Pitanje 5: Elementarni diskretni signali

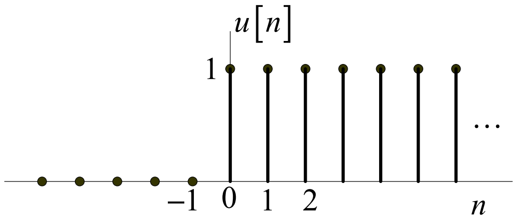
Postoji čitava klasa signala diskretnih u vremenu koja je vrlo korisna u cilju analize signala i sistema. U najvećem broju slučajeva ovi signali su analogni elementarnim kontinualnim signalima, ali postoje i značajne razlike. Takođe, možemo se dogovoriti da ubuduće umesto do sada korišćene opšte oznake za signale $x(t)$, specijalno za signale diskretne u vremenu koristimo oznaku $x[n]$. Dakle, uglasta zagrada umesto obične, male treba da označi da je u pitanju diskretni signal. Diskretni signali se, takođe, vrlo često u literaturi označavaju i kao *sekvence* jer oni zaista i predstavljaju sekvencu, niz brojeva.

Jedinična odskočna funkcija

Diskretna jedinična odskočna funkcija se uobičajeno obeležava kao $u[n]$ i definiše se na sledeći način:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

i prikazana je na slici 3.1.

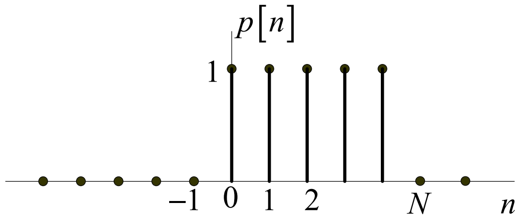


Slika 3.1: Grafički prikaz diskretnog jediničnog odskočnog signala

Primetimo da je za razliku od kontinualnog jediničnog odskočnog signala, sada vrednost $u[0]$ definisana i iznosi 1. Takođe, diskretna pravougaona četvrtka (u engleskoj literaturi označena kao *rectangular pulse*) je vrlo često u upotrebi i definiše se kao:

$$p[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \tag{3.2}$$

i prikazana na slici 3.2.



Slika 3.2: Diskretna pravougaona četvrtka

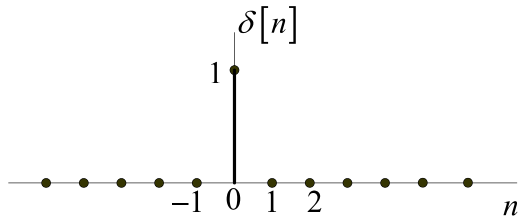
Primetimo takođe, da signal $u[n-N]$ označava signal $u[n]$ koji je zakašnjen (dakle pomeren u desno na vremenskoj skali) za N, i koji je jednak nuli za $n < N$ i jednak jedinici za $n \geq N$.

Jedinična impulsna funkcija

Diskretna jedinična impulsna funkcija (ponekad nazivana *jediničnim odbirkom,* na engleskom *unit-sample*) se označava kao $\delta[n]$ i definiše se na sledeći način:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0\ , & n \neq 0 \\ 1\ , & n = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

i prikazana je na slici 3.3.



Slika 3.3: Diskretna jedinična impulsna funkcija

I dalje postoji jednostavna veza između jedinične odskočne i impulsne funkcije. Jednostavno se dokazuje da je jedinična impulsna funkcija jednaka jednokoračnoj konačnoj razlici dve odskočne funkcije:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{3.4}$$

dok se jedinična odskočna funkcija može napisati u obliku suma jediničnih impulsnih signala:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \tag{3.5}$$

Očigledno da prvom diferencijalu u kontinalnom vremenu odgovara konačna razlika, dok integralu odgovara postupak sumiranja u diskretnom domenu. Analogno relaciji (15) iz prvog predavanja koju smo zvali osobina pomeranja impulsne funkcije, u diskretnom domenu vremena odgovara sledeća relacija

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \tag{3.6}$$

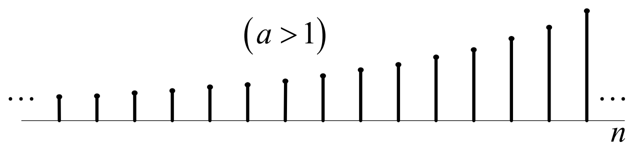
koju je jednostavno dokazati.

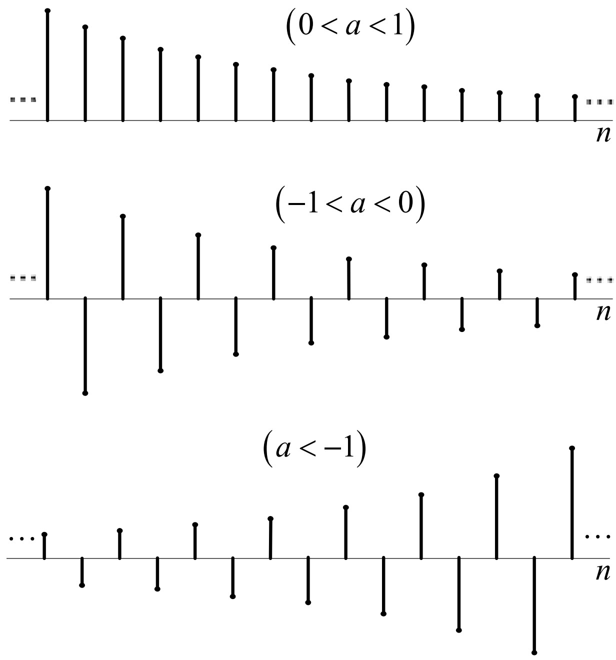
Eksponencijalni signali

Diskretni eksponencijalni kompleksni signal se u opštem slučaju definiše na sledeći način:

