučajem spektra prikazanim na slici 6.3 (iz prethodnog predavanja), pri čemu ako perioda T teži beskonačnosti, onda odstojanje između učestanosti harmonika $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ postaje beskonačno malo, pa onda spektar, u tom graničnom slučaju postaje kontinualna funkcija promenljive ω .



Slika 7.3: Spektar signala sa slike 6.2 uz smenu $\omega = k\omega_0$

Shodno tome, definišemo novu skalu spektra $X(j\omega)$ uvodeći relaciju

$$X(jk\omega_0) = Ta_k \quad (7.1)$$

dozvoljavajući bilo koje vrednosti za k i ω_0 . Ako sa $x_T(t)$ označimo periodičnu povorku četvrtki sa slike 7.2, onda se ovaj signal može predstaviti Fourier-ovim redom na sledeći način:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (7.2)$$

ili, pošto je $T = 2\pi / \omega_0$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (7.3)$$

Kako perioda T teži beskonačnosti signal $x_T(t)$ sa slike 7.2 teži signalu $x(t)$ sa slike 7.1, a Fourier-ov red na desnoj strani jednakosti (7.3) umesto sume postaje integral, pri čemu $k\omega_0$ postaje kontinualna učestanost ω , dok član ω_0 postaje priraštaj učestanosti $d\omega$. Na taj način dobijamo dve izuzetno važne relacije koje definišu takozvanu *Fourier-ovu transformaciju*:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.4)$$

i

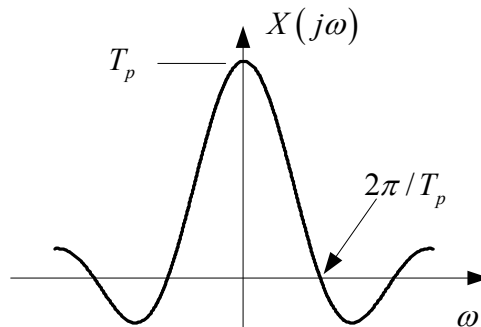
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.5)$$

Signal $x(t)$ i funkcija $X(j\omega)$ se nazivaju Fourier-ov transformacioni par, pri čemu se relacija (7.4) naziva sintetičkom jednačinom Fourier-ove transformacije a relacija (7.5) analitičkom jednačinom. Ove dve relacije su analogne relacijama (6.54) i (6.55) koje su definisale transformacioni par za Fourier-ov red u slučaju periodičnih signala.

Primer 7.1: Ako potražimo Fourier-ov transformacioni par za signal $x(t)$ prikazan na slici 7.1, potrebno je da sračunamo integral definisan relacijom (7.5):

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T_p/2}^{T_p/2} \\ &= \frac{e^{j\omega T_p/2} - e^{-j\omega T_p/2}}{j\omega} = \frac{2 \sin(\omega T_p / 2)}{\omega} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Prikaz funkcije $X(j\omega)$ se uobičajeno naziva spektrom signala $x(t)$ i on je dat na slici 7.4.



Slika 7.4: Spektar signala sa slike 7.1

Uobičajena oznaka za funkciju oblika $\sin(z)/z = \text{sinc}(z)$ pa se često spektar iz jednačine (7.6) predstavlja u obliku

$$X(j\omega) = T_p \text{sinc}\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) \quad (7.7)$$

Primetimo još da se prvi presek spektruma $X(j\omega)$ sa ω osom dešava na učestanosti $\omega = 2\pi/T_p$. Ovaj rezultat demonstrira poznati princip neodređenosti (*Heisenberg*-ov princip neodređenosti) po kome se vidi da su dužina trajanja signala i njegov propusni opseg (širina spektra) obrnuto proporcionalni.

