# Pitanje 8: Pregled i osobine kontinualnih sistema

Kao što smo već rekli, sistem je uređaj, proces ili algoritam čiji je zadatak da obrađuje ili generiše signale. Mi ćemo se u okviru ovog kursa uglavnom baviti sistemima sa jednim ulazom i jednim izlazom. Sistemi se mogu podeliti u veliki broj kategorija zavisno od njihovih osobina. Postoje tri ključne osobine po kojima se sistemi dele u različite grupe. Jedna od njih je već pomenuta a odnosi se na prirodu signala koje sistem koristi kao svoje ulaze ili koje generiše i shodno tome se sistemi dele na kontinualne i diskretne. Druga važna osobina je linearnost, pa se sistemi dele na linearne i nelinearne i konačno treća osobina je stacionarnost (nepromenljivost) u vremenu pa se po toj osobini sistemi dele na stacionarne i nestacionarne ili na vremenski nepromenljive ili promenljive. U okviru ovog pitanja, bavićemo se kontinualnim sistemima uopšte. U okviru linearnih sistema postoje neke specifične osobine koje mogu biti zanimljive, pa ćemo otuda izvršiti kratki prikaz takvih sistema.

### *Sistemi sa memorijom*

Za sistem kažemo da ima memoriju ukoliko odziv sistema $y(t)$ u trenutku $t = t_0$ zavisi ne samo od ulaznog signala u tom istom trenku $x(t_0)$ već i od vrednosti uzlaznog signala u nekim drugim vremenskim trenucima. Dakle, da bismo sračunali izlaz sistema sa memorijom $y(t_0)$ u trenutku $t = t_0$, potrebno nam je poznavanje ulaznog signala $x(t)$ u prošlosti $(t < t_0)$ ili u budućnosti $(t > t_0)$. U suprotnom, ako je za izračunavanje izlaza $y(t_0)$ dovoljno poznavati $x(t_0)$ kažemo da je sistem bez memorije.

Jednostavan primer sistema bez memorije jeste primena Omovog zakona za izračunavanje napona na krajevima otpornika kroz koji protiče neka poznata struja *i*:

$$v(t_0) = Ri(t_0) \tag{4.1}$$

Sa druge strane, ukoliko želimo da sračunamo vrednost napona na krajevima kondenzatora kapacitivnosti *C*, potrebno je da sračunamo integral

$$v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\,dt \tag{4.2}$$

Drugim rečima, ako kao sistem posmatramo kondenzator čiji je ulaz struja a izlaz napon na njegovim krajevima, onda je taj sistem sa memorijom, jer nam je za izračunavanje napona u trenutku $t = t_0$ potrebno poznavanje struje $i(t)$ za $t \le t_0$.

### *Kauzalni sistemi*

Za sistem se kaže da je kauzalan ukoliko njegov izlaz $y(t)$ u trenutku $t = t_0$ zavisi samo od ulaza $x(t)$ za $t \le t_0$. Drugim rečima odziv sistema u sadašnjem trenutku ne može zavisiti od vrednosti ulaznog signala u budućnosti. Prosto rečeno, kauzalan sistem nije 'vidovit' i on ne može da reaguje pre nego što se na njegovom ulazu pojavi neki signal. Međutim, bez obzira što nam se čini da jedino kauzalni sistemi imaju smisla i da su svi sistemi u prirodi kauzalni, ipak u teorijskim razmatranjima se često pojavljuje potreba za analizom ili uvođenjem sistema koji nemaju ovu osobinu.

Lako se može proveriti da su otpornik i kondenzator u prethodnom primeru kauzalni sistemi. Međutim, primeri sistema definisani sledećim jedančinama (4.3) i (4.4) definišu nekauzalne sisteme.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0+1} x(t)\,dt \tag{4.3}$$

i

$$y(t_0) = x(-t_0) \tag{4.4}$$

Na kraju primetimo da su sistemi bez memorije sigurno kauzalni, dok obrnuto ne važi (kauzalni sistemi ne moraju biti bez memorije).