$$x[n] = Ca^n \tag{3.7}$$

gde su u opštem slučaju konstante C i a kompleksni brojevi. Kao i u slučaju kontinualnih signala, postoji nekoliko zanimljivih slučajeva. Ukoliko su i C i a realni brojevi, dobija se takozvana realna eksponencijalna funkcija (signal), ali se sada oblik ove funkcije značajno menja zavisno od toga iz koja od 4 intervala $a > 1$, $1 > a > 0$, $0 > a > -1$ i $-1 > a$, parametar a uzima vrednost. Oblici ove 4 vrste eksponencijalnih signala su prikazani na slici 3.4.





Slika 3.4: Četiri slučaja diskretni realnih eksponencijalnih signala

Primetimo da za $|a|>1$ ovi signali neograničeno (kaže se eksponencijalno) rastu, dok za $|a|<1$ signali opadaju. Primetimo još da za negativne vrednosti parametra a signali imaju osobinu alternacije, odnosno naizmenično iz odbirka u odbirak menjaju znak.

Sinusoidalni signali

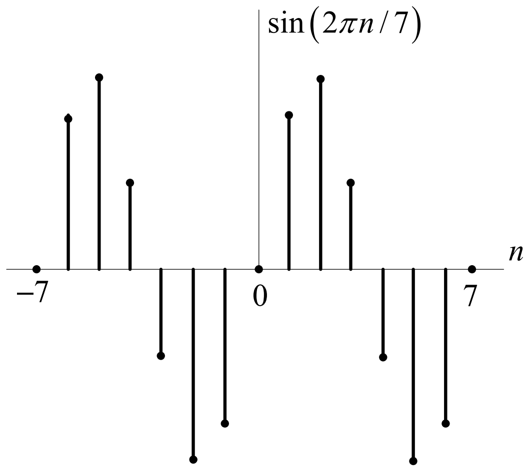
Kompleksna sinusoida se dobija iz eksponencijalnog signala ukoliko usvojimo da parametar a ima oblik: $a=e^{j\Omega_0}$, gde je kružna učestanost Ω_0 realni broj koji se izražava u radijanima. Tada, pod pretpostavkom da je i parametar C kompleksan $C=|C|e^{j\phi}$, kompleksna sinusoida postaje

$$x[n]=Ce^{j\Omega_0 n}=|C|e^{j(\Omega_0 n+\phi)}=|C|\cos(\Omega_0 n+\phi)+j|C|\sin(\Omega_0 n+\phi) \tag{3.8}$$

Tada se realna sinusoida, uz oznaku $A=|C|$, može pisati kao

$$x[n]=A\cos(\Omega_0 n+\phi)=\mathrm{Re}\left\{Ae^{j(\Omega_0 n+\phi)}\right\}=\frac{A}{2}\left(e^{j(\Omega_0 n+\phi)}+e^{-j(\Omega_0 n+\phi)}\right) \tag{3.9}$$

Diskretna realna sinusoida sa parametrima $\Omega_0=2\pi/7$ i $\phi=-\pi/2$ je prikazana na slici 3.5.



Slika 3.5: Realna diskretna sinusoida

Po analogiji sa kontinualnim sinusoidnim signalima, logično je očekivati da i diskretna sinusoida bude periodična, odnosno da zadovolji uslov

$$x[n+N]=x[n] \tag{3.10}$$

za svako n i za neku periodu $N>0$. Međutim, u slučaju diskretnih signala to ne mora biti tako, već periodičnost diskretne sinusoide zavisi od učestanosti Ω_0. Specijalno, ukoliko je signal $e^{j\Omega_0 n}$ periodičan sa periodom N, možemo pisati:

$$e^{j\Omega_0(n+N)}=e^{j\Omega_0 n}e^{j\Omega_0 N}=e^{j\Omega_0 n} \tag{3.11}$$

i shodno tome

$$e^{j\Omega_0 N}=1 \tag{3.12}$$

Dakle, eksponent $\Omega_0 N$ mora biti ceo multipl od 2π, odnosno

$$\Omega_0 N=2\pi k \tag{3.13}$$

Zaključujemo da treba da postoji celobrojno k takvo da je u važnosti relacija

$$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{k}{N} \tag{3.14}$$

Konačno, uslov da kompleksna diskretna sinusoida bude periodičan signal je da, takozvana normalizovana učestanost $\Omega_0/(2\pi)$ bude racionalan broj. Ukoliko ovaj uslov primenimo na signal $\sin(2\pi n/7)$ prikazan na slici 3.5, dobija se da je $\Omega_0/(2\pi)=1/7=k/N$. Dakle normalizovana učestanost jeste racionalan broj i zbog toga se na slici 3.5 i vidi periodičnost sinusoide, sa periodom $N=7$. Opšti uslov periodičnosti $\Omega_0/(2\pi)=k/N$ govori da u jednoj periodi od N odbiraka ima k ciklusa sinusoide. Ako normalizovana učestanost nije racionalan broj, tada diskretna sinusoida nije periodična, i odbirci diskretne sinusoide se nikada neće ponoviti.