Konvergenција Fourier-ove transformacije

S obzirom da smo Fourier-ovu transformaciju izveli iz Fourier-ovih redova, logično bi bilo očekivati da su uslovi konvergenције i jedne i druge transformacije vrlo slični, što i jeste slučaj. Pretpostavimo da smo krenuli od signala $x(t)$ i da smo na osnovu relacije (7.5) sračunali njegov transformacioni par $X(j\omega)$ a da smo onda primenom relacije (7.4) sračunali signal $\hat{x}(t)$ koji, generalno govoreći, nije identičan početnom signalu $x(t)$ i da između njih postoji razlika ili greška definisana na sledeći način:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (7.8)$$

Opet u želji da meru sličnosti ova dva signala izrazimo kroz jedan kvantitativni pokazatelj, uvedimo takozvanu totalnu energiju signala e na sledeći način:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \quad (7.9)$$

Reći ćemo da Fourier-ova transformacija konvergira ako je $E=0$. Opet, to ne znači da je $x(t) = \hat{x}(t)$ za svako t , već da je energija signala razlike između signala $x(t)$ i $\hat{x}(t)$ jednaka nuli. Postoje dva dovoljna uslova i ako signal $x(t)$ zadovolji bar jedan od njih, tada je uslov konvergenције zadovoljen.

1. uslov: Ako je kvadrat signala $x(t)$ integrabilan, odnosno ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (7.10)$$

tada Fourier-ova transformacija konvergira. Ovaj uslov je ekvivalentan zahtevu da signal ima konačnu energiju.

2. uslov: Ovo je takozvani *Dirichlet*-ov uslov i on zahteva da signal bude absolutno integrabilan, odnosno da bude zadovoljena relacija

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (7.11)$$

tada je, osim u nekoliko devijantnih slučajeva, takođe obezbeđena konvergenција Fourier-ove transformacije. Ovi specijalni, ili često nazivani patološki slučajevi se jednostavno eliminišu sa dva dodatna zahteva koje signal mora da ispuni. Prvi od njih je da signal $x(t)$ ima konačan broj minimuma i maksimuma u bilo kom konačnom intervalu, a drugi je da u bilo kom konačnom intervalu vremena postoji konačan broj prekida sa konačnim graničnim vrednostima sa obe

strane tih prekida. Ukoliko su ovi Dirichlet-ovi uslovi zadovoljeni, imaćemo slučaj da je $x(t) = \hat{x}(t)$ za svako t osim u tačkama prekida. U tačkama prekida Fourier-ova transformacija će težiti srednjoj vrednosti graničnih vrednosti sa obe strane diskontinuiteta.

Primer 7.2: Ako posmatramo Dirakov signal $x(t) = \delta(t)$, on ne zadovoljava prvi uslov, jer njegov kvadrat nije ni definisan u nuli, ali zato ovaj signal jeste apsolutno integrabilan i pri tome zadovoljava dodatna dva Dirichlet-ova uslova, pa njegova Fourier-ova transformacija konvergira. Njegov transformacioni par je:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (7.12)$$

Zanimljivo je da je Fourier-ova transformacija Dirakovog impulsa konstantna za svaku učestanost. Ovom rezultatu se može dati sledeće fizičko tumačenje: u sintetičkoj relaciji frekvencijske komponente koje čine signal $X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega / 2\pi$ se pojavljuju sa istom amplitudom za svako ω . Istovremeno je i Heisenberg-ov princip neodređenosti zadovoljen, jer signalu koji traje beskonačno kratko vreme odgovara beskonačno širok spektar.

Primer 7.3: Posmatrajmo kauzalni realni eksponencijalni signal

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad (7.13)$$

Lako se pokazuje da za $a < 0$ ni jedan od uslova za konvergenciju Fourier-ove transformacije nije zadovoljen, dok je za $a > 0$ signal $x(t)$ i apsolutno i kvadratno integrabilan, pa shodno tome Fourier-ov transformacioni par $X(j\omega)$ konvergira. Ukoliko želimo da odredimo Fourier-ovu transformaciju treba da rešimo sledeći integral:

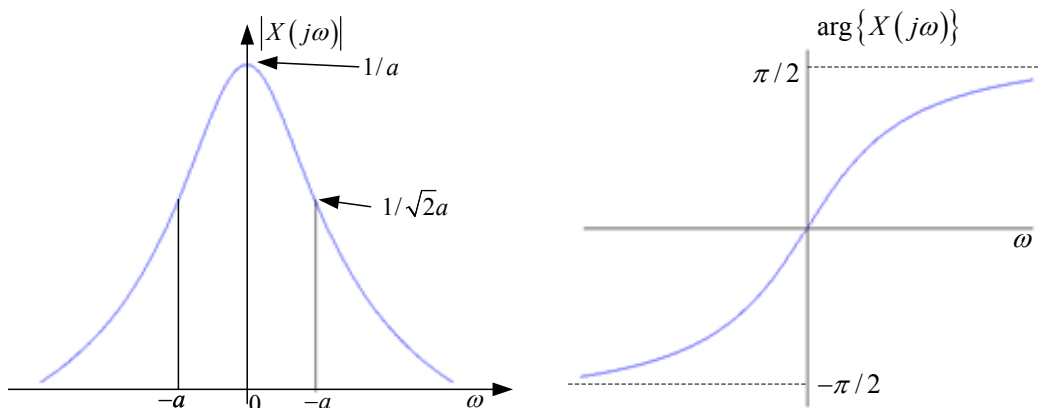
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-(a + j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega} ; \quad a > 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Uobičajeno je da se odvojeno posmatraju amplituda i faza (argument) Fourier-ove transformacije, i oni u ovom slučaju glase:

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (7.15)$$

$$\arg\{X(j\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (7.16)$$

Ove dve funkcije od učestanosti su prikazane na slici 7.5.



Slika 7.5: Amplituda i faza spektra signala $x(t) = e^{-at}u(t)$

Uobičajeno je da se za propusni opseg signala uzima ona učestanost na kojoj je amplituda $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne amplitude. U našem slučaju je to učestanost $\omega = a$ i pri tome je vremenska konstanta signala $x(t)$ jednaka $1/a$, što znači da je opet zadovoljen Heisenberg-ov princip neodređenosti.

Primer 7.4: Posmatrajmo signal čija je Fourier-ova transformacija data u formi:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_b \\ 0, & |\omega| > \omega_b \end{cases} \quad (7.17)$$

što predstavlja pravougaonu četvrtku, ali u frekvencijskom domenu. Primenjujući sintetičku jednačinu, možemo videti kakvom signalu u vremenskom domenu odgovara ovaj transformacioni par:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} (1) e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\omega_b t}}{2\pi j t} \Big|_{-\omega_b}^{\omega_b} = \frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{2\pi j t} = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} \quad (7.18)$$

Poslednji rezultat možemo izraziti pomoću već definisane sinc funkcije:

$$x(t) = \frac{\omega_b}{\pi} \text{sinc}(\omega_b t) \quad (7.19)$$

Ovaj primer je vrlo zanimljiv jer ukazuje na takozvani princip *dualnosti* koji postoji između signala u vremenskom i frekvencijskom domenu. Na početku ovog predavanja smo posmatrali signal koji je definisan kao pravougaona četvrtka u vremenskom domenu i došli smo do zaključka da je njegov Fourier-ov transformacioni par u obliku sinc funkcije. Sada smo posmatrali signal čiji je transformacioni par u frekvencijskom domenu dat u obliku pravougaone četvrtke i ispostavilo se da je takav signal u vremenskom domenu u obliku sinc funkcije. Ovakav zaključak i nije iznenađujući, s obzirom na to da su sintetička i analitička jednačine i Fourier-ovog reda i Fourier-ove transformacije gotovo identične, jedine razlike se pojavljuju u multiplikativnim konstantama i u znaku u eksponenta $e^{j\omega t}$ odnosno $e^{-j\omega t}$ podintegralne funkcije.

Fourier-ova transformacija periodičnih signala

Do sada smo prošli kroz dve različite Fourier-ove reprezentacije kontinualnih signala. Videli smo da se Fourier-ov red može primeniti na signale koji su periodični, dok je Fourier-ova transformacija primerena aperiodičnim signalima. Bez obzira što su obe od ovih transformacija jednako važne i primenjive, uobičajeno je da se među njima ne pravi razlika, pogotovo ne u smislu razdvajanja u primeni. Recimo, ako imamo signal koji se može napisati kao zbir jedne periodične i jedne aperiodične komponente, besmisleno je posebno primenjivati Fourier-ov red na periodičnu a Fourier-ovu transformaciju na aperiodičnu komponentu, i onda dobijene rezultate analizirati odvojeno. Na svu sreću, lako se pokazuje da se Fourier-ova transformacija može primeniti i na periodične signale. Striktno govoreći, ovakva generalizacija ili proširenje Fourier-ove transformacije na periodične signale zahteva jednu dodatku rigoroznu matematičku analizu, jer periodični signali uglavnom ne zadovoljavaju uslove navedene za konvergenciju Fourier-ove transformacije, međutim, ovde ćemo tu vrstu diskusije preskočiti jer nije od prevelikog značaja u primeni.