***Linearni sistemi***

Linearnost je najpoželjnija osobina koju sistem može da ima. Da bi jedan sistem bio linearan mora da zadovolji dva svojstva:

1. **Aditivnost.** Aditivnost znači da ako sistem na ulazni signal $x_1(t)$ generiše odziv $y_1(t)$, i ako na ulaz $x_2(t)$ generiše odziv $y_2(t)$, tada će na pobudu $\left(x_1(t)+x_2(t)\right)$ odgovoriti signalom $\left(y_1(t)+y_2(t)\right)$.
2. **Homogenost.** Za sistem kažemo da ispunjava svojstvo homogenosti ako za neku pobudu $x(t)$ odgovori signalom $y(t)$, tada za pobudu $ax(t)$ treba da generiše na izlazu signal $ay(t)$.

Ova dva uslova mogu da budu preformulisana u jedan jedini uslov koji se zove svojstvo **superpozicije**, i ono glasi ovako: Ako je sistem na pobudu $x_1(t)$ odgovorio odzivom $y_1(t)$ a na pobudu $x_2(t)$ odgovorio odzivom $y_2(t)$, tada sistem na pobudu $\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)$ treba da odgovori signalom $\left(ay_1(t)+by_2(t)\right)$, gde su *a* i *b* bilo koje realne ili kompleksne konstante.

Princip superpozicije se može generalizovati na proizvoljan broj sabiraka u ulaznom i izlaznom signalu. Naime, da bi sistem bio linearan, odnosno zadovoljavao princip superpozicije, tada on za ulazni signal

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \tag{4.5}$$

treba da generiše odziv

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) \tag{4.6}$$

gde je sa $y_k(t)$ označen pojedinačni odgovor sistema na ulazni signal $x_k(t)$.

Opet se jednostavno pokazuje da su otpornik i kondenzator linearni sistemi, dok su sistemi opisani realcijama (4.7) i (4.8) nelinearni:

$$y(t) = \sin\left(x(t)\right) \tag{4.7}$$

ili

$$y(t) = x^2(t) \tag{4.8}$$

Zanimljivo je da je sistem opisan relacijom

$$y(t) = 3x(t) + 4 \tag{4.9}$$

nelinearan iako je relacija (4.9) linearna funkcija ulaznog signala. Njegova nelinearnost se lako dokazuje jer niti je zadovoljen princip homogenosti niti aditivnosti. Recim za $x_1(t)=1$, $y_1(t)=7$ a za $x_2(t)=2$, $y_2(t)=10$, pa iz uslova $x_2(t)=2x_1(t)$ ne sledi $y_2(t)=2y_1(t)$. Uzrok ove nelinearnosti je postojanje konstantnog člana 4 u izrazu (4.9) tako da sistem generiše odziv $y(t)$=4 čak i kada na ulazu nema signala $x(t)=0$. Za ovakve sisteme se kaže da su *inkrementalno linearni*. Ovaj naziv potiče otuda što ako bismo u odnosu na pravi odziv sistema $y(t)$ posmatrali njegov inkrement $\tilde{y}(t)=y(t)-4=3x(t)$, on bi zaista pokazivao osobine homogenosti i aditivnosti.

### *Stacionarni (vremenski nepromenljivi) sistemi*

Sledeća vrlo važna osobina sistema jeste vremenska invarijantnost (ili stacionarnost). Za sistem kažemo da je invarijantan ukoliko za pobudu $x(t-t_0)$ generiše odziv $y(t-t_0)$, pri čemu je $y(t)$ odziv sistema za ulazni signal $x(t)$. Drugim rečima vremenski pomeraj u ulaznom signalu će uticati na vremenski pomeraj u izlazu sistema ali ne i na njegov oblik.

Primer kondenzatora koji se puni strujom $i(t)$ je primer stacionarnog sistema. Zamislimo da se kondenzator punio nekom strujom $i(t)$, tada je napon na njegovim krajevima jednak:

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{4.10}$$

Ukoliko umesto struje $i(t)$, kondenzator punimo zakašnjenom strujom $i(t-t_0)$, tada će napon na krajevima kondenzatora biti:

$$v_1(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau-t_0)\,d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} i(\lambda)\,d\lambda=v(t-t_0) \tag{4.11}$$

što predstavlja dokaz stacionarnosti sistema.

