

Pitanje 17: Periodični signali i Fourier-ov red

Već smo rekli da je kontinualni signal $x(t)$ periodičan ukoliko zadovoljava sledeću relaciju:

$$x(t+T) = x(t) \quad (17.1)$$

za neku nenultu konstantu T i za sve vrednosti vremenske promenljive t . Perioda signala je najmanje nenulta pozitivna vrednost T za koju je (17.1) zadovoljeno. Osnovni primer periodičnog signala je realna sinusoida

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (17.2)$$

gde je A realna konstanta i $\omega_0 > 0$, ili kompleksna sinusoida

$$x(t) = A e^{j\omega_0 t} \quad (17.3)$$

gde je A kompleksni broj. Oba ova signala su periodična sa periodom $T = 2\pi / \omega_0$. Vrlo često se u literaturi sreće i takozvani harmonični signal definisan sledećom relacijom:

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad (17.4)$$

gde je k element skupa celih brojeva, i ovaj signal ima periodu $T = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$ ako je k različito od nule

(u slučaju $k=0$ signal $x_k(t)$ je konstantan, takozvani *DC* signal i svaka realna vrednost T zadovoljava relaciju (17.1)). Kako smo u prethodnom pitanju zaključili, svi eksponencijalni signali, realni ili kompleksni, su sopstvene funkcije LTI sistema. To znači da je i harmonični signal (17.16) takođe sopstvena funkcija.

Posmatrajmo sada harmonični ili trigonometrijski red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.5)$$

sa kompleksnim koeficijentima a_k . Komponente ovog reda koje se dobijaju za $k = \pm 1$ se nazivaju osnovnim ili fundamentalnim komponentama reda, dok se sabirci za $|k| \geq 2$ nazivaju harmoničnim komponentama ili višim harmonicima. Pošto je perioda osnovne komponente $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ceo multipl

periode k -tog harmonika $T_k = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$, zaključujemo da je trigonometrijski red (17.6) periodičan sa

periodom T_1 . Osnovna ideja od koje je krenuo Fourier je bila da se svaki periodičan signal može predstaviti harmoničnim ili trigonometrijskim redom u formi koja je identična ili slična relaciji (17.5). P.L. Dirichlet je kasnije ovu pretpostavku i dokazao za sve osim za ograničen broj, takozvanih devijantnih slučajeva. Otuda se reprezentacija periodičnog signala kakva je data relacijom (17.17) naziva *Fourier-ovim redom*, a uslovi pod kojima jednakost u ovoj relaciji važi se nazivaju *Dirichlet-ovim* uslovima.

Primer 17.1: Pođimo od vrlo jednostavne realne sinusoida

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (17.6)$$

Imajući u vidu Euler-ovu predstavu kompleksnih brojeva, ova realna sinusoida se može napisati preko kompleksnih sinusoida u formi

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad (17.7)$$

Očigledno je forma (17.7) zapravo Fourier-ov red pri čemu je

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k &= 0 \text{ za } k \neq \pm 1 \end{aligned} \quad (17.8)$$

Slično tome, ukoliko posmatramo realni sinusni signal

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (17.9)$$

opet možemo doći do Fourier-ovog reda na sledeći način:

$$x(t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.10)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_{-1} = \frac{1}{2j} \\ a_k &= 0 \text{ za } k \neq \pm 1 \end{aligned} \quad (17.11)$$

Ukoliko posmatramo nešto složeniji signal kao što je

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \quad (17.12)$$

u želji da ga predstavimo Fourier-ovim redom, treba da se poslužimo trigonometrijskim identitetom:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad (17.13)$$

pa onda dobijamo jednakost:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}(e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}) \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4}e^{2j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (17.14)$$

odnosno

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.15)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{-2} &= -\frac{1}{4}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_k &= 0 \text{ za } k \geq 3 \end{aligned} \quad (17.16)$$

Na ovim jednostavnim primerima smo ilustrovali traženje sopstvenih funkcija i sopstvenih vrednosti nekih jednostavnijih periodičnih signala. Takođe, podsetimo se da ako je $x(t)$ periodičan signal koji je doveden na ulaz nekog LTI sistema, tada se odziv tog sistema $y(t)$ može dobiti konvolucijom impulsnog odziva i pobude: $y(t) = x(t) * h(t)$. Kako smo pretpostavili da je pobuda

