Pitanje 7: Konvolucija diskretnih signala u vremenu

Konvolucija je fundamentalna operacija koja se može vršiti nad diskretnim signalima, isto kao i nad kontinualnim. Konvolucija dva diskretna signala $x[n]$ i $h[n]$ kao rezultat daje signal $y[n]$, u oznaci

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{7.1}$$

pri čemu je

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \tag{7.2}$$

Jednostavnom smenom promenljivih $m = n-k$, može se pisati

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] = h[n] * x[n] \tag{7.3}$$

što znači da je konvolucija nad diskretnim signalima komutativna operacija:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{7.4}$$

Potpuno analogno sa konvolucijom nad kontinualnim signalima, lako se dokazuje da je konvolucija i asocijativna operacija kao i da važi osobina distributivnosti konvolucije u odnosu na sabiranje:

$$\left(x[n] * h[n]\right) * g[n] = x[n] * \left(h[n] * g[n]\right) \tag{7.5}$$

$$x[n] * \left(h_1[n] + h_2[n]\right) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \tag{7.6}$$

Na osnovu relacije (7.2) zaključujemo da prilikom sračunavanja konvolucije diskretnih signala treba realizovati četiri osnovna koraka:

1. **korak:** Signal $h[k]$ treba invertovati u vremenu i izvršiti pomeranje kako bi se dobio signal $h[n-k]$ koji je funkcija parametra *k* gde *n* predstavlja konkretan parametar.
2. **korak:** Signali $x[k]$ i $h[n-k]$ se izmnože za sve vrednosti promenljive *k.*
3. **korak:** Proizvod $x[k]h[n-k]$ se sumira za sve vrednosti promenljive *k*, čime se dobija vrednost konvolucije $y[n]$ za jedno konkretno *n.*
4. **korak:** Promenljiva *n* se inkrementira (poveća za 1) i ponovo se pristupi primeni koraka 1,2 i 3, kako bi se dobila vrednost konvolucije $y[n]$ za novu vrednost promenljive *n.*

Dakle, teorijski gledano, da bi odredili celu diskretnu funkciju $y[n]$, treba izvršiti beskonačno mnogo sumiranja, međutim praktično gledano to nikada nije tako. S obzirom na analitičko definisanje signala, ili na ograničeno trajanje signala koji ulaze u konvoluciju, problem je mnogo jednostavniji i biće ilustrovan kroz sledećih nekoliko primera.

Primer 7.1: Odrediti konvoluciju dve diskretne jedinične odskočne funkcije

$$r[n] = u[n] * u[n] \tag{7.7}$$

Polazeći od definicionog izraza možemo pisati:

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k] \tag{7.8}$$

Znajući da je $u[k]=0$ za $k<0$ i da je $u[k]=1$ za $k \geq 0$, poslednji izraz postaje

$$r[n] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] \tag{7.9}$$

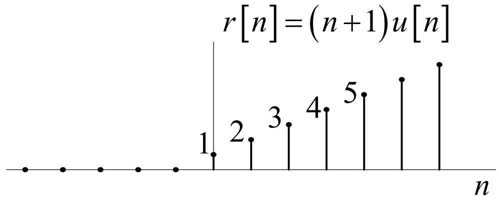
Ako u relaciji (7.9) izvršimo smenu promenljivih $n-k=m$ dobija se

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m] \tag{7.10}$$

Sada postaje jasno da za $n<0$ poslednja suma ima vrednost 0, za $n=0$ u sumi postoji samo jedan sabirak sa vrednošću 1, za n=1 postoje dva takva sabirka, za n=2 tri sabirka i tako dalje, pa onda možemo pisati

$$r[n] = \begin{cases} 0 \;;\; n<0 \\ (n+1) \;;\; n \geq 0 \end{cases} = (n+1)u[n] \tag{7.11}$$

Signal $r[n]$ se obično naziva jediničnim diskretnim usponskim signalom (u engleskoj literaturi se koristi naziv *unit-ramp signal*). Ovaj signal je prikazan na slici 7.1.