Primer vremenski varijantnih (nestacionarnih sistema) dat je relacijama (4.12) i (4.13):

$$y(t)=x(t)+\sin(\omega_0 t) \tag{4.12}$$

i

$$y(t)=x(-t) \tag{4.13}$$

Recimo, za sistem opisan relacijom (4.12) se lako pokazuje da je nestacionaran, jer ako na ulaz dovedemo signal $x(t-t_0)$ odgovarajući odziv će biti

$$y_1(t)=x(t-t_0)+\sin(\omega t) \tag{4.14}$$

što je različito od

$$y(t-t_0)=x(t-t_0)+\sin(\omega_0(t-t_0)) \tag{4.15}$$

pa je samim tim sistem nestacionaran.

### *Stabilnost sistema*

Moguće je definisati različite vrste stabilnosti sistema, međutim matematički najjednostavniji, i u ovom trenutku najprihvatljiviji pristup jeste stabilnost tipa *ograničen ulaz-*

*ograničen izlaz* (u engleskoj literaturi se ova definicija stabilnosti zove BIBO *Bounded Input-Bounded Output stability*). Za sistem kažemo da je BIBO stabilan ako iz pretpostavke da je ulazni signal ograničen, sledi da će i izlazni signal takođe biti ograničen po svojoj vrednosti. Matematički zapisano ovaj iskaz izgleda ovako:

$$(\forall t)\left|x(t)\right| \leq B_1 \Rightarrow (\exists B_2)\,(\forall t)\,\left|y(t)\right| \leq B_2 \tag{4.16}$$

Na osnovu ove definicije zaključujemo da je otpornik BIBO stabilan sistem jer:

$$\left|i(t)\right| \leq B_1 \Rightarrow (\exists B_2 = RB_1)\left|v(t)\right| = \left|Ri(t)\right| \leq B_2 = RB_1 \tag{4.17}$$

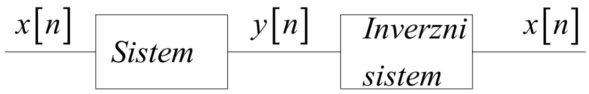
Međutim, za kondenzator se ne može reći da je BIBO stabilan. To se lako i dokazuje. Pretpostavimo da je struja punjenja kondenzatora konstantna $i(t) = B_1$ za $t \geq 0$ i jednaka nuli za $t < 0$, odnosno $i(t) = B_1 u(t)$, gde je $u(t)$ jedinična odskočna funkcija. Tada je napon na njegovim krajevima

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} B_1 u(\tau)\,d\tau = \frac{B_1}{C} r(t) \tag{4.18}$$

gde je sa $r(t)$ jedinična usponska funkcija koja linearno raste sa vremenom i očigledno ne postoji $B_2$ tako da je $\frac{B_1}{C} r(t) \leq B_2$ za svako *t*.

***Invertibilni sistemi***

Za sistem se kaže da je invertibilan ukoliko se na osnovu izlaza $y(t)$ jednoznačno može odrediti njegov ulazni signal $x(t)$. Drugim rečima, sistem je invertibilan ako i samo ako različiti ulazni signali generišu različite izlazne signale. Tada možemo da generišemo takozvani inverzni sistem koji za pobudu $y(t)$ generiše odziv $x(t)$ (slika 4.1)




Slika 4.1: Ilustracija invertibilnog sistema i njegovog inverznog sistema

I otpornik i kondenzator su invertibilni sistemi. Takođe, invertibilni sistemi su i sistemi definisani relacijama (4.19) i (4.20):

$$y(t) = x^3(t) \tag{4.19}$$

i

$$y(t) = 2x(t+1) + 3 \tag{4.20}$$

jer se znajući funkciju $y(t)$ jednoznačno može odrediti pobuda $x(t)$. Međutim, sistemi definisani relacijama (4.21) i (4.22) nisu invertibilni:

$$y(t) = x^2(t) \tag{4.21}$$

i

$$y(t) = \sin(x(t)) \tag{4.22}$$

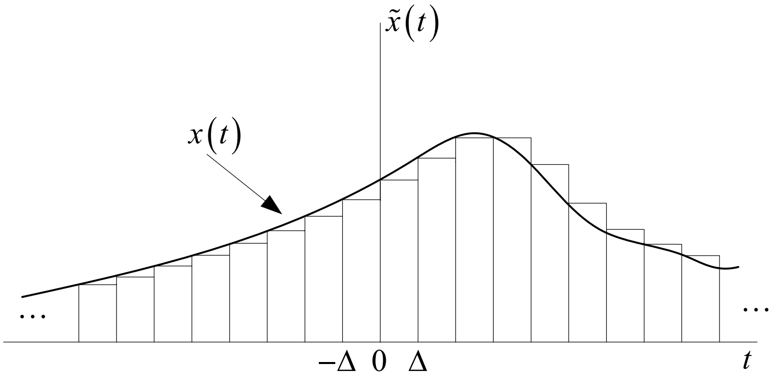
Sve navedene osobine kontinualnih sistema mogu biti značajne za pojedine oblasti primene i analize, međutim dve najvažnije osobine koje treba da zauzmu centralno mesto u analizi koja će biti sprovedena u okviru ovog kursa su linearnost i stacionarnost. Otuda će posebna pažnja biti posvećena ovim dvema osobinama.

## Pitanje 9: Linearni stacionarni kontinualni sistemi

Ovakvi sistemi se uobičajeno u engleskoj literaturi označavaju kao LTI (*Linear Time Invariant Systems*) sistemima. Linearni stacionarni kontinualni sistemi se mogu predstavljati ili karakterisati na više različitih načina, a jedan od njih je korišćenjem impulsne, Dirakove funkcije. Otuda se ponovo podsetimo aproksimacije Dirakove funkcije koja je već ranije uvedena:

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{1}{\Delta}\left[u(t) - u(t-\Delta)\right] \tag{4.23}$$

Dalje, primetimo da se proizvoljni kontinualni signal $x(t)$ može dovoljno dobro aproksimirati stepenastom funkcijom $\tilde{x}(t)$, pri čemu je aproksimacija utoliko bolja ukoliko je interval $\Delta$ kraći. Ova aproksimacija je prikazana na slici 4.2.




Slika 4.2: Aproksimacija signala $x(t)$ signalom $\tilde{x}(t)$

Uzimajući uobzir definiciju signala $\tilde{\delta}(t)$ relacijom (4.23), lako možemo predstaviti signal $\tilde{x}(t)$ na sledeći način:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{\delta}(t-k\Delta)\Delta \tag{4.24}$$

Sada posmatrajmo granični proces kada $\Delta$ teži ka nuli a primenjen na relaciju (4.24)

$$\lim_{\Delta\to 0}\tilde{x}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{\delta}(t-k\Delta)\Delta \tag{4.25}$$

Jasno je da izraz na levoj strani teži kontinualnom signalu $x(t)$, međutim, na desnoj strani se nalaze granični proces pred beskonačnom sumom, i kako $\Delta$ teži nuli ta beskonačna suma se pretvara u integral, tako da konačno možemo napisati:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{4.26}$$

Ovakva je relacija već dobijena u okviru razmatranja osobina Dirakovog impulsa i nazvana je osobinom izdvajanja signala (ili osobina pomeranja impulsne funkcije).

Sada pretpostavimo da ukoliko na ulaz sistema dovedemo kontinualnu impulsnu funkciju $\delta(t)$ da se na izlazu sistema pojavi signal $h(t)$ koji ćemo zvati impulsni odziv sistema, i da nam je ta funkcija poznata (slika 4.3).


Slika 4.3: Definicija impulsnog odziva sistema $h(t)$

Sada možemo sa $\tilde{h}(t)$ da označimo odziv sistema ukoliko je na njegov ulaz dovedena aproksimacija jedinične impulsne funkcije $\tilde{\delta}(t)$. Kako je posmatrani sistem vremenski invarijantan, za pobudu $\tilde{\delta}(t-k\Delta)$ odziv sistema će biti $\tilde{h}(t-k\Delta)$. Na osnovu relacije (4.24), mi smo signal $\tilde{x}(t)$ predstavili kao beskonačnu sumu signala $\tilde{\delta}(t-k\Delta)$, pa će odziv sistema na pobudu $\tilde{x}(t)$, signal $\tilde{y}(t)$ biti odgovarajuća suma signala $\tilde{h}(t-k\Delta)$ jer je naš sistem linearan a to znači da zadovoljava i svojstvo homogenosti i aditivnosti:

$$\tilde{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{h}(t-k\Delta)\Delta \tag{4.27}$$