$x(t)$ periodična onda se ona može napisati u formi $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$, gde je $s_k = jk\omega_0$, i pošto je u pitanju linearan sistem, tada se odziv može takođe napisati u formi Fourier-ovog reda

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (17.17)$$

gde je

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \quad (17.18)$$

Primer 17.2: Potražimo izlaz LTI sistema ako je njegov impulsni odziv

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t); \quad \alpha > 0 \quad (17.19)$$

i ako je na njegovom ulazu periodičan signal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) \quad (17.20)$$

Uzimajući u obzir rešenje prethodnog primera (relacije (17.15) i (17.16)) i relaciju (17.18) jednostavno možemo pisati:

$$y(t) = \sum_{k=-2}^2 c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.21)$$

gde su nepoznati koeficijenti:

$$c_{-2} = -\frac{1}{4} H(-2j\omega_0), c_{-1} = \frac{1}{2} H(-j\omega_0), c_0 = \frac{1}{2} H(0), c_1 = \frac{1}{2} H(j\omega_0), c_2 = -\frac{1}{4} H(2j\omega_0) \quad (17.22)$$

U želji da sračunamo koeficijente $H(jk\omega_0)$ treba rešiti sledeći integral:

$$\begin{aligned} H(jk\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + jk\omega_0)\tau} d\tau \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha + jk\omega_0} e^{-(\alpha + jk\omega_0)\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha + jk\omega_0} \end{aligned} \quad (17.23)$$

Tada konačno, konačno koeficijenti u Fourier-ovom redu (17.21) postaju:

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{\alpha/2}{\alpha + j\omega_0}, c_{-1} = \frac{\alpha/2}{\alpha - j\omega_0}, c_2 = \frac{-\alpha/4}{\alpha + 2j\omega_0}, c_{-2} = \frac{-\alpha/4}{\alpha - 2j\omega_0} \quad (17.24)$$

Fourier-ov red realnih signala

Primetimo da smo u svim dosadašnjim primerima tražili Fourier-ove redove realnih signala i da je za svaki od njih važio uslov:

$$a_{-k} = a_k^* \quad (17.25)$$

ili $c_{-k} = c_k^*$, gde superskript $*$ označava konjugovanu kompleksnost. Ovo se tvrđenje lako može dokazati. Ako pođemo od relacije (17.15) i na nju primenimo operaciju konjugacije, dobijamo

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \quad (17.26)$$

Ukoliko u poslednjoj sumi izvršimo smenu k sa $-k$ i uzimajući u obzir da je $x(t) = x^*(t)$ za realne signale, dobija se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad (17.27)$$

Upoređujući poslednji izraz sa izrazom (17.15), zaključuje se da je relacija (17.25) valjana za svaki realan signal $x(t)$. Shodno tome Fourier-ov red realnih signala se može napisati u sledećoj formi:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) \quad (17.28)$$

ili ekvivalentno tome

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}) \quad (17.29)$$

Ukoliko koeficijent a_k napišemo u Euler-ovoj formi

$$a_k = A_k e^{j\Theta_k} \quad (17.30)$$

relacija (17.29) postaje

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{j(k\omega_0 t + \Theta_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \Theta_k)}) \quad (17.31)$$

odnosno

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \Theta_k) \quad (17.32)$$

Time je signal $x(t)$ napisan u formi zbira realnih sinusoida učestanosti $k\omega_0$, sa početnim fazama Θ_k i amplitudama A_k . Ovo je jedan od najčešćih načina reprezentacije Fourier-ovog reda za realne signale.

Druga alternativna forma reprezentacije Fourier-ovog reda jeste takozvana pravougaona forma, u kojoj se koeficijent a_k predstavi preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$a_k = B_k + jC_k \quad (17.33)$$

Tada relacija (17.29) postaje

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)) \quad (17.34)$$

gde u poslednjoj relaciji ne figuriše faza sinusoida Θ_k ali se zato pojavljuju i sinusna i kosinusna komponenta. U svom originalnom radu, Fourier je predstavio red baš u formi kakva je relacija (17.34).