Sledeća značajna razlika između kontinualnih i diskretnih sinusoida je ta da se u slučaju diskretnih sinusoida za dve različite vrednosti kružnih učestanosti Ω_0 mogu dobiti identični odbirci diskretnog signala, što je u kontinualnom slučaju nemoguće. Ako, na primer, posmatramo diskretnu sinusoidu sa učestanošću Ω_0 i drugu sinusoidu sa učestanošću $(\Omega_0+2\pi)$, tada je:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n}=e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi n}=e^{j\Omega_0 n} \tag{3.15}$$

jer je $e^{j2\pi n}=1$ za celobrojne vrednosti n. Drugim rečima, ove dve diskretne sinusoide sa učestanostima Ω_0 i $(\Omega_0+2\pi)$, se ne mogu razlikovati. Isti zaključak važi i za realne sinusoide, naravno pod uslovom da je razlika njihovih učestanosti jednaka celom multiplu od 2π. Kao posledica ove činjenice, kada god definišemo diskretnu sinusoidu potrebno je za učestanosti posmatrati samo interval dužine 2π, na primer $0\le\Omega_0<2\pi$ ili $-\pi<\Omega_0\le\pi$. Ova će činjenica biti vrlo važna kada se kasnije budemo bavili diskretnom Furijeovom transformacijom.

U opštem slučaju kada su i parametar C i a kompleksni brojevi

$$C=|C|e^{j\phi},\ a=\rho e^{j\Omega_0},\ \rho>0 \tag{3.16}$$

diskretni signal dobija formu:

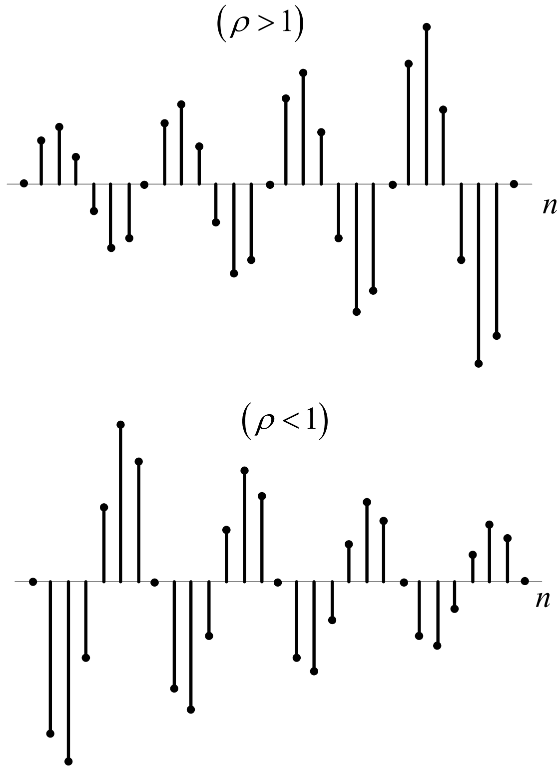
$$
\begin{aligned}
x[n] = Ca^n &= |C|\rho^n e^{j(\Omega_0 n+\phi)} \\
&= |C|\rho^n\left[\cos(\Omega_0 n+\phi) + j\sin(\Omega_0 n+\phi)\right]
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Ponovo, po analogiji sa kontinualnim signalima, dobijamo modulisane sinusoide sa anvelopom ρ^n, koja može biti prigušena ili opadajuća ako je $\rho < 1$ ili rastuća ako je $\rho > 1$.

Realni deo ovog signala je:

$$
\mathrm{Re}\{Ca^n\} = |C|\rho^n \cos(\Omega_0 n+\phi) \tag{3.18}
$$

i dva različita slučaja ovog signala su prikazana na slici 3.6.



Slika 3.6: Eksponencijalno rastuća i opadajuća diskretna sinusoida

Pitanje 6: Modifikacije nezavisne promenljive *n* u diskretnim signalima

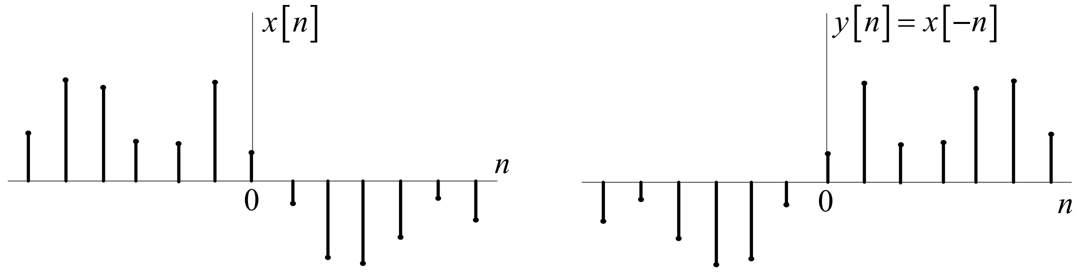
Kao i u slučaju kontinualnih vremenskih signala, mnoge značajne operacije nad signalima se mogu dobiti jednostavnom modifikacijom nezavisne vremenske promenljive *n*. Ponovo, elementarne transformacije u slučaju diskretnih signala su pomeranje u vremenu, $x[n-n_0]$, inverzija vremena $x[-n]$ i skaliranje u vremenu $x[an]$, koje se najčešće kombinuju.