Pretpostavimo da nam je dat transformacioni par nekog signala u formi

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (7.20)$$

Ako želimo da vidimo kom signalu $x(t)$ odgovara ovakav transformacioni par, primenimo sintetičku jednačinu:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t} \quad (7.21)$$

što je očigledno periodičan signal (kompleksna sinusoida učestanosti ω_0). Ako idemo dalje, pa pretpostavimo da je transformacioni par predstavljen beskonačnim zbirom Dirakovih impulsa u frekvencijskom domenu, na sledeći način:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (7.22)$$

dobićemo da takav par odgovara sledećem signalu u vremenskom domenu:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (7.23)$$

što predstavlja Fourier-ov red proizvoljnog periodičnog signala sa periodom $T = 2\pi / \omega_0$. Shodno tome možemo zaključiti da se Fourier-ova transformacija može primeniti i na periodične signale i da će u tom slučaju odgovarajuća frekvencijska funkcija uvek imati formu povorke Dirakovih impulsa na učestanostima $k\omega_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i sa intenzitetima a_k koji bi se dobili iz Fourier-ovog reda.

Pitanje 19: Osobine i primena Fourier-ove transformacije

Fourier-ova transformacija ima čitav niz osobina, koja omogućava da se brzo, bez nekog preteranog računa skiciraju spektri velikog broja često sretanih signala. Istovremeno, značajna primena Fourier-ove transformacije se ogleda u jednostavnom razumevanju i projektovanju sistema za *modulaciju, odabiranje i filtraciju signala*.

Uobičajena oznaka koja se koristi da se naglasi da vremenski signal $x(t)$ i frekvencijska funkcija $X(j\omega)$ jesu transformacioni par, jeste sledeća:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad (7.24)$$

pri čemu je

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.25)$$

i

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.26)$$

Tako na osnovu prethodnih primera možemo pisati:

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad (7.27)$$

za a veće od nule, ili

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (7.28)$$

Linearnost Fourier-ove transformacije

Linearnost Fourier-ove transformacije se ogleda u tome da ako signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ imaju svoje transformacione parove $X_1(j\omega)$ i $X_2(j\omega)$, tada će važiti:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega) \quad (7.29)$$

Primetimo da su u ovoj osobini ponovo sadržana svojstva homogenosti i aditivnosti. Ovo se svojstvo jednostavno dokazuje i može se proširiti na proizvoljni broj sabiraka.

Pomeranje u vremenu

Drugo važno svojstvo Fourier-ove transformacije se sastoji u tome da ako znamo transformacioni par $X(j\omega)$ signala $x(t)$, onda se transformacioni par signala koji je pomeren u vremenu $x(t-t_0)$ vrlo lako sračunava na sledeći način:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (7.30)$$

U poslednjoj relaciji smo uveli oznaku $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ koja se često koristi u literaturi. Ako sada izvršimo smenu promenljivih $t-t_0 = \tau$ u integralu (7.30) on postaje

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (7.31)$$

Shodno tome, možemo pisati relaciju

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (7.32)$$

Ako transformacioni par $X(j\omega)$ napišemo u polarnim koordinatama

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\Theta(\omega)} \quad (7.33)$$

iz relacije (7.32) zaključujemo da je

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j(\Theta(\omega)-\omega t_0)} \quad (7.34)$$

što znači da vremensko kašnjenje ne utiče na amplitudu spektra signala već se ogleda samo u faznoj karakteristici i to tako što se ona umanjuje za vrednost ωt_0 . Ova se činjenica obično u literaturi naziva *linearnim pomeranjem faze* (u engleskoj literaturi je odgovarajući termin *linear phase shift*) Fourier-ove transformacije.