Slika 7.1.: Jedinični diskretni usponski signal

Primer 7.2: Zanimljiv primer je konvolucija proizvoljnog signala $x[n]$ i Dirakovog impulsa pomerenog za n_0 odbiraka u desno: $\delta[n-n_0]$. Po definiciji ova konvolucija glasi:

$$y[n] = x[n] * \delta[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-n_0-k] \tag{7.12}$$

Znajući da je su svi sabirici poslednje sume jednaki nuli, osim jednog kada je $n-n_0-k=0$, lako se dolazi do rezultata:

$$y[n] = x[n-n_0]\delta[0] = x[n-n_0] \tag{7.13}$$

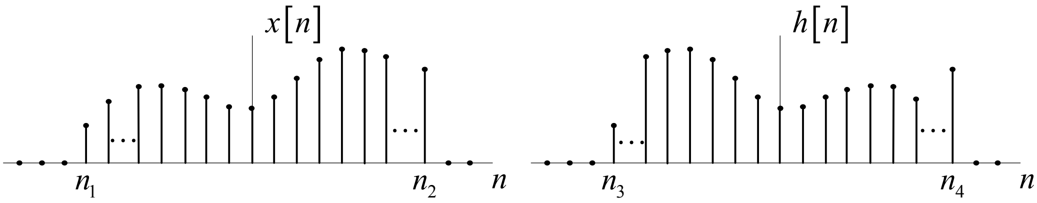
Dakle, došli smo do važnog zaključka da konvolucija proizvoljnog signala $x[n]$ i pomerenog Dirakovog impulsa $\delta[n-n_0]$ rezultuje pomerenim signalom $x[n-n_0]$.

Primer 7.3: Pokažimo kakvo svojstvo ima konvolucija $y[n]=x[n]*h[n]$ ako signali imaju oblik kakav je prikazan na slici 7.2, odnosno ako je

$$x[k]=0 \;\; za \;\; k<n_1 \;\; i \;\; k>n_2 \tag{7.14}$$

i

$$h[k]=0 \;\; za \;\; k<n_3 \;\; i \;\; k>n_4$$



Slika 7.2: Primer signala ograničenog trajanja

Tada njihova konvolucija postaje:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{7.15}$$

Uzimajući u obzir da je signal $x[k]$ jednak nuli za $k < n_1$ i $k > n_2$, poslednja beskonačna suma se redukuje na konačnu sumu:

$$y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} x[k]h[n-k] \tag{7.16}$$

Uvodeći smenu $n-k=m$ dalje možemo pisati:

$$y[n] = \sum_{m=n-n_2}^{n-n_1} x[n-m]h[m] \tag{7.17}$$

Uzimajući u obzir ograničeno trajanje signala *h*, konačni rezultat postaje:

$$y[n] = \begin{cases} 0 \ ; \ n-n_1 < n_3 \\ \displaystyle\sum_{m=\max(n_3, n-n2)}^{\min(n_4, n-n_1)} x[n-m]h[m] \ ; \ n-n_1 \geq n_3 \ i \ n-n_2 \leq n_4 \\ 0 \ ; \ n-n_2 > n_4 \end{cases} \tag{7.18}$$

odnosno

$$y[n] = \begin{cases} 0 \ ; \ n < n_1 + n_3 \\ \displaystyle\sum_{m=\max(n_3, n-n2)}^{\min(n_4, n-n_1)} x[n-m]h[m] \ ; \ n_1 + n_3 \leq n \leq n_2 + n_4 \\ 0 \ ; \ n > n_2 + n_4 \end{cases} \tag{7.19}$$

Dakle, i signal $y[n]$ je ograničenog trajanja pri čemu se početak njegovog trajanja dobija kao zbir početaka signala *x* i *h*, dok se njegov kraj trajanja dobija kao zbir krajeva istih signala.

Osobine konvolucije nad diskretnim signalima u vremenu

Postoji nekoliko osibna konvolucije nad diskretnim signalima koje se jednostavno dokazuju.
1. Ako je signal $x[n]$ parna i $h[n]$ neparna funkcija, tada je i njihova konvolucija $y[n]$ neparna funkcija. Dokažimo ovu osobinu, polazeći od definicije:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{7.20}$$

Uzimajući u obzir da je signal x paran a signal h neparan i nakon smene promenljivih $k-n=m$, možemo pisati:

$$y[n]=-\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k-n]=-\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-n-m]=-y[-n] \tag{7.21}$$

što dokazuje da je signal $y[n]$ neparan signal.

2. Ako su signali $x[n]$ i $h[n]$ oba neparne funkcije, tada je signal $y[n]$ parna funkcija.
Dokaz ove osobine je analogan prethodnom dokazu:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k-n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[-n-m]=y[-n] \tag{7.22}$$

3. Ako je signal $x[n]$ periodičan tada je i signal $y[n]$ periodičan.
Pretpostavimo da je signal x periodičan sa periodom ponavljanja N. Tada možemo pisati:

$$y[n+N]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n+N-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+N-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]=y[n] \tag{7.23}$$

što dokazuje navedeno tvrđenje.