Inverzija vremena

Ako definišemo diskretni signal $y[n]$ na osnovu signala $x[n]$ na sledeći način:

$$
y[n] = x[-n] \tag{3.19}
$$

jasno je da tada odbirci jednog i drugog signala zadovoljavaju relacije $x[0]=y[0]$; $x[1]=y[-1]$; $x[2]=y[-2]$ i tako dalje. Drugim rečima, ponovo se signali *x* i *y* odnose kao likovi u ogledalu, u odnosu na oordinatu. Primer takvih signala dat je na slici 3.7.



Slika 3.7: Ilustracija inverzije vremena

Skaliranje vremena

Po analogiji sa kontinualnim signalima, diskretni signal definisan sledećom relacijom:

$$y[n]=x[2n] \tag{3.20}$$

je ubrazan u odnosu na signal $x[n]$ dva puta, ali postoji značajna razlika. Primetimo da je $y[0]=x[0]$, $y[1]=x[2], y[2]=x[4]$ i tako dalje. Drugim rečima, u signalu $y[n]$ se ne pojavljuju neparni odbirci signala *x,* $x[1], x[3], x[5]$ ... Ovakva pojava se naziva *decimacijom signala x.* Naravno, ukoliko želimo da zadržimo samo neparne odbirke signala *x*, definisaćemo signal *w* na sledeći način:

$$w[n]=x[2n+1] \tag{3.21}$$

i tada će biti $w[0]=x[1], w[1]=x[3], w[2]=x[5]$ ...

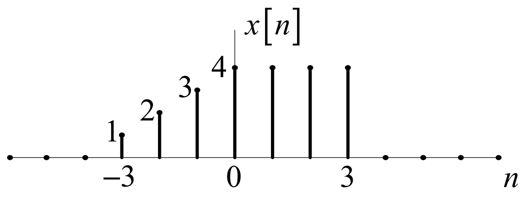
Usporavanje signala (skaliranje vremena koeficijentom koji je manji od 1) unosi još više različitosti u odnosu na kontinualne signale. Pretpostavimo da je signal *z* definisan kao:

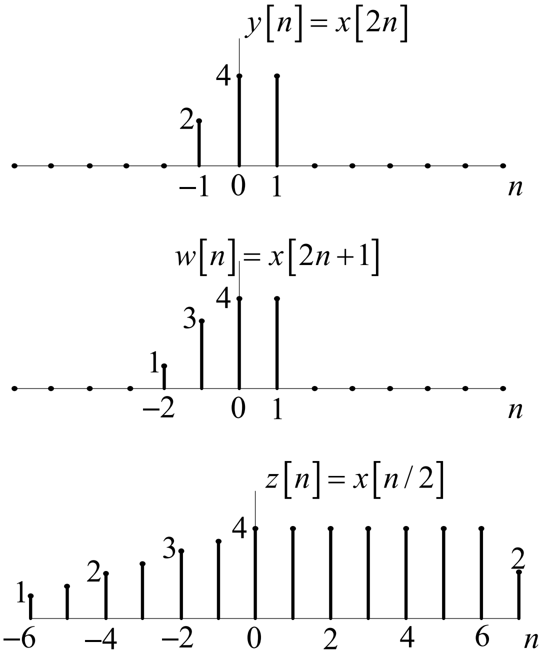
$$z[n]=x[n/2] \tag{3.22}$$

Tada signal $z[n]$ nije definisan za neparne vrednosti argumenta *n*. U želji da signal ipak ima odbirke za svako *n* treba pristupiti postupku interpolacije koja se obično vrši metodom jednostavne linearne interpolacije:

$$z[n]=\begin{cases} x[n/2], & \textit{ako je n parno} \\ \dfrac{x[(n-1)/2]+x[(n+1)/2]}{2}, & \textit{ako je n neparno} \end{cases} \tag{3.23}$$

Primer ovakvih signala je prikazan na slici 3.8.