Modulacija

Ukoliko vremenski signal $x(t)$ pomnožimo kompleksnom sinusoidom $e^{j\omega_0 t}$, taj postupak se naziva *kompleksnom modulacijom*. Lako se pokazuje da je onda u važnosti sledeća relacija

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0)) \quad (7.35)$$

odnosno da kompleksnoj modulaciji u vremenskom domenu odgovara pomeranje po učestanosti u frekvencijskom domenu. Dakle, opet je prisutan princip dualnosti jer smo u prethodnom izlaganju pokazali da modulaciji u frekvencijskom domenu odgovara pomeranje u vremenskom domenu.

Primer 7.5: Jedan od često korišćenih metoda modulacije u telekomunikacijama je amplitudska modulacija. Zamislamo da smo od nekog korisnog signala $x(t)$ dobili modulisani signal $y(t)$ na sledeći način:

$$y(t) = [x(t) + B] \cos(\omega_c t + \phi) \quad (7.36)$$

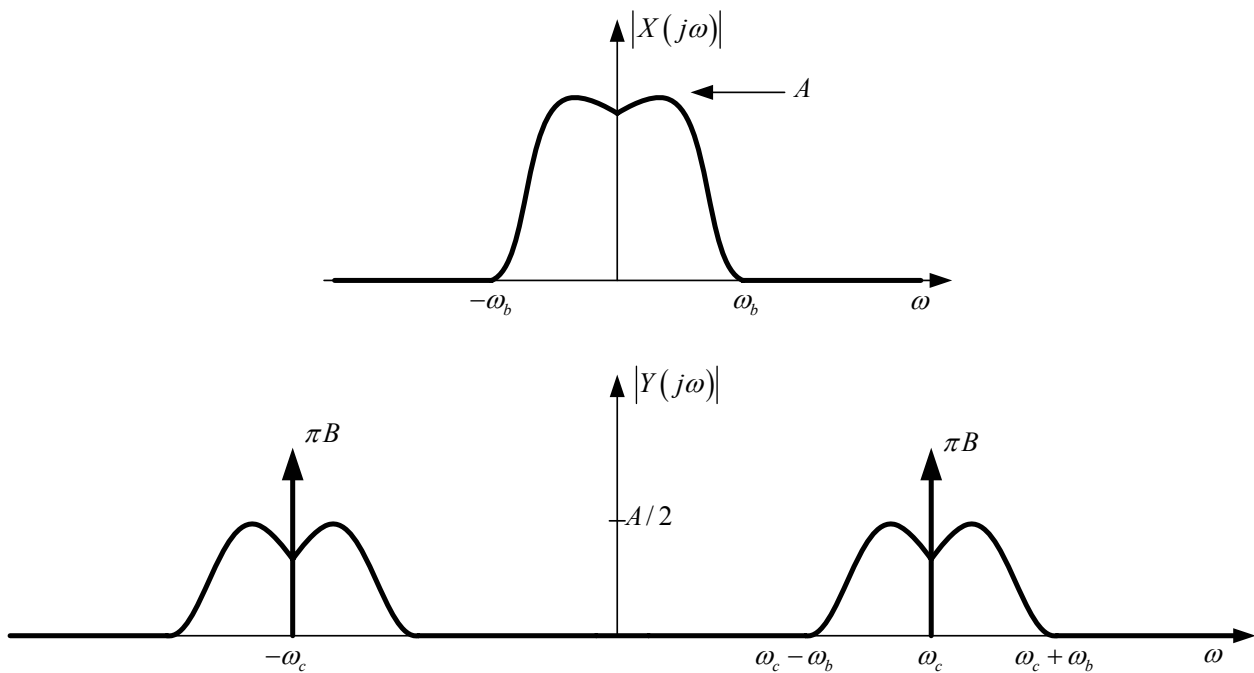
Parametar B se obično označava kao bajes ili pomeraj, signal modulacije $\cos(\omega_c t + \phi)$ se naziva noseći signal (*carrier signal*) a učestanost ω_c noseća učestanost (*carrier frequency*). Ako modulisani signal $y(t)$ napišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} [x(t) + B] [e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}] \\ &= \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_c t} + \frac{1}{2} B e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2} B e^{-j\omega_c t} \end{aligned} \quad (7.37)$$

znajući spektar originalnog signala, lako se dolazi do oblika spektra modulisanog signala, jer je na osnovu (7.37)

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} X(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + \omega_c)) + \pi B \delta(\omega - \omega_c) + \pi B \delta(\omega + \omega_c) \quad (7.38)$$

Primer ovih spektara dat je na slici 7.6.