4. Inverzija konvolucije:

$$y[-n]=x[-n]*h[-n] \tag{7.24}$$

Da bi dokazali ovu osobinu, ponovo podjimo od definicionog izraza:

$$y[-n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-n-k] \tag{7.25}$$

Uvedimo smenu $k=-m$ i oznake $w[k]=x[-k]$ i $v[k]=h[-k]$. Tada možemo pisati:

$$y[-n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m]h[-n+m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]v[n-m]=w[n]*v[n]=x[-n]*h[-n] \tag{7.26}$$

čime je tvrđenje dokazano.

5. Pomerenja konvolucije:

$$y[n-n_1-n_2]=x[n-n_1]*h[n-n_2] \tag{7.27}$$

Dokaz ovog tvrđenje se sprovodi na sledeći način:

$$y[n-n_1-n_2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-n_1-n_2-k] \tag{7.28}$$

Ako u poslednji izraz uvedemo smenu $k=m-n_1$ i oznake $x[n-n_1]=w[n]$ i $h[n-n_2]=v[n]$ možemo pisati:

$$\begin{aligned} y[n-n_1-n_2] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m-n_1]h[n-n_2-m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]v[n-m]=w[n]*v[n]=x[n-n_1]*h[n-n_2] \end{aligned} \tag{7.29}$$

6. Ako sa A_x označimo sumu svih odbiraka signala $x[k]$:

$$A_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \tag{7.30}$$

i slično tome definišemo A_h i A_y, tada važi jednakost

$$A_y = A_x A_h \tag{7.31}$$

Ovu jednakost ćemo dokazati korišćenjem dvostrukih suma:

$$A_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \tag{7.32}$$

Ukoliko sume zamene mesta i član $x[k]$ izađe ispred sume po *n* jer ne zavisi od *n*, dobićemo:

$$A_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] = A_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] \tag{7.33}$$

Konačno, ako u preostaloj sumi izvršimo smenu $n-k=m$ dobićemo izraz (7.33)

7. Ukoliko definišemo takozvani *centar gravitacije* ili *vreme kašnjenja* signala $x[n]$ kao

$$D_x = A_{nx} / A_x \tag{7.31}$$

gde je A_{nx} suma svih članov $nx[n]$, i slično tome definišemo D_h i D_y, tada važi relacija

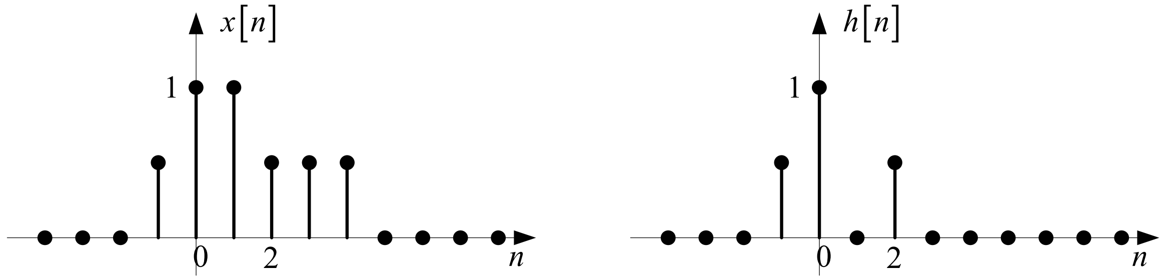
$$D_y = D_x + D_h \tag{7.32}$$

Dokaz relacije (7.32) se sprovodi sledećim postupkom:

$$\begin{aligned} D_y = A_{ny} / A_y &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n y[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]}{A_x A_h} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k+k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]}{A_x A_h} \\ &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} k \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]}{A_x A_h} \\ &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-k) h[n-k]}{A_x A_h} = \frac{A_{nx} A_h + A_x A_{nh}}{A_x A_h} = \frac{A_{nx}}{A_x} + \frac{A_{nh}}{A_h} = D_x + D_h \end{aligned} \tag{7.33}$$

čime je dokaz završen.

Primer 7.4: Sračunati konvoluciju signala $x[n]$ i $h[n]$ prikazanih na slici 7.3.

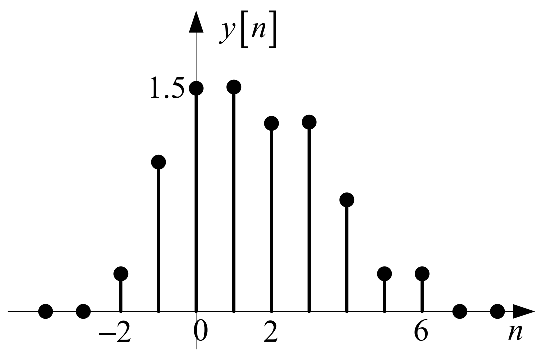


Slika 7.3: Diskretni signali

U ovakvom slučaju signala, čiji analitički oblik nije jednostavno napisati, konvoluciju treba sračunavati direktno po definicionom obrascu za svaki odbirak ponaosob. Za početak ćemo se podsetiti primera 7.3 u kome je dokazano da iz ograničenosti signala sa leve i desne strane sledi i ograničenost njihove konvolucije. Drugim rečima, za primere signala prikazane na slici 7.3. jasno je da će njihova konvolucija imati vrednosti različite od nule za $-2 \le n \le 6$:

$$
\begin{aligned}
y[-2] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-2-k] = h[-1]x[-1] + h[0]x[-2] + h[2]x[-4] = 0.25 + 0 + 0 = 0.25 \\
y[-1] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-1-k] = h[-1]x[0] + h[0]x[-1] + h[2]x[-3] = 0.5 + 0.5 + 0 = 1 \\
y[0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] = h[-1]x[1] + h[0]x[0] + h[2]x[-2] = 0.5 + 1 + 0 = 1.5 \\
y[1] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[1-k] = h[-1]x[2] + h[0]x[1] + h[2]x[-1] = 0.25 + 1 + 0.25 = 1.5 \\
y[2] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[2-k] = h[-1]x[3] + h[0]x[2] + h[2]x[0] = 0.25 + 0.5 + 0.5 = 1.25 \qquad (7.34) \\
y[3] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[3-k] = h[-1]x[4] + h[0]x[3] + h[2]x[1] = 0.25 + 0.5 + 0.5 = 1.25 \\
y[4] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[4-k] = h[-1]x[5] + h[0]x[4] + h[2]x[2] = 0 + 0.5 + 0.25 = 0.75 \\
y[5] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[5-k] = h[-1]x[6] + h[0]x[5] + h[2]x[3] = 0 + 0 + 0.25 = 0.25 \\
y[6] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[6-k] = h[-1]x[7] + h[0]x[6] + h[2]x[4] = 0 + 0 + 0.25 = 0.25
\end{aligned}
$$

Grafik ovog signala je prikazan na slici 7.4.



Slika 7.4: Dobijena konvolucija signala x i h

Pitanje 8: Pregled i osobine kontinualnih sistema

Kao što smo već rekli, sistem je uređaj, proces ili algoritam čiji je zadatak da obrađuje ili generiše signale. Mi ćemo se u okviru ovog kursa uglavnom baviti sistemima sa jednim ulazom i jednim izlazom. Sistemi se mogu podeliti u veliki broj kategorija zavisno od njihovih osobina. Postoje tri ključne osobine po kojima se sistemi dele u različite grupe. Jedna od njih je već pomenuta a odnosi se na prirodu signala koje sistem koristi kao svoje ulaze ili koje generiše i shodno tome se sistemi dele na kontinualne i diskretne. Druga važna osobina je linearnost, pa se sistemi dele na linearne i nelinearne i konačno treća osobina je stacionarnost (nepromenljivost) u vremenu pa se po toj osobini sistemi dele na stacionarne i nestacionarne ili na vremenski nepromenljive ili promenljive. U okviru ovog pitanja, bavićemo se kontinualnim sistemima uopšte. U okviru linearnih sistema postoje neke specifične osobine koje mogu biti zanimljive, pa ćemo otuda izvršiti kratki prikaz takvih sistema.

Sistemi sa memorijom

Za sistem kažemo da ima memoriju ukoliko odziv sistema $y(t)$ u trenutku $t = t_0$ zavisi ne samo od ulaznog signala u tom istom trenku $x(t_0)$ već i od vrednosti uzlaznog signala u nekim drugim vremenskim trenucima. Dakle, da bismo sračunali izlaz sistema sa memorijom $y(t_0)$ u trenutku $t = t_0$, potrebno nam je poznavanje ulaznog signala $x(t)$ u prošlosti $(t < t_0)$ ili u budućnosti $(t > t_0)$. U suprotnom, ako je za izračunavanje izlaza $y(t_0)$ dovoljno poznavati $x(t_0)$ kažemo da je sistem bez memorije.

Jednostavan primer sistema bez memorije jeste primena Omovog zakona za izračunavanje napona na krajevima otpornika kroz koji protiče neka poznata struja *i*:

$$v(t_0) = Ri(t_0) \tag{8.1}$$

Sa druge strane, ukoliko želimo da sračunamo vrednost napona na krajevima kondenzatora kapacitivnosti *C*, potrebno je da sračunamo integral

$$v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\,dt \tag{8.2}$$

Drugim rečima, ako kao sistem posmatramo kondenzator čiji je ulaz struja a izlaz napon na njegovim krajevima, onda je taj sistem sa memorijom, jer nam je za izračunavanje napona u trenutku $t = t_0$ potrebno poznavanje struje $i(t)$ za $t \le t_0$.