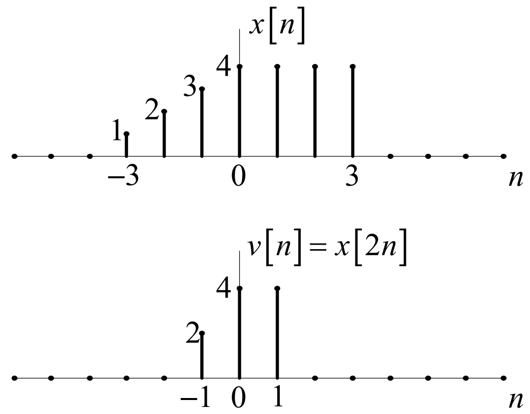
Slika 3.8: Ilustracija postupka decimacije i interpolacije

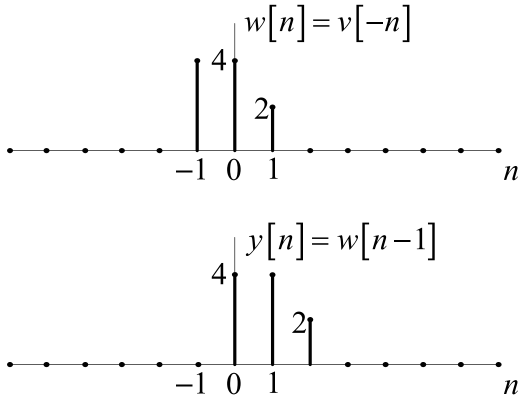
Postupci decimacije i interpolacije su vrlo komplikovani postupci, i na ovom jednostavnom primeru je samo ilustrovan njihov učinak.

Kombinacija pomeranja u vremenu, inverzije vremena i skaliranje čini linearne transformacije nezavisne vremenske promenljive. Međutim, zbog prirode vremenske promenljive koja u diskretnim signalima mora biti celobrojna vrednost, često ima problema sa kojima se nismo susretali kod kontinualnih signala. Ponovo, uputno je vezati se za neku pogodno izabranu vrednost nezavisne promenljive n_0 i na osnovu nje pratiti regularnost sukcesivnih modifikacija.

Primer 3.1: Na osnovu signala $x[n]$ prikazanog na slici 3.8, formirati signal $y[n]=x[2-2n]$.

Na osnovu signal $x[n]$ formirajmo prvo signal $v[n]=x[2n]$, a zatim na osnovu signala $v[n]$ formirajmo signal $w[n]=v[-n]=x[-2n]$. Ovi signali su prikazani na slici 3.9. Zatim je neophodno na osnovu signala $w[n]$ formirati signal $y[n]=w[n-1]=x[-2(n-1)]=x[2-2n]$.



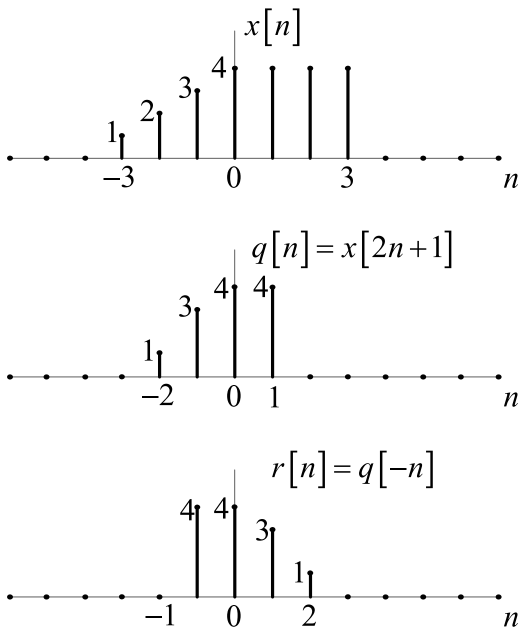


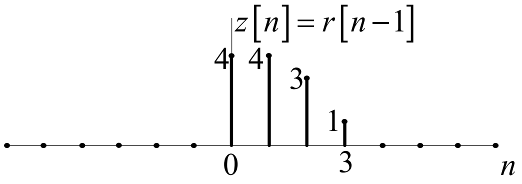
Slika 3.9: Ilustracija kombinovanih modifikacija nezavisne vremenske promenljive

U cilju provere dobijenog rezultata, možemo se vezati za $n_0 = -2$. Kako je $x[n_0] = 2$, potrebno je da $v[-1] = x[-2] = x[n_0]$ bude takođe 2. Sa grafika se vidi da je taj uslov ispunjen. Dalje mora biti $w[1] = v[-1] = x[-2] = 2$ što je takođe ispunjeno. I konačno, kako je $y[2] = x[2-2*2] = x[-2] = 2$ zaključujemo da su grafici prikazani na slici 3.9 ispravni.

Primer 3.2: Na osnovu signala iz prethodnog primera formirati signal $z[n] = x[3-2n]$.

Ovaj se primer razlikuje od prethodnog po tome što signal $z[n]$ koristi samo neparne odbirke signala *x*, dok je signal *y* iz prethodnog zadatka koristio samo parne odbirke. I ukoliko bi neko poželeo da za rešavanje ovog zadatka iskoristi signal $w[-2n]$ iz prethodnog primera, naišao bi na problem pomeranja signala za 3/2 odbiraka što je nemoguće (jer je $z[n] = x[3-2n] = x[-2(n-3/2)] = w[n-1.5]$). Zbog toga u cilju rešavanja ovog primera treba krenuti od pomoćnog signala $q[n] = x[2n+1]$ koji izdvaja samo neparne odbirke signala *x*. Zatim, inverzijom vremena na osnovu signala q treba formirati signal $r[n] = q[-n] = x[-2n+1]$, i konačno pomeranjem signala *r* za jedan odbirak u desno dolazimo do željenog signala $z[n] = x[3-2n] = x[-2(n-1)+1] = r[n-1]$. Ovi su signali prikazani na slici 3.10.