Slika 7.6: Spektri osnovnog i modulisanog signala

U cilju rekonstrukcije osnovnog signala na osnovu modulisanog, vrši se postupak demodulacije, međutim, analiza ovog postupka izlazi iz okvira ovog kursa.

Skaliranje po vremenu i učestanosti

Posmatrajmo sada vremenski kontinualan signal koji je skaliran u vremenu $x(at)$ gde je a realan parametar. Tada je odgovarajući Fourier-ov transformacioni par

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \quad (7.39)$$

Nakon uvođenja smene promenljive $at = \tau$, dobija se

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau/a} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (7.40)$$

ako je a pozitivno, i

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau/a} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (7.41)$$

ako je a negativno. Kombinujući poslednja dva izraza, definitivno možemo napisati

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (7.42)$$

odakle zaključujemo da se skala faktor a u vremenskom domenu ima za posledicu skala faktor $1/a$ u frekvencijskom domenu pri čemu se ceo transformacioni par deli koeficijentom $|a|$. Primetimo da je ovaj rezultat potpuno u saglasnosti sa Heisenberg-ovim principom neodređenosti: širenje signala u vremenu dovodi do sužavanja spektra po frekvenciji i obrnuto. Kao posledicu navedene osobine, zanimljiv je specijalan slučaj $a=-1$:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega) \quad (7.43)$$

Diferenciranje i integraljenje signala

Ukoliko krenemo od sintetičke jednačine i izvršimo diferenciranje njene leve i desne strane, dobija se sledeća jednakost:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d e^{j\omega t}}{dt} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.44)$$

i shodno tome zaključujemo da su signali $dx(t)/dt$ i $j\omega X(j\omega)$ transformacioni par:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \quad (7.45)$$

Drugim rečima, diferenciranje u vremenskom domenu za posledicu u frekvencijskom domenu ima množenje sa $j\omega$. Ovo je važan rezultat koji će se kasnije često koristiti. Kako je integracija obrnuti proces od integraljenja, logično je očekivati da integracija u vremenskom domenu za posledicu ima deljenje članom $j\omega$ u frekvencijskom domenu. To je bezmalo tačno, naime postoji još jedan dodatni član o kome treba voditi računa. Pođemo li opet od sintetičke jednačine i integralimo obe strane, dobićemo sledeću relaciju:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \quad (7.46)$$

Možda se drugi sabirak u poslednjoj jednačini na desnoj strani čini nelogičnim, ali nije tako. Od kada smo definisali Fourier-ov red a zatim i transformaciju, uglavnom smo operisali sa

eksponencijalnim signalima, i ukoliko signal $x(t)$ ima dc (srednju vrednost) koja nije jednaka nuli, nakon integraljenja tog signala dobija se kao jedna od komponenti usponska funkcija koja se ni na koji način ne može napisati u obliku eksponencijalne funkcije. Sa druge strane, ukoliko originalni signal ima dc vrednost, nakon njenog integraljenja dobija se signal koji ne zadovoljava ni jedan od uslova konvergencije Fourier-ove transformacije. Do relacije (7.46) može se doći eksgzaktno ukoliko krenemo od Fourier-ovog reda, pa izvršimo integraciju periodičnog signala, a zatim pustimo da T (perioda signala) teži beskonačnosti. Na ovom mestu, dovoljno je da zapamtimo da ukoliko signal $x(t)$ ima dc vrednost, njegovom integralu odgovaraju u frekvencijskom domenu dva sabirka od kojih je jedan $X(j\omega)/j\omega$ a drugi potiče od dc vrednosti i iznosi $\pi X(0)\delta(\omega)$.