Ako sada na poslednju jednakost primenimo granični proces:

$$\lim_{\Delta\to 0}\tilde{y}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\tilde{h}(t-k\Delta)\Delta \tag{4.28}$$

na levoj strani ćemo imati odziv sistema $y(t)$ a na desnoj strani će se pojaviti integral umesto sume, pri čemu će signal $\tilde{h}(\cdot)$ biti zamenjen signalom $h(\cdot)$, član $k\Delta$ će biti zamenjen sa $\tau$ a samo $\Delta$ sa $d\tau$:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{4.29}$$

Poslednji rezultat je izuzetno važan, jer on kaže da se odziv LTI sistema na bilo koju pobudnu (ulaznu funkciju) $x(t)$ može izračunati kao konvolucija tog signala i signala $h(t)$ koji predstavlja jedinični impulsni odziv sistema. Drugim rečima:

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{4.30}$$

Ovaj rezultat znači i to da je za opis sistema, analizu njegovog ponašanja i sračunavanje odziva dovoljno poznavati njegov impulsni odziv. Na osnovu osobine komutativnosti konvolucije, umesto relacije (4.29) može se napisati i:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \tag{4.31}$$

**Primer 4.1:** Impulsni odziv jednog sistema je

$$h(t)=e^{-at}u(t) \tag{4.32}$$

Na osnovu njega sračunajmo šta će biti jedinični odskočni odziv $s(t)$ (pod jediničnim odskočnim odzivom se smatra izlaz sistema ako je njegov ulazni signal jedinična odskočna funkcija $u(t)$). Na osnovu rezultata (4.31) možemo pisati:

$$s(t)=h(t)*u(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{4.33}$$

Uzimajući u obzir osobine jedinične odskočne funkcije poslednji integral postaje:

$$s(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau \tag{4.34}$$

Nakon smene integracione promenljive $t-\tau=\lambda$, dalje možemo pisati

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda \tag{4.35}$$

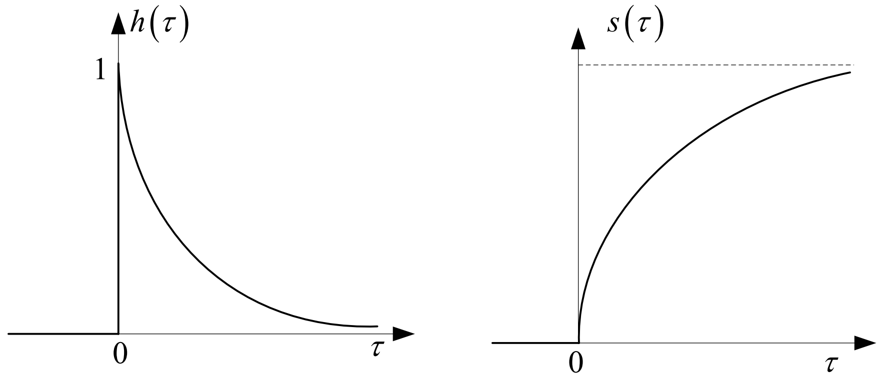
S obzirom na oblik definisane funkcije $h(\lambda)$ relacijom (4.32), odskočni odziv sistema postaje

$$s(t)=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ \int_0^t e^{-a\lambda}d\lambda\ ;\ t\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ -\frac{1}{a}e^{-a\lambda}\Big|_0^t\ ;\ t\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0\ ;\ t<0\\ \frac{1-e^{-at}}{a}\ ;\ t\geq 0\end{cases} \tag{4.36}$$

ili u jednostavnijoj formi:

$$s(t)=\frac{1-e^{-at}}{a}u(t) \tag{4.37}$$

Na slici 4.4. su prikazani impulsni i odskočni odzivi sistema.




Slika 4.4: Impulsni i odskočni odzivi sistema

Jedinični impulsni odziv nije jedina mogućnost da se sistem opiše. Ukoliko je pobudni signal $x(t)$ napisan u obliku zbira jediničnih odskočnih funkcija:

$$x(t)=\sum_k a_k u(t-t_k) \tag{4.38}$$

tada je korisno sistem opisati jediničnim odskočnim odzivom $s(t)$, jer se izlazni signal sistema, korišćenjem osobine superpozicije, lako sračunava shodno sledećoj relaciji:

$$y(t)=\sum_k a_k s(t-t_k) \tag{4.39}$$

## Pitanje 10: Osobine kontinualnih LTI sistema

Kako je objašnjeno u prethodnom pitanju, linearan stacionaran kontinualni sistem je u potpunosti definisan kroz njegov jedinični impulsni odziv. Međutim, zanimljivo je videti kako se osobine kauzalnosti, stabilnosti i invertibilnosti odslikavaju na ovaj odziv.