Kauzalni sistemi

Za sistem se kaže da je kauzalan ukoliko njegov izlaz $y(t)$ u trenutku $t = t_0$ zavisi samo od ulaza $x(t)$ za $t \le t_0$. Drugim rečima odziv sistema u sadašnjem trenutku ne može zavisiti od vrednosti ulaznog signala u budućnosti. Prosto rečeno, kauzalan sistem nije 'vidovit' i on ne može da reaguje pre nego što se na njegovom ulazu pojavi neki signal. Međutim, bez obzira što nam se čini da jedino kauzalni sistemi imaju smisla i da su svi sistemi u prirodi kauzalni, ipak u teorijskim razmatranjima se često pojavljuje potreba za analizom ili uvođenjem sistema koji nemaju ovu osobinu.

Lako se može proveriti da su otpornik i kondenzator u prethodnom primeru kauzalni sistemi. Međutim, primeri sistema definisani sledećim jednačinama (8.3) i (8.4) definišu nekauzalne sisteme.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0+1} x(t)\,dt \tag{8.3}$$

i

$$y(t_0) = x(-t_0) \tag{8.4}$$

Na kraju primetimo da su sistemi bez memorije sigurno kauzalni, dok obrnuto ne važi (kauzalni sistemi ne moraju biti bez memorije).

Linearni sistemi

Linearnost je najpoželjnija osobina koju sistem može da ima. Da bi jedan sistem bio linearan mora da zadovolji dva svojstva:

1. **Aditivnost.** Aditivnost znači da ako sistem na ulazni signal $x_1(t)$ generiše odziv $y_1(t)$, i ako na ulaz $x_2(t)$ generiše odziv $y_2(t)$, tada će na pobudu $\left(x_1(t)+x_2(t)\right)$ odgovoriti signalom $\left(y_1(t)+y_2(t)\right)$.
2. **Homogenost.** Za sistem kažemo da ispunjava svojstvo homogenosti ako za neku pobudu $x(t)$ odgovori signalom $y(t)$, tada za pobudu $ax(t)$ treba da generiše na izlazu signal $ay(t)$.

Ova dva uslova mogu da budu preformulisana u jedan jedini uslov koji se zove svojstvo **superpozicije**, i ono glasi ovako: Ako je sistem na pobudu $x_1(t)$ odgovorio odzivom $y_1(t)$ a na pobudu $x_2(t)$ odgovorio odzivom $y_2(t)$, tada sistem na pobudu $\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)$ treba da odgovori signalom $\left(ay_1(t)+by_2(t)\right)$, gde su *a* i *b* bilo koje realne ili kompleksne konstante.

Princip superpozicije se može generalizovati na proizvoljan broj sabiraka u ulaznom i izlaznom signalu. Naime, da bi sistem bio linearan, odnosno zadovoljavao princip superpozicije, tada on za ulazni signal

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \tag{8.5}$$

treba da generiše odziv

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) \tag{8.6}$$

gde je sa $y_k(t)$ označen pojedinačni odgovor sistema na ulazni signal $x_k(t)$.

Opet se jednostavno pokazuje da su otpornik i kondenzator linearni sistemi, dok su sistemi opisani relacijama (8.7) i (8.8) nelinearni:

$$y(t) = \sin\left(x(t)\right) \tag{8.7}$$

ili

$$y(t) = x^2(t) \tag{8.8}$$

Zanimljivo je da je sistem opisan relacijom

$$y(t) = 3x(t) + 4 \tag{8.9}$$

nelinearan iako je relacija (8.9) linearna funkcija ulaznog signala. Njegova nelinearnost se lako dokazuje jer niti je zadovoljen princip homogenosti niti aditivnosti. Recim za $x_1(t)=1$, $y_1(t)=7$ a za $x_2(t)=2$, $y_2(t)=10$, pa iz uslova $x_2(t)=2x_1(t)$ ne sledi $y_2(t)=2y_1(t)$. Uzrok ove nelinearnosti je postojanje konstantnog člana 4 u izrazu (8.9) tako da sistem generiše odziv $y(t)$=4 čak i kada na ulazu nema signala $x(t)=0$. Za ovakve sisteme se kaže da su *inkrementalno linearni*. Ovaj naziv potiče otuda što ako bismo u odnosu na pravi odziv sistema $y(t)$ posmatrali njegov inkrement $\tilde{y}(t)=y(t)-4=3x(t)$, on bi zaista pokazivao osobine homogenosti i aditivnosti.