Dualno dobijenim osobinama, možemo se pitati kakvom signalu u vremenskom domenu odgovara Fourier-ov transformacioni par $dX(j\omega)/d\omega$. Polazeći od analitičke jednačine Fourier-ove transformacije, dobiće se relacije koje su potpuno analogne relacijama (7.45) i (7.46) i one glase:

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \quad (7.47)$$

i

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)d\lambda \quad (7.48)$$

Primer 7.6: Ukoliko poželimo da odredimo Fourier-ov transformacioni par jedinične odskočne funkcije $u(t)$, shvatićemo da ona ne zadovoljava ni jedan od uslova konvergencije Fourier-ove transformacije, pa formalno frekvencijska funkcija ne postoji. Međutim, ukoliko se poslužimo rezultatom iz prethodne analize, možemo reći sledeće: jedinična odskočna funkcija je integral Dirakovog impulsa i shodno tome možemo pisati:

$$\delta(t) \leftrightarrow \Delta(\omega) = 1 \quad (7.47)$$

odnosno

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t) \leftrightarrow \frac{\Delta(j\omega)}{j\omega} + \pi\Delta(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (7.48)$$

Vrlo lako možemo da proverimo dobijeni rezultat. Znajući da jedinični odskočni signal ima jednosmernu komponentu $a_0 = 1/2$, očigledno će u Furier-ovoj transformaciji da se pojavi član $2\pi a_0\delta(\omega) = \pi\delta(\omega)$ što i jeste dobijeni rezultat.

Konvolucija signala

Već smo naučili da ako se na ulaz LTI kontinualnog sistema sa impulsnim odzivom $h(t)$ dovede signal $x(t)$, odziv sistema $y(t)$ se može sračunati kao konvolucija impulsnog odziva i ulaznog signala. Ako pokušamo da odredimo Fourier-ovu transformaciju odziva, dobićemo sledeću relaciju:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \quad (7.49)$$

Ako u poslednjoj relaciji zamenimo mesta integralima i iskoristimo identitet $e^{-j\omega t} = e^{-j\omega(t-\tau)}d^{-j\omega\tau}$, dobija se

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.50)$$

Konačno, ako u unutrašnjem integralu izvršimo smenu promenljivih $t - \tau = \lambda$, dobijamo konačan rezultat

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) X(j\omega) \quad (7.51)$$

što drugim rečima znači da ako dva signala ulaze u konvoluciju, tada se njihove Fourier-ove transformacije množe:

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega) \quad (7.52)$$

Množenje signala u vremenskom domenu

Ako smo videli da konvolucija signala u vremenskom domenu proizvodi množenje njihovih transformacionih parova u frekvencijskom domenu, za očekivati je da množenje signala u vremenskom domenu rezultuje konvolucijom u frekvencijskom domenu, i to je tačno. Naime, lako se dokazuje sledeća relacija:

$$x(t)p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega)P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda)P(j(\omega-\lambda))d\lambda \quad (7.53)$$

Simetričnost signala

Posmatrajmo slučaj kada želimo da izračunamo Fourier-ov transformacioni par signala $x^*(t)$ koji je konjugovano kompleksan u odnosu na signal $x(t)$. Tada možemo pisati:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right]^* = X^*(-j\omega) \quad (7.54)$$

što znači da se konjugovano kompleksnost u vremenskom domenu prenosi kao konjugovano kompleksnost u frekvencijskom domenu s tim što se menja znak kompleksne varijable, odnosno

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega) \quad (7.55)$$

Ako je pak signal $x(t)$ realan, tada je $x(t) = x^*(t)$ pa se dolazi do jednakosti

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega) \quad (7.56)$$

Poslednja relacija znači da je Fourier-ova transformacija realnih signala *konjugovano-simetrična* funkcija učestanosti ω . Primetimo da smo sličan rezultat dobili kod Fourier-ovog reda za slučaj realnih signala: $a_k = a_{-k}^*$.