Određivanje koeficijenata Fourier-ovog reda

U primerima 17.1 i 17.2. mi smo odredili koeficijente Fourier-ovog reda na osnovu Euler-ove formule i nekih trigonometrijskih identiteta. Međutim, u opštem slučaju, kada su signali koje analiziramo složenije prirode, primena ovakvog postupka je prilično ograničena. Potrebno nam je da razvijemo opšti postupak za nalaženje koeficijenta Fourier-ovog reda za bilo koji periodičan signal $x(t)$, naravno pod pretpostavkom da Fourier-ov red konvergira (setimo se Dirichlet-ovih uslova). U ovom odeljku ćemo razviti takav metod.

Podimo opet od početne pretpostavke da se periodični signal $x(t)$ može predstaviti u formi Fourier-ovog reda:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.35)$$

i pomnožimo levu i desnu stranu ove relacije sa $e^{-jn\omega_0 t}$:

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \quad (17.36)$$

Integraleći obe strane poslednje jednačine u vremenu dužine koja je jednaka periodi T signala $x(t)$, dobija se

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (17.37)$$

gde oznaka \int_T označava integral po proizvoljnom intervalu $(t_0, t_0 + T)$ dužine T . Ukoliko izvršimo zamenu redosleda operacije integraljenja i sumiranja, poslednja relacija postaje:

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \quad (17.38)$$

Ukoliko želimo da izračunamo integral na desnoj strani jednakosti, primenim Euler-ovu formulu:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_T \cos((k-n)\omega_0 t) dt + j \int_T \sin((k-n)\omega_0 t) dt \quad (17.39)$$

Za $k \neq n$, $\cos((k-n)\omega_0 t)$ i $\sin((k-n)\omega_0 t)$ su realne sinusoide učestanosti $(k-n)\omega_0$ i periode $T/|k-n|$. Otuda, integraleći ove sinusoide po intervalu dužine T , mi jedan isti oblik integralimo $|k-n|$ puta jer toliko se perioda sadrži u intervalu vremena T , pa se za svaki od ovih integrala kao rezultat dobija nula. Sa druge strane, kada je $k = n$ podintegralna funkcija na levoj strani postaje $e^{j0} = 1$, pa je vrednost integrala jednaka T . Kombinujući ova dva rezultata dobijamo:

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (17.40)$$

Ako ovaj rezultat uvrstimo u desnu stranu relacije (17.38), dobijamo

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n T \quad (17.41)$$

što nas dovodi do željenog rezultata. Sledeće dve relacije su vrlo važne i definišu takozvani *Fourier-ov par*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.42)$$

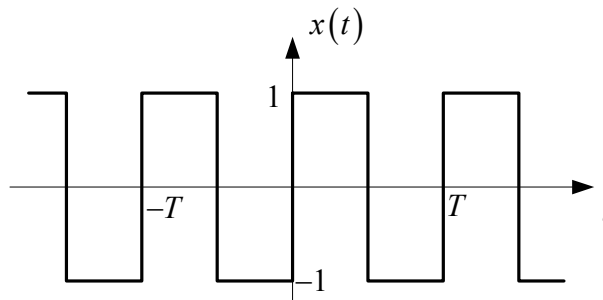
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (17.43)$$

Relacija (17.42) se naziva *sintetičkom relacijom*, a relacija (17.43) *analitičkom relacijom* Fourier-ovog reda. Još na kraju primetimo da je

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (17.44)$$

što zapravo znači da koeficijent a_0 predstavlja srednju vrednost signala $x(t)$ u toku jedne njegove periode.

Primer 17.3: Posmatrajmo periodičan signal $x(t)$ prikazan na slici 17.1. U pitanju je takozvana povorka četvrtki i ovo je signal koji se često koristi u teoriji obrade signala i teoriji komunikacija.