Slika 3.10: Ilustracija kombinacija modifikacije nezavisne vremenske promenljive

Ponovo se jednostavno može proveriti ispravnost dobijenih grafika uočavanjem nekom specifičnog vremenskog trenutka. Recimo za $n_0=-3$ znamo da je $x[n_0]=1$. Tada mora biti $q[-2]=1$ i $r[2]=1$ i $z[3]=1$, što se proverom na graficima potvrđuje.

Osobine simetrije

Po analogiji sa kontinualnim vremenskim signalima, i za diskretne vremenske signale je moguće uvesti osobine parnosti i neparnosti. Za diskretni signal $x[n]$ kažemo da je paran ako zadovoljava relaciju:

$$x[n]=x[-n] \tag{3.24}$$

dok se za signal koji zadovoljava relaciju

$$x[n]=-x[-n] \tag{3.25}$$

kaže da je neparan. Važno je to da se svaki realni diskretni signal može napisati kao zbir svog parnog i neparnog dela, gde se parni i neparni deo signala definišu shodno sledećim relacijama:

$$Ev\{x[n]\}=\frac{1}{2}\big(x[n]+x[-n]\big) \tag{3.26}$$

$$Od\{x[n]\}=\frac{1}{2}\big(x[n]-x[-n]\big) \tag{3.27}$$

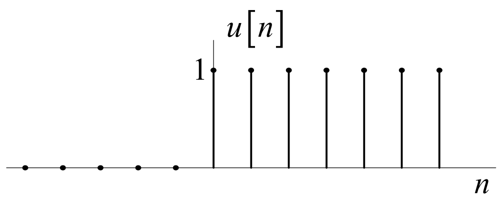
gde je sa $Ev\{\cdot\}$ označen parni a sa $Od\{\cdot\}$ neparni deo signala.

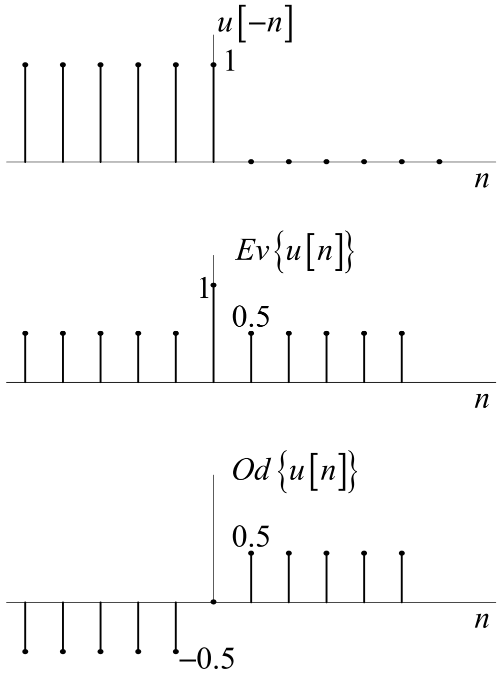
Primer 3.3: Sračunajmo parni i neparni deo jedinične diskretne odskočne funkcije.

Na osnovu relacija (3.26) i (3.27) možemo pisati:

$$\begin{aligned} Ev\{u[n]\}&=\frac{1}{2}\big[u[n]+u[-n]\big] \\ Od\{u[n]\}&=\frac{1}{2}\big[u[n]-u[n]\big] \end{aligned} \tag{3.28}$$

Na slici 3.11. su prikazani odgovarajući signali.





Slika 3.11: Parni i neparni deo jedinične diskretne odskočne funkcije

Pitanje 7: Konvolucija diskretnih signala u vremenu

Konvolucija je fundamentalna operacija koja se može vršiti nad diskretnim signalima, isto kao i nad kontinualnim. Konvolucija dva diskretna signala $x[n]$ i $h[n]$ kao rezultat daje signal $y[n]$, u oznaci

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{3.29}$$

pri čemu je

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \tag{3.30}$$

Jednostavnom smenom promenljivih $m = n - k$, može se pisati

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] = h[n] * x[n] \tag{3.31}$$

što znači da je konvolucija nad diskretnim signalima komutativna operacija:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{3.32}$$

Potpuno analogno sa konvolucijom nad kontinualnim signalima, lako se dokazuje da je konvolucija i asocijativna operacija kao i da važi osobina distributivnosti konvolucije u odnosu na sabiranje:

$$\left(x[n] * h[n]\right) * g[n] = x[n] * \left(h[n] * g[n]\right) \tag{3.33}$$

$$x[n] * \left(h_1[n] + h_2[n]\right) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \tag{3.34}$$

Na osnovu relacije (3.30) zaključujemo da prilikom sračunavanja konvolucije diskretnih signala treba realizovati četiri osnovna koraka:

1. **korak:** Signal $h[k]$ treba invertovati u vremenu i izvršiti pomeranje kako bi se dobio signal $h[n-k]$ koji je funkcija parametra *k* gde *n* predstavlja konkretan parametar.
2. **korak:** Signali $x[k]$ i $h[n-k]$ se izmnože za sve vrednosti promenljive *k*.
3. **korak:** Proizvod $x[k]h[n-k]$ se sumira za sve vrednosti promenljive *k*, čime se dobija vrednost konvolucije $y[n]$ za jedno konkretno *n*.
4. **korak:** Promenljiva *n* se inkrementira (poveća za 1) i ponovo se pristupi primeni koraka 1,2 i 3, kako bi se dobila vrednost konvolucije $y[n]$ za novu vrednost promenljive *n*.