Stacionarni (vremenski nepromenljivi) sistemi

Sledeća vrlo važna osobina sistema jeste vremenska invarijantnost (ili stacionarnost). Za sistem kažemo da je invarijantan ukoliko za pobudu $x(t-t_0)$ generiše odziv $y(t-t_0)$, pri čemu je $y(t)$ odziv sistema za ulazni signal $x(t)$. Drugim rečima vremenski pomeraj u ulaznom signalu će uticati na vremenski pomeraj u izlazu sistema ali ne i na njegov oblik.

Primer kondenzatora koji se puni strujom $i(t)$ je primer stacionarnog sistema. Zamislimo da se kondenzator punio nekom strujom $i(t)$, tada je napon na njegovim krajevima jednak:

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{8.10}$$

Ukoliko umesto struje $i(t)$, kondenzator punimo zakašnjenom strujom $i(t-t_0)$, tada će napon na krajevima kondenzatora biti:

$$v_1(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau-t_0)\,d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} i(\lambda)\,d\lambda=v(t-t_0) \tag{8.11}$$

što predstavlja dokaz stacionarnosti sistema.

Primer vremenski varijantnih (nestacionarnih sistema) dat je relacijama (8.12) i (8.13):

$$y(t)=x(t)+\sin(\omega_0 t) \tag{8.12}$$

i

$$y(t)=x(-t) \tag{8.13}$$

Recimo, za sistem opisan relacijom (8.12) se lako pokazuje da je nestacionaran, jer ako na ulaz dovedemo signal $x(t-t_0)$ odgovarajući odziv će biti

$$y_1(t)=x(t-t_0)+\sin(\omega t) \tag{8.14}$$

što je različito od

$$y(t-t_0)=x(t-t_0)+\sin(\omega_0(t-t_0)) \tag{8.15}$$

pa je samim tim sistem nestacionaran.

Stabilnost sistema

Moguće je definisati različite vrste stabilnosti sistema, međutim matematički najjednostavniji, i u ovom trenutku najprihvatljiviji pristup jeste stabilnost tipa *ograničen ulaz-*

ograničen izlaz (u engleskoj literaturi se ova definicija stabilnosti zove BIBO *Bounded Input-Bounded Output stability*). Za sistem kažemo da je BIBO stabilan ako iz pretpostavke da je ulazni signal ograničen, sledi da će i izlazni signal takođe biti ograničen po svojoj vrednosti. Matematički zapisano ovaj iskaz izgleda ovako:

$$(\forall t)\left|x(t)\right| \le B_1 \Rightarrow (\exists B_2)\ (\forall t)\ \left|y(t)\right| \le B_2 \tag{8.16}$$

Na osnovu ove definicije zaključujemo da je otpornik BIBO stabilan sistem jer:

$$\left|i(t)\right| \le B_1 \Rightarrow (\exists B_2 = RB_1) \therefore\ \left|v(t)\right| = \left|Ri(t)\right| \le B_2 = RB_1 \tag{8.17}$$

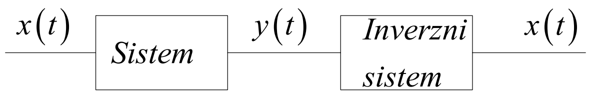
Međutim, za kondenzator se ne može reći da je BIBO stabilan. To se lako i dokazuje. Pretpostavimo da je struja punjenja kondenzatora konstantna $i(t) = B_1$ za $t \ge 0$ i jednaka nuli za $t < 0$, odnosno $i(t) = B_1 u(t)$, gde je $u(t)$ jedinična odskočna funkcija. Tada je napon na njegovim krajevima

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} B_1 u(\tau)\,d\tau = \frac{B_1}{C} r(t) \tag{8.18}$$

gde je sa $r(t)$ jedinična usponska funkcija koja linearno raste sa vremenom i očigledno ne postoji B_2 tako da je $\frac{B_1}{C} r(t) \le B_2$ za svako *t*.

Invertibilni sistemi

Za sistem se kaže da je invertibilan ukoliko se na osnovu izlaza $y(t)$ jednoznačno može odrediti njegov ulazni signal $x(t)$. Drugim rečima, sistem je invertibilan ako i samo ako različiti ulazni signali generišu različite izlazne signale. Tada možemo da generišemo takozvani inverzni sistem koji za pobudu $y(t)$ generiše odziv $x(t)$ (slika 8.1)