Slika 17.1: Povorka četvrtki sa neparnom simetrijom

Shodno relaciji (17.55) koeficijente a_k izračunavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-1) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{T/2} - \frac{1}{-Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{T/2}^T \\ &= \frac{1}{-Tjk\omega_0} (e^{-jk\pi} - e^{-j0}) - \frac{1}{-Tjk\omega_0} (e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi}) \end{aligned} \quad (17.45)$$

Uzimajući u obzir da je $e^{-j\pi} = -1$ i da je $e^{-j2\pi} = 1$, dalje se dobija

$$a_k = \frac{2}{jk2\pi} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \frac{2}{jk\pi}, & \text{za neparno } k \\ 0, & \text{za parno } k \end{cases} \quad (17.46)$$

Ovaj rezultat je vrlo važan, jer nam on govori da povorka četvrtki sa neparnom simetrijom ima samo neparne harmonike i da njihova vrednost opada brzinom $1/k$. Ako zamenimo ovaj rezultat u relaciju (17.42) dobijamo

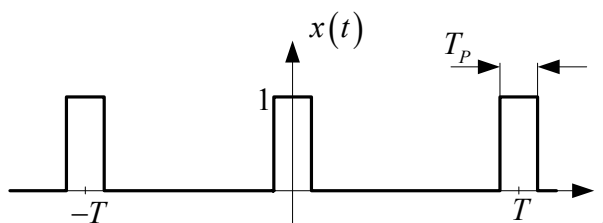
$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\omega_0 t} \quad (17.47)$$

Sređivanjem poslednje sume i uzimajući u obzir posebno pozitivne a posebno negativne indekse k , možemo signal x napisati u sledećoj formi:

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \quad (17.48)$$

što predstavlja formu Fourier-ovog reda kakva je data u relaciji (17.32) s tim što su koeficijenti $C_k = -2 / k\pi$.

Primer 17.4: Posmatrajmo povorku pravougaonih četvrtki $x(t)$ kakva je prikazana na slici 17.2.



Slika 17.2: Pravougaona povorka četvrtki

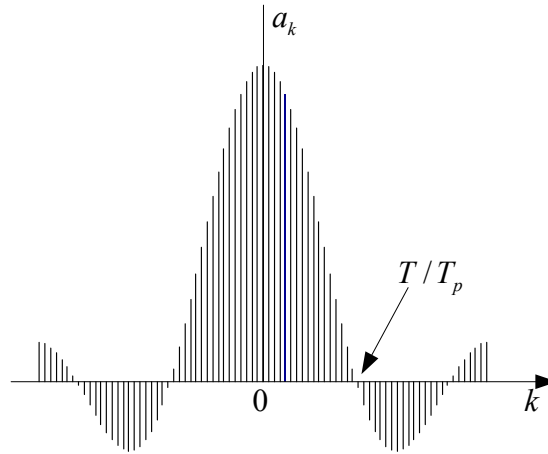
Slično malopredašnjem postupku, ako želimo da odredimo Fourier-ov red za prikazani signal, treba sračunati sledeći integral:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{-jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_p/2}^{T_p/2} \\ &= -\frac{1}{jk2\pi} (e^{-jk\omega_0 T_p/2} - e^{jk\omega_0 T_p/2}) = \frac{\sin(k\omega_0 T_p/2)}{k\pi} \end{aligned} \quad (17.49)$$

Jasno je da za $k=0$, poslednji izraz dobija formu $0/0$, pa je potrebno primeniti L'Hopital-ovo pravilo na osnovu koga se dobija da je

$$a_0 = \frac{\omega_0 T_p}{2\pi} = \frac{T_p}{T} \quad (17.50)$$

što očigledno predstavlja srednju vrednost signala na intervalu dužine T . Na slici 17.3. su prikazani koeficijenti a_k pod pretpostavkom da je $T_p \ll T$. Ovakva reprezentacija Fourier-ovih koeficijenata se naziva *spektrumom signala*.