Dakle, teorijski gledano, da bi odredili celu diskretnu funkciju $y[n]$, treba izvršiti beskonačno mnogo sumiranja, međutim praktično gledano to nikada nije tako. S obzirom na analitičko definisanje signala, ili na ograničeno trajanje signala koji ulaze u konvoluciju, problem je mnogo jednostavniji i biće ilustrovan kroz sledećih nekoliko primera.

Primer 3.4: Odrediti konvoluciju dve diskretne jedinične odskočne funkcije

$$r[n]=u[n]*u[n] \tag{3.35}$$

Polazeći od definicionog izraza možemo pisati:

$$r[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]u[n-k] \tag{3.36}$$

Znajući da je $u[k]=0$ za $k<0$ i da je $u[k]=1$ za $k\geq 0$, poslednji izraz postaje

$$r[n]=\sum_{k=0}^{\infty}u[k]u[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}u[n-k] \tag{3.37}$$

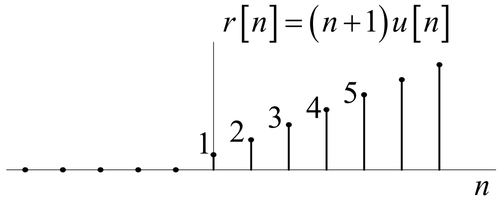
Ako u relaciji (3.37) izvršimo smenu promenljivih $n-k=m$ dobija se

$$r[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}u[m] \tag{3.38}$$

Sada postaje jasno da za $n<0$ poslednja suma ima vrednost 0, za $n=0$ u sumi postoji samo jedan sabirak sa vrednošću 1, za *n*=1 postoje dva takva sabirka, za *n*=2 tri sabirka i tako dalje, pa onda možemo pisati

$$r[n]=\begin{cases}0\ ;\ n<0\\(n+1)\ ;\ n\geq 0\end{cases}=(n+1)u[n] \tag{3.39}$$

Signal $r[n]$ se obično naziva jediničnim diskretnim usponskim signalom (u engleskoj literaturi se koristi naziv *unit-ramp signal*). Ovaj signal je prikazan na slici 3.12.



Slika 3.12.: Jedinični diskretni usponski signal

Primer 3.5: Zanimljiv primer je konvolucija proizvoljnog signala $x[n]$ i Dirakovog impulsa pomerenog za n_0 odbiraka u desno: $\delta[n-n_0]$. Po definiciji ova konvolucija glasi:

$$y[n]=x[n]*\delta[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-n_0-k] \tag{3.40}$$

Znajući da je su svi sabirici poslednje sume jednaki nuli, osim jednog kada je $n-n_0-k=0$, lako se dolazi do rezultata:

$$y[n]=x[n-n_0]\delta[0]=x[n-n_0] \tag{3.41}$$

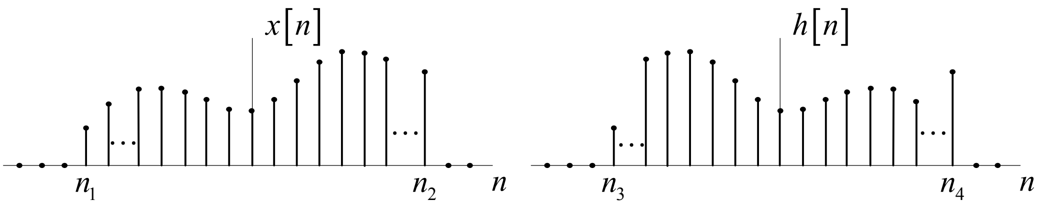
Dakle, došli smo do važnog zaključka da konvolucija proizvoljnog signala $x[n]$ i pomerenog Dirakovog impulsa $\delta[n-n_0]$ rezultuje pomrenim signalom $x[n-n_0]$.

Primer 3.6: Pokažimo kakvo svojstvo ima konvolucija $y[n]=x[n]*h[n]$ ako signali imaju oblik kakav je prikazan na slici 3.13, odnosno ako je

$$x[k]=0 \;\; za \;\; k<n_1 \;\; i \;\; k>n_2 \tag{3.42}$$

i

$$h[k]=0 \;\; za \;\; k<n_3 \;\; i \;\; k>n_4$$



Slika 3.13: Primer signala ograničenog trajanja

Tada njihova konvolucija postaje:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \tag{3.43}$$