Slika 8.1: Ilustracija invertibilnog sistema i njegovog inverznog sistema

I otpornik i kondenzator su invertibilni sistemi. Takođe, invertibilni sistemi su i sistemi definisani relacijama (4.19) i (4.20):

$$y(t) = x^3(t) \tag{8.19}$$

i

$$y(t) = 2x(t+1) + 3 \tag{8.20}$$

jer se znajući funkciju $y(t)$ jednoznačno može odrediti pobuda $x(t)$. Međutim, sistemi definisani relacijama (8.21) i (8.22) nisu invertibilni:

$$y(t) = x^2(t) \tag{8.21}$$

i

$$y(t) = \sin(x(t)) \tag{8.22}$$

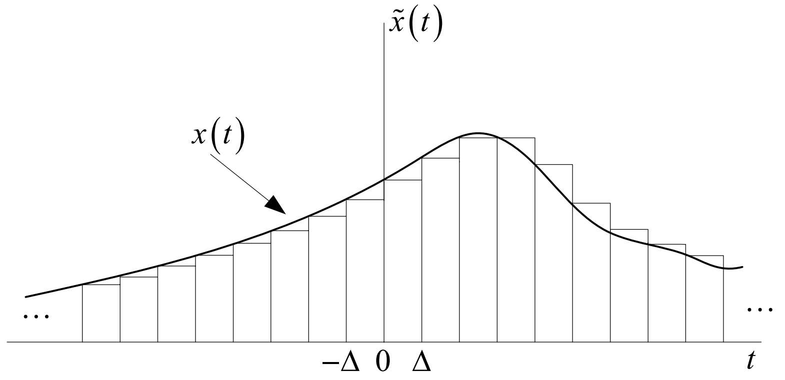
Sve navedene osobine kontinualnih sistema mogu biti značajne za pojedine oblasti primene i analize, međutim dve najvažnije osobine koje treba da zauzmu centralno mesto u analizi koja će biti sprovedena u okviru ovog kursa su linearnost i stacionarnost. Otuda će posebna pažnja biti posvećena ovim dvema osobinama.

Pitanje 9: Linearni stacionarni kontinualni sistemi

Ovakvi sistemi se uobičajeno u engleskoj literaturi označavaju kao LTI (*Linear Time Invariant Systems*) sistemima. Linearni stacionarni kontinualni sistemi se mogu predstavljati ili karakterisati na više različitih načina, a jedan od njih je korišćenjem impulsne, Dirakove funkcije. Otuda se ponovo podsetimo aproksimacije Dirakove funkcije koja je već ranije uvedena:

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{1}{\Delta}\left[u(t) - u(t-\Delta)\right] \tag{9.1}$$

Dalje, primetimo da se proizvoljni kontinualni signal $x(t)$ može dovoljno dobro aproksimirati stepenastom funkcijom $\tilde{x}(t)$, pri čemu je aproksimacija utoliko bolja ukoliko je interval Δ kraći. Ova aproksimacija je prikazana na slici 9.1.



Slika 9.1: Aproksimacija signala $x(t)$ signalom $\tilde{x}(t)$

Uzimajući uobzir definiciju signala $\tilde{\delta}(t)$ relacijom (9.1), lako možemo predstaviti signal $\tilde{x}(t)$ na sledeći način:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{\delta}(t-k\Delta)\Delta \tag{9.2}$$

Sada posmatrajmo granični proces kada Δ teži ka nuli a primenjen na relaciju (9.2)

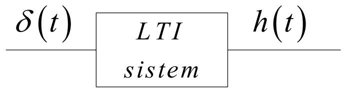
$$\lim_{\Delta\to 0}\tilde{x}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{\delta}(t-k\Delta)\Delta \tag{9.3}$$

Jasno je da izraz na levoj strani teži kontinualnom signalu $x(t)$, međutim, na desnoj strani se nalaze granični proces pred beskonačnom sumom, i kako Δ teži nuli ta beskonačna suma se pretvara u integral, tako da konačno možemo napisati:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{9.4}$$

Ovakva je relacija već dobijena u okviru razmatranja osobina Dirakovog impulsa i nazvana je osobinom izdvajanja signala (ili osobina pomeranja impulsne funkcije).

Sada pretpostavimo da ukoliko na ulaz sistema dovedemo kontinualnu impulsnu funkciju $\delta(t)$ da se na izlazu sistema pojavi signal $h(t)$ koji ćemo zvati impulsni odziv sistema, i da nam je ta funkcija poznata (slika 9.2).