Slika 17.3: Fourier-ovi koeficijenti povorke četvrtki

Primetimo da se prvi koeficijent koji je jednak nuli dešava kada je $k\omega_0 T_p / 2 = \pi$, odnosno za $k = T / T_p$. Prisetimo još da u specijalnom slučaju kada je $T_p = T / 2$, signal $x(t)$ počinje da liči na signal iz prethodnog primera, s tim što je transliran naviše, pa ima srednju vrednost $a_0 = 1/2$ a ostali Fourier-ovi koeficijenti dobijaju formu

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi}, & \text{za neparno } k \\ 0, & \text{za parno } k \neq 0 \end{cases} \quad (17.51)$$

Konvergenција Fourier-ovih redova

U prethodnom izlaganju je pokazano kako se izračunavaju koeficijenti Fourier-ovog reda za zadati periodični signal, ali ni jednog momenta se nismo pitali da li uopšte dobijeni red konvergira, a to jeste vrlo važno pitanje. Pitanje konvergenije možemo formulisati na sledeći način: znamo da Fourier-ov red podrazumeva da se periodičan signal $x(t)$ može predstaviti na sledeći način:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.52)$$

Ako umesto ovog beskonačnog reda formiramo njegovu aproksimaciju kao red sa konačnim brojem sabiraka:

$$x_K(t) = \sum_{k=-K}^K a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (17.53)$$

pitanje konvergenije postaje pitanje da li sa povećavanjem broja sabiraka, odnosno kada $K \rightarrow \infty$, signal $x_K(t)$ postaje sve bliži signalu $x(t)$. U poslednjoj rečenici je upotrebljen pridev 'bliži' međutim, matematički govoreći neophodno je definisati kriterijum po kome možemo ceniti koliko su dva signala bliska. U tom smislu, definišimo signal greške ili rezlike između ova dva signala na sledeći način:

$$e_K(t) = x(t) - x_K(t) \quad (17.54)$$

U želji da sličnost dva signala merimo preko jedne vrednosti, možemo definisati normu nad signalom $e_K(t)$. Uobičajeno se uvodi srednja kvadratna norma (u engleskoj literaturi se ova norma obično označava kao MSE *norm* od reči *Mean-Square-Error*):

$$E_K = \frac{1}{T} \int_T |e_K(t)|^2 dt \quad (17.55)$$

Tada pitanje konvergencije može da se formuliše u smislu da li norma $E_K \rightarrow 0$ kada $K \rightarrow \infty$. Ako je odgovor na ovo pitanje potvrđan, mi onda kažemo da Fourier-ov red konvergira ka signalu $x(t)$. Poslednji iskaz je vrlo važan, i ne zaboravimo da konvergencija Fourier-ovog ne znači sledeći iskaz $\lim_{K \rightarrow \infty} e_K(t) = 0$. Ponekada jeste tako, ali nije generalno pravilo.

Matematičari su se bavili ovim problemom i definisali dovoljne uslove koje signal treba da zadovolji da bi njegov Fourier-ov red konvergirao. Poznata su tri takva uslova i dovoljno je da signal zadovolji jedan, bilo koji, od njih.

1. **uslov:** Ako je periodičan signal $x(t)$ kontinualna funkcija vremena t , Fourier-ov red konvergira. (U tom slučaju je konvergencija uniformna, što je još strožija vrsta konvergencije od MSE konvergencije)
2. **uslov:** Ako je signal $x(t)$ kvadratno integrabilan duž periode T , odnosno ako je zadovoljen sledeći uslov

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (17.56)$$

tada je njegov Fourier-ov red takođe konvergentan.