Uzimajući u obzir da je signal $x[k]$ jednak nuli za $k<n_1$ i $k>n_2$, poslednja beskonačna suma se redukuje na konačnu sumu:

$$y[n]=\sum_{k=n_1}^{n_2}x[k]h[n-k] \tag{3.44}$$

Uvodeći smenu $n-k=m$ dalje možemo pisati:

$$y[n]=\sum_{m=n-n_2}^{n-n_1}x[n-m]h[m] \tag{3.45}$$

Uzimajući u obzir ograničeno trajanje signala *h*, konačni rezultat postaje:

$$y[n] = \begin{cases} 0 \; ; \; n - n_1 < n_3 \\ \sum\limits_{m=\max(n_3, n-n2)}^{\min(n_4, n-n_1)} x[n-m]h[m] \; ; \; n - n_1 \geq n_3 \; i \; n - n_2 \leq n_4 \\ 0 \; ; \; n - n_2 > n_4 \end{cases} \tag{3.46}$$

odnosno

$$y[n] = \begin{cases} 0 \; ; \; n < n_1 + n_3 \\ \sum\limits_{m=\max(n_3, n-n2)}^{\min(n_4, n-n_1)} x[n-m]h[m] \; ; \; n_1 + n_3 \leq n \leq n_2 + n_4 \\ 0 \; ; \; n > n_2 + n_4 \end{cases} \tag{3.47}$$

Dakle, i signal $y[n]$ je ograničenog trajanja pri čemu se početak njegovog trajanja dobija kao zbir početaka signala *x* i *h*, dok se njegov kraj trajanja dobija kao zbir krajeva istih signala.

Osobine konvolucije nad diskretnim signalima u vremenu

Postoji nekoliko osibna konvolucije nad diskretnim signalima koje se jednostavno dokazuju.
1. Ako je signal $x[n]$ parna i $h[n]$ neparna funkcija, tada je i njihova konvolucija $y[n]$ neparna funkcija. Dokažimo ovu osobinu, polazeći od definicije:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{3.48}$$

Uzimajući u obzir da je signal *x* paran a signal *h* neparan i nakon smene promenljivih $k - n = m$, možemo pisati:

$$y[n] = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k-n] = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-n-m] = -y[-n] \tag{3.49}$$

što dokazuje da je signal $y[n]$ neparan signal.

2. Ako su signali $x[n]$ i $h[n]$ oba neparne funkcije, tada je signal $y[n]$ parna funkcija.
Dokaz ove osobine je analogan prethodnom dokazu:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-n-m] = y[-n] \tag{3.50}$$

3. Ako je signal $x[n]$ periodičan tada je i signal $y[n]$ periodičan.
Pretpostavimo da je signal *x* periodičan sa periodom ponavljanja *N*. Tada možemo pisati:

$$y[n+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = y[n] \tag{3.51}$$

što dokazuje navedeno tvrđenje.

4. Inverzija konvolucije:

$$y[-n] = x[-n] * h[-n] \tag{3.51}$$

Da bi dokazali ovu osobinu, ponovo podjimo od definicionog izraza:

$$y[-n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-n-k] \tag{3.52}$$

Uvedimo smenu $k=-m$ i oznake $w[k]=x[-k]$ i $v[k]=h[-k]$. Tada možemo pisati:

$$y[-n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m]h[-n+m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]v[n-m]=w[n]*v[n]=x[-n]*h[-n] \tag{3.53}$$

čime je tvrđenje dokazano.

5. Pomerenja konvolucije:

$$y[n-n_1-n_2]=x[n-n_1]*h[n-n_2] \tag{3.54}$$

Dokaz ovog tvrđenje se sprovodi na sledeći način:

$$y[n-n_1-n_2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-n_1-n_2-k] \tag{3.55}$$

Ako u poslednji izraz uvedemo smenu $k=m-n_1$ i oznake $x[n-n_1]=w[n]$ i $h[n-n_2]=v[n]$ možemo pisati:

$$\begin{aligned} y[n-n_1-n_2] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m-n_1]h[n-n_2-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]v[n-m]=w[n]*v[n]=x[n-n_1]*h[n-n_2] \end{aligned} \tag{3.55}$$

6. Ako sa A_x označimo sumu svih odbiraka signala $x[k]$:

$$A_x=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \tag{3.56}$$

i slično tome definišemo A_h i A_y, tada važi jednakost

$$A_y=A_xA_h \tag{3.57}$$

Ovu jednakost ćemo dokazati korišćenjem dvostrukih suma:

$$A_y=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \tag{3.58}$$

Ukoliko sume zamene mesta i član $x[k]$ izađe ispred sume po *n* jer ne zavisi od *n*, dobićemo:

$$A_y=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]=A_x\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] \tag{3.59}$$

Konačno, ako u preostaloj sumi izvršimo smenu $n-k=m$ dobićemo izraz (3.57)

7. Ukoliko definišemo takozvani *centar gravitacije* ili *vreme kašnjenja* signala $x[n]$ kao

$$D_x=A_{nx}/A_x \tag{3.60}$$

gde je A_{nx} suma svih članov $nx[n]$, i slično tome definišemo D_h i D_y, tada važi relacija

$$D_y=D_x+D_h \tag{3.61}$$

Dokaz relacije (3.61) se sprovodi sledećim postupkom:

$$
\begin{aligned}
D_y = A_{ny} / A_y &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} ny[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}{A_x A_h} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k+k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}{A_x A_h} \\
&= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} k \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}{A_x A_h} \\
&= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k)h[n-k]}{A_x A_h} \\
&= \frac{A_{nx}A_h + A_x A_{nh}}{A_x A_h} = \frac{A_{nx}}{A_x} + \frac{A_{nh}}{A_h} = D_x + D_h
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

čime je dokaz završen.