Ako sada Fourier-ovu transformaciju napišemo u formi zbira realnog i imaginarnog dela:

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j \text{Im}\{X(j\omega)\} \quad (7.57)$$

na osnovu (7.56) možemo pisati

$$\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \quad (7.58)$$

i

$$\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \quad (7.59)$$

što znači da je $\text{Re}\{X(j\omega)\}$ parna funkcija a $\text{Im}\{X(j\omega)\}$ neparna funkcija učestanosti. Sličan rezultat se dobija ukoliko se Fourier-ov transformacioni par predstavi u polarnim koordinatama:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\Theta(\omega)} \quad (7.60)$$

Tada je

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad (7.61)$$

$$\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega) \quad (7.62)$$

odnosno, moduo je parna a faza neparna funkcija učestanosti.

Sada pretpostavimo da smo realni signal $x(t)$ dekomponovali u zbir njegovog parnog i neparnog signala:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (7.63)$$

gde je

$$x_e(t) = Ev\{x(t)\}; x_o = Od\{x(t)\} \quad (7.64)$$

Ako sada sračunamo Fourier-ovu transformaciju signala $x_e(-t)$:

$$\mathcal{F}\{x_e(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x_e(t)\} \quad (7.65)$$

Međutim, znajući da je $x_e(-t) = x_e(t)$, lako zaključujemo da je $\mathcal{F}\{x_e(t)\} = \{\mathcal{F}\{x_e(-t)\}\}^*$, što znači da Fourier-ova transformacija $\mathcal{F}\{x_e(t)\}$ mora biti čisto realna funkcija. Potpuno analognim zaključivanjem se dolazi do rezultata da Fourier-ova transformacija $\mathcal{F}\{x_o(t)\}$ mora biti čisto imaginarna funkcija, što nas dovodi do sledeće dve relacije:

$$Ev\{x(t)\} \leftrightarrow \text{Re}\{X(j\omega)\} \quad (7.66)$$

$$Od\{x(t)\} \leftrightarrow \text{Im}\{X(j\omega)\} \quad (7.67)$$

Važan zaključak ove analize je da parni signali imaju Fourier-ovu transformaciju koja je čisto realna funkcija, dok neparni signali imaju čisto imaginarnu Fourier-ovu transformaciju.

Parseval-ova relacija

Prilikom izvođenja uslova za konvergenciju Fourier-ove transformacije $X(j\omega)$ pominjali smo uslov da signal $x(t)$ ima konačnu energiju

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (7.68)$$

i često je vrednost ove energije izuzetno važna prilikom analize signala. Ponekada je jednostavno sračunati integral dat relacijom (7.68), međutim vrlo često je postupak zametan. Zbog toga je razvijena metoda kojom se energija signala može sračunati u frekvencijskom domenu. Ako uvedemo pomoćni signal $g(t) = |x(t)|^2$ i potražimo njegov transformacioni par:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-j\omega t} dt \quad (7.69)$$

prvo što primećujemo jeste da je

$$E_x = G(j0) \quad (7.70)$$

Ako pak primetimo da se signal $g(t)$ može napisati u formi

$$g(t) = |x(t)|^2 = x(t)x^*(t) \quad (7.71)$$

onda se na osnovu relacija (7.53) i (7.55) može pisati:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X^*(-j\omega) \quad (7.72)$$

što nas dovodi do konačnog rezultata

$$E_x = G(0) = \frac{1}{2\pi} X(0) * X^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) X^*(-j\lambda) d\lambda \quad (7.73)$$

ili ekvivalentno

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (7.74)$$

Poslednja relacija je izuzetno važna, zove se *Parseval-ova* relacija, i ona nam govori o tome da se energija signala može sračunati u frekvencijskom domenu tako što se integriše kvadrat modula frekvencijskog Fourier-ovog para duž celog intervala učestanosti i na kraju deli sa 2π . Često se funkcija $|X(j\omega)|^2$ naziva *spektralnom gustinom energije*.

Periodični signali nisu kvadratno integrabilni i stoga imaju beskonačnu energiju. Međutim, analogno sa Parseval-ovom relacijom za njih se može izvesti izraz koji definiše takozvanu *srednju snagu*:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \quad (7.75)$$

U sledećem poglavlju će biti pokazano da se srednja snaga periodičnog signala može izračunati na osnovu koeficijenata Fourier-ovog reda na sledeći način:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (7.76)$$

Shodno poslednjoj relaciji možemo zaključiti da $|a_k|^2$ predstavlja srednju snagu k -tog harmonika.