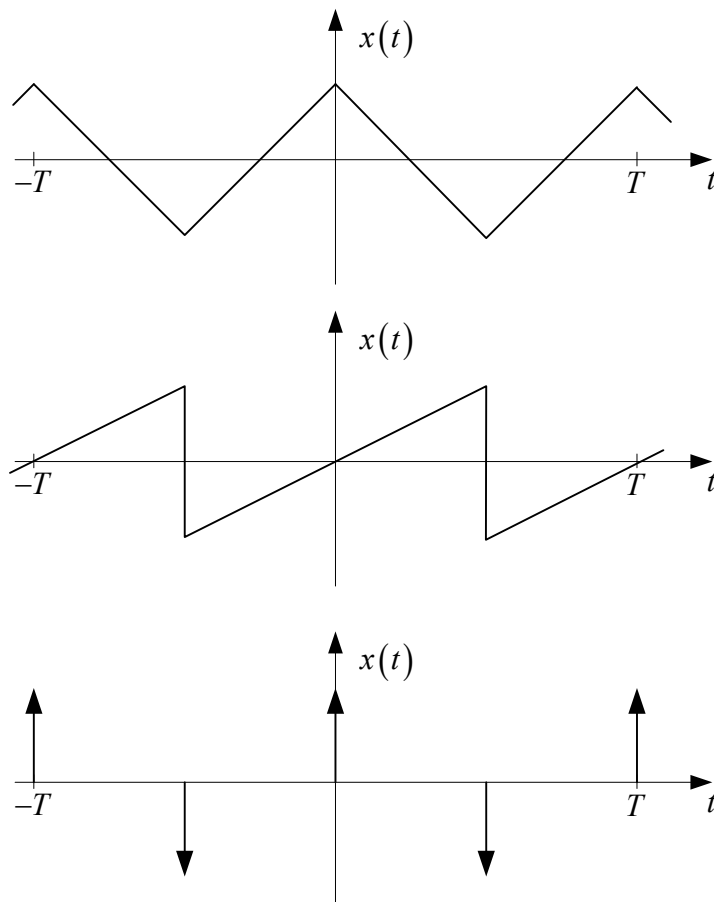
3. **uslov:** (Dirichlet-ov uslov) Osim za konačan broj 'patoloških' specijalnih slučajeva, dovoljan uslov da Fourier-ov red konvergira je da signal $x(t)$ bude apsolutno integrabilan duž periode T :

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \quad (17.57)$$

Patološki slučajevi se eliminišu dodavanjem dva dodatna zahteva, a to su: a) da signal $x(t)$ mora imati konačan broj maksimuma i minimuma duž jedne periode T , i b) da signal $x(t)$ mora imati konačan broj diskontinuiteta duž jedne periode T i da je vrednost funkcije u tim diskontinuitetima konačna.

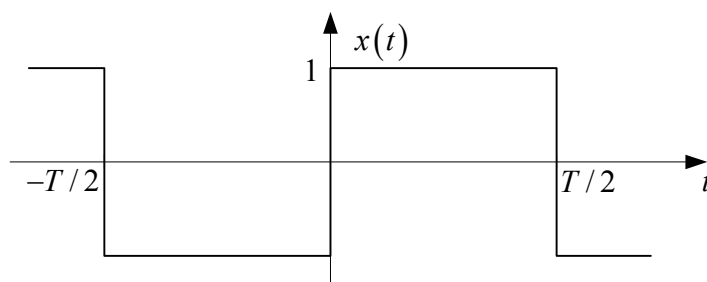
Primer 17.5: Na slici 17.4. su data tri periodična signala. Ako želimo da odredimo da li odgovarajući Fourier-ovi redovi konvergiraju, treba da proverimo da li prikazani signali zadovoljavaju neki od navedenih uslova. Prvi signal, takozvani trougaoni jeste neprekidna funkcija vremena, pa po prvom uslovu njegov Fourier-ov red konvergira. Drugi, testerasti signal ima prekide u tačkama $0, \pm T/2, \pm 3T/2, \dots$ tako da se na njega ne može primeniti prvi uslov, ali sigurno zadovoljava drugi uslov jer je integral njegovog kvadrata duž jedne periode očigledno konačan. Dakle i njegov Fourier-ov red je konvergentan. Konačno, treći prikazani signal, odnosno periodična povorka impulsa ne zadovoljava ni prvi ni drugi uslov, ali zadovoljava treći. Naime, treći signal jeste apsolutno integrabilan duž jedne periode, i još, duž jedne periode ima samo jedan maksimum i jedan minimum, i pri tome ima dva diskontinuiteta a granične vrednosti i sa jedne i sa druge strane diskontinuiteta su konačne. Time treći signal zadovoljava treći uslov pa je i njegov Fourier-ov red konvergentan. Treba još reći da ukoliko neki signal (kao što je periodična povorka impulsa) zadovoljava treći uslov, da tada signal $e_K(t) \rightarrow 0$ kada $K \rightarrow \infty$ za svako t osim u tačkama

diskontinuiteta. U tačkama diskontinuiteta Fourier-ov red konvergira ka srednjoj vrednosti graničnih vrednosti sa leve i desne strane diskontinuiteta.



Slika 17.4: Primer tri periodična signala (trougaooni, testerasti i periodična povorka impulsa)

Primer 17.6: Pogledajmo signal $x(t)$ koji je prikazan na slici 17.5.