Slika 9.2: Definicija impulsnog odziva sistema $h(t)$

Sada možemo sa $\tilde{h}(t)$ da označimo odziv sistema ukoliko je na njegov ulaz dovedena aproksimacija jedinične impulsne funkcije $\tilde{\delta}(t)$. Kako je posmatrani sistem vremenski invarijantan, za pobudu $\tilde{\delta}(t-k\Delta)$ odziv sistema će biti $\tilde{h}(t-k\Delta)$. Na osnovu relacije (9.22), mi smo signal $\tilde{x}(t)$ predstavili kao beskonačnu sumu signala $\tilde{\delta}(t-k\Delta)$, pa će odziv sistema na pobudu $\tilde{x}(t)$, signal $\tilde{y}(t)$ biti odgovarajuća suma signala $\tilde{h}(t-k\Delta)$ jer je naš sistem linearan a to znači da zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{h}(t-k\Delta)\Delta \tag{9.5}$$

Ako sada na poslednju jednakost primenimo granični proces:

$$\lim_{\Delta\to 0}\tilde{y}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{h}(t-k\Delta)\Delta \tag{9.6}$$

na levoj strani ćemo imati odziv sistema $y(t)$ a na desnoj strani će se pojaviti integral umesto sume, pri čemu će signal $\tilde{h}(\cdot)$ biti zamenjen signalom $h(\cdot)$, član $k\Delta$ će biti zamenjen sa τ a samo Δ sa $d\tau$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{9.7}$$

Poslednji rezultat je izuzetno važan, jer on kaže da se odziv LTI sistema na bilo koju pobudnu (ulaznu funkciju) $x(t)$ može izračunati kao konvolucija tog signala i signala $h(t)$ koji predstavlja jedinični impulsni odziv sistema. Drugim rečima:

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{9.8}$$

Ovaj rezultat znači i to da je za opis sistema, analizu njegovog ponašanja i sračunavanje odziva dovoljno poznavati njegov impulsni odziv. Na osnovu osobine komutativnosti konvolucije, umesto relacije (9.7) može se napisati i:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{9.9}$$

Primer 9.1: Impulsni odziv jednog sistema je

$$h(t) = e^{-at}u(t) \tag{9.10}$$

Na osnovu njega sračunajmo šta će biti jedinični odskočni odziv $s(t)$ (pod jediničnim odskočnim odzivom se smatra izlaz sistema ako je njegov ulazni signal jedinična odskočna funkcija $u(t)$). Na osnovu rezultata (9.9) možemo pisati:

$$s(t)=h(t)*u(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{9.11}$$

Uzimajući u obzir osobine jedinične odskočne funkcije poslednji integral postaje:

$$s(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau \tag{9.12}$$

Nakon smene integracione promenljive $t-\tau=\lambda$, dalje možemo pisati

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda \tag{9.13}$$

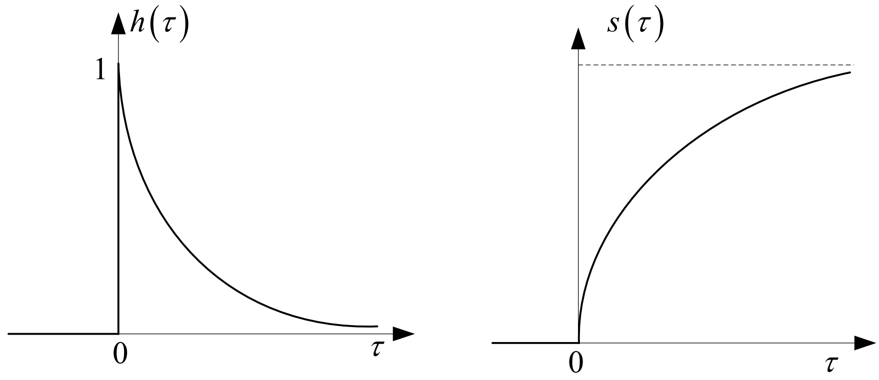
S obzirom na oblik definisane funkcije $h(\lambda)$ relacijom (9.10), odskočni odziv sistema postaje

$$s(t)=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ \int_0^t e^{-a\lambda}d\lambda\ ;\ t\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ -\frac{1}{a}e^{-a\lambda}\Big|_0^t\ ;\ t\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ \frac{1-e^{-at}}{a}\ ;\ t\geq 0\end{cases} \tag{9.14}$$

ili u jednostavnijoj formi:

$$s(t)=\frac{1-e^{-at}}{a}u(t) \tag{9.15}$$

Na slici 9.3. su prikazani impulsni i odskočni odzivi sistema.



Slika 9.3: Impulsni i odskočni odzivi sistema

Jedinični impulsni odziv nije jedina mogućnost da se sistem opiše. Ukoliko je pobudni signal $x(t)$ napisan u obliku zbira jediničnih odskočnih funkcija:

$$x(t)=\sum_k a_k u(t-t_k) \tag{9.16}$$

tada je korisno sistem opisati jediničnim odskočnim odzivom $s(t)$, jer se izlazni signal sistema, korišćenjem osobine superpozicije, lako sračunava shodno sledećoj relaciji:

$$y(t)=\sum_k a_k s(t-t_k) \tag{9.17}$$