### *Sistem sa memorijom*

Kako izlaz $y(t)$ sistema bez memorije može zavisiti samo od trenutnog ulaznog signala $x(t)$, tada u slučaju linearnog i vremenski invarijantnog sistema, veza između ulaznog i izlaznog signala mora biti

$$y(t) = Kx(t) \tag{4.40}$$

gde se parametar *K* naziva pojačanjem sistema. U tom slučaju impulsni odziv takvog sistema bez memorije glasi

$$h(t) = K\delta(t) \tag{4.41}$$

Shodno tome možemo zaključiti da kadgod je impulsni odziv nekog sistema $h(t_0)$ različit od nule za $t_0 \neq 0$, u pitanju je sistem sa memorijom.

### *Kauzalni sistem*

Kao što smo već rekli, osobina kauzalnog sistema je da on ne može da da odgovor na ulazni signal dok god se taj signal ne pojavi na njegovom ulazu. Dakle, odziv na dogadjaj na ulazu koji se pojavio u trenutku $t = t_0$, za kauzalni sistem, mora biti jednak nuli za svako $t < t_0$. Shodno tome, impulsni odziv kauzalnog sistema mora biti takav da je

$$h(t) = 0 \text{ za } t < 0 \tag{4.42}$$

Primenjujući osobinu kauzalnosti, konvolucioni integral koji definiše odziv kauzalnih sistema postaje:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \tag{4.43}$$

ili, nakon smene promenljivih $t - \tau = \lambda$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \tag{4.44}$$

Poslednja relacija jasno ukazuje da samo vrednosti $x(\lambda)$ gde je $\lambda \leq t$ utiču na vrednost odziva $y(t)$ u trenutku *t*.

Paralelno sa pojmom kauzalnosti sistema, po ugledu na impulsni odziv kauzalnih sistema, definišu se i kauzalni signali. Signal $x(t)$ ćemo zvati kauzalnim ako zadovoljava sledeći uslov

$$x(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \tag{4.45}$$

čak iako signal $x(t)$ nije ničiji impulsni odziv.

*Kaskadna (redna) veza sistema*

Za dva sistema kažemo da su u rednoj ili kaskadnoj vezi ukoliko je izlaz prvog od njih istovremeno ulazni signal za drugi sistem, kao što je to prikazano na slici 4.5. Kako je izlaz prvog od njih

$$w(t) = x(t) * h_1(t) \tag{4.46}$$

u važnosti je sledeća relacija

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = \left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) \tag{4.47}$$

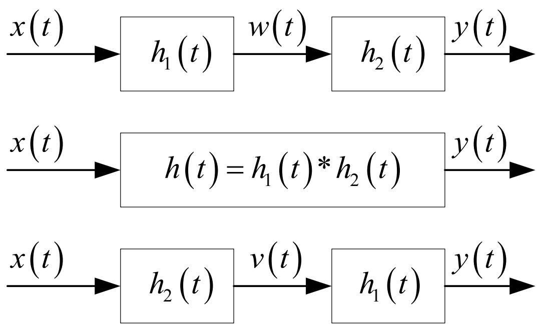
Na osnovu svojstva asocijativnosti koje važi za operaciju konvolucije, dalje možemo pisati

$$y(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right] = x(t) * h(t) \tag{4.48}$$

što znači da će se isti odziv dobiti ukoliko signal $x(t)$ dovedemo na ulaz sistema čiji je impulsni odziv jednak $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Dalje, na osnovu osobine komutativnosti operacije konvolucije izraz (4.48) može biti napisan i na sledeći način:

$$y(t) = x(t) * \left[h_2(t) * h_1(t)\right] = \left[x(t) * h_2(t)\right] * h_1(t) \tag{4.49}$$

što pak, sa druge strane znači da se u smislu generisanja odziva kaskadne veze sistema ništa ne menja ukoliko sistemi zamene redosled. Dobijeni rezultati se mogu bez probleme generalizovati i za kaskadnu vezu proizvoljnog broja različitih sistema.