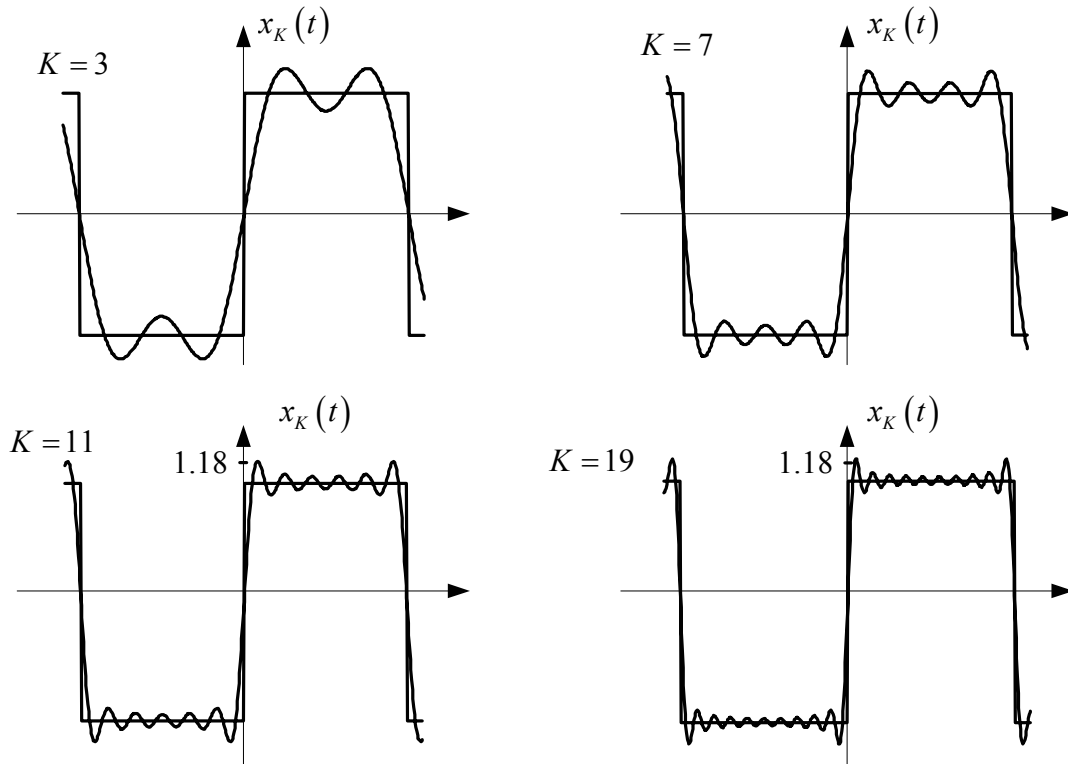


Slika 17.5: Primer periodičnog signala

Ako poželimo da odredimo Fourier-ov red koji odgovara ovom signalu treba da ponovimo postupak iz primera 17.3, gde je dobijena sledeća relacija:

$$x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{2}{jk\pi} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \quad (17.58)$$

Na slici 17.6. su prikazani signali $x_K(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^K \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t)$ za različite vrednosti K kako bi ilustrovali proces konvergencije reda.



Slika 17.6: Ilustracija konvergencije Fourier-ovog reda

Primetimo da sa povećanjem parametra K , talasanja u signalu $x_K(t)$ (takozvani *rippling* u engleskoj literaturi) postaje sve uže i uže, ali preskoci se ne smanjuju. I za $K=11$ i za $K=19$, preskok iznosi oko 18%. Ova se pojava naziva *Gibbs-ovim* efektom i uvek se javlja kada Fourier-ovim redom aproksimiramo signal koji sadrži diskontinuitete. Možda deluje zbunjujuće da $e_K(t) \rightarrow 0$ kada $K \rightarrow \infty$ a da se pri tome ovaj prekok ne smanjuje. Međutim, objašnjenje leži u činjenici da se širina ovog preskoka sa povećanjem K smanjuje, i da se za svaku vrednost vremenske promenljive t može naći dovoljno veliko K tako da je $e_K(t)$ proizvoljno malo.