Slika 4.5: Ekvivalentne reprezentacije kaskadne veze LTI sistema

*Paralelna veza sistema*

Za dva sistema se kaže da su paralelno vezani ako imaju zajednički ulazni signal a njihovi izlazi se sabiraju i formiraju zajednički izlazni signal, kao što je to prikazano na slici 4.6. Tada se njihov zbirni izlazni signal može napisati u formi:

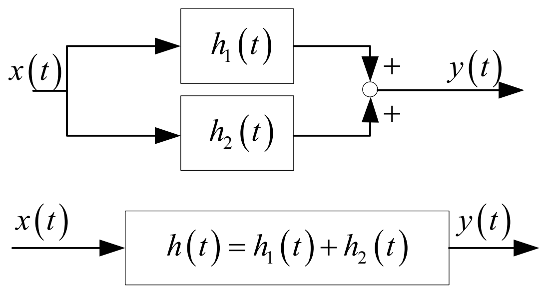
$$y(t) = \left[x(t) * h_1(t)\right] + \left[x(t) * h_2(t)\right] \tag{4.50}$$

a na osnovu osobine distributivnosti operacije konvolucije nad sabiranjem, poslednju relaciju možemo zapisati u sledećoj formi:

$$y(t) = x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = x(t) * h(t) \tag{4.51}$$

Drugim rečima, odziv sistema možemo predstaviti kao izlaz jednog sistema čiji je impulsni odziv jednak:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{4.52}$$




Slika 4.6: Ekvivalentna reprezentacija paralelne veze dva LTI sistema

Slično kao i kod kaskadne veze, i u slučaju paralelne veze sistema, dobijeni rezultat se može generalizovati za proizvoljan broj paralelno vezanih sistema.

***Stabilni sistem***

BIBO stabilnost LTI kontinualnih sistema se takođe može jednostavno detektovati na osnovu jediničnog impulsnog odziva $h(t)$. Pretpostavimo da je ulazni signal $x(t)$ takav da zadovoljava sledeću nejednakost:

$$|x(t)| \le B_1 \text{, za svako } t \tag{4.53}$$

gde je $B_1$ pozitivna konstanta.Tada će apsolutna vrednost odziva sistema biti

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right| \tag{4.54}$$

Ako se poslužimo činjenicom da je apsolutna vrednost integrala uvek manja ili jednaka od integrala apsolutne vrednosti i da je apsolutna vrednost proizvoda jednaka proizvodu apsolutnih vrednosti, poslednji izraz postaje:

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\,d\tau \le B_1\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau \tag{4.55}$$

jer je po pretpostavci $|x(t-\tau)| \le B_1$. Ako je jedinični impulsni odziv apsolutno integrabilan, odnosno ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau = G < \infty \tag{4.56}$$

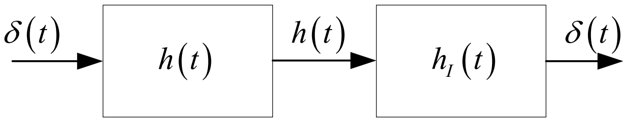
tada se na osnovu prethodne dve relacije može pisati

$$|y(t)| \le B_1 G = B_2 \tag{4.57}$$

Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov da kontinualan LTI sistem bude BIBO stabilan jeste da njegov impulsni odziv bude apsolutno integrabilan u smislu relacje (4.56).

***Invertibilni sistem***

Već smo zaključili da ukoliko je sistem invertibilan, tada postoji njemu odgovarajući inverzan sistem, takav da ako se veže u kaskadu sa originalnim sistemom, signali na ulazu i izlazu te kaskade moraju biti identični. Ovo tvrđenje važi za svaki signal na ulazu, pa onda važi i u sluačju kada je ulazni signal Dirakov impuls (slika 4.7). Na ovoj slici je sa $h_I(t)$ označen jedinični impulsni odziv inverznog sistema.




Slika 4.7:Invertibilni LTI sistem i njegov inverzni sistem

U tom slučaju je jasno da impulsni odziv inverznog sistema mora zadovoljiti sledeću relaciju:

$$h(t)*h_I(t)=\delta(t) \tag{4.58}$$

Lako se pokazuje da ako inverzni sistem LTI sistema postoji, onda i on mora biti i linearan i vremenski invarijantan. Ako na ulaz originalnog sistema dovedemo signal $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, tada će se na njegovom ulazu pojaviti signal $y(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$, što je istovremeno ulaz inverznog sistema. Da bi on zaista bio inverzan on mora na svom izlazu da generiše signal $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, što jeste dokaz njegove linearnosti. Sa druge strane ako na ulaz originalnog sistema dovedemo signal $x(t-t_0)$, na njegovom izlazu će biti signal $y(t-t_0)$ a pak na izlazu inverznog sistema ponovo $x(t-t_0)$, što dokazuje njegovu stacionarnost. Kao zaključak ove analize možemo tvrditi da ako je sistem invertibilan, mora postojati funkcija $h_I(t)$ koja zadovoljava relaciju (4.58). Tehnike nalaženja ove funkcije se neće razmatrati na ovom mestu, međutim, ono što ovde svakako možemo navesti jeste, da čak i ako uspemo da odredimo impulsni odziv inverznog sistema on uglavnom nema druge važne osobine koje smo već pomenuli a to su kauzalnost i stabilnost.

***Jedinični odskočni odziv***

Već smo videli da je opisati sistem pomoću jediničnog impulsnog odziva vrlo efikasan i sadržajan način, jer se pomoću ove funkcije može odediti odziv sistema za bilo koju pobudu, a istovremeno se na osnovu impulsnog odziva mogu analizirati sve značajne osobine sistema. Međutim, u mnogim primenama je jedinični odskočni odziv (odziv sistema ako je na njegov ulaz dovedena jedinična odskočna funkcija) takođe vrlo korisni način da se sistem okarakteriše. Jasno je da se jedinični odskočni odziv sistema može sračunati kao konvolucija impulsnog odziva i jedinične odskočne funkcije:

$$s(t)=h(t)*u(t) \tag{4.59}$$

Uzimajući u obzir specifičnost jediničnog odskočnog signala, poslednji izraz postaje:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \tag{4.60}$$

što predstavlja jednostavnu vezu između impulsnog i odskočnog odziva. Konačno, ako se odskočni odziv može sračunati kao odgovarajući integral impulsnog odziva, očigledno je da se i impulsni odziv može sračunati kao prvi izvod odskočnog odziva:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \tag{4.61}$$

**Primer 4.2:** Ukoliko nam je poznat odskočni odziv jednog sistema

$$s(t)=\left[\cos(\omega_0 t)\right]u(t) \tag{4.62}$$

odgovarajući impuslni odziv se direktno sračunava primenom relacije (4.61)

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\cos(\omega_0 t)}{dt} u(t) + \cos(\omega_0 t)\frac{du(t)}{dt} \\ &= -\omega_0 \sin(\omega_0 t) u(t) + \cos(\omega_0 t)\delta(t) = \delta(t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t) u(t) \end{aligned} \tag{4.63}$$

## Pitanje 11: Diferencijalne jednačine i njihova primena

Svi smo manje ili više familijarni sa linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima, ili na osnovu znanja iz matematike ili teorije električnih kola. Ovakve vrste jednačina igraju vrlo značajnu ulogu u mnogim naučnim oblastima kao što su elektrotehnika, elektronika, mašinstvo, hemija, tehnologija, fizika i tako dalje. Zapravo, diferencijalne jednačine jesu i specifičan način da se definiše sistem, jer su one uglavnom definisane tako da postoje ulazni signali, da su zavisne promenljive čijim rešavanje možemo odrediti izlazni signal i istovremeno postoji nezavisna vremenska promenljiva. Dakle, sistemi koji su definisani na ovaj način pripadaju širokoj klasi kontinualnih sistema. Ukoliko je u pitanju linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima onda ona definiše linearan stacionaran (LTI) sistem.

***Diferencijalna jednačina***

Opšti oblik diferencijalne jednačine konačnog reda sa konstantnim koeficijentima je dat u sledećoj formi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k} \tag{4.64}$$

gde je sa $N$ označen red diferencijalne jednačine i on je uvek jednak najvišem izvodu zavisne promenljive $y$. Ukoliko nam je poznati konkretan ulazni signal $x(t)$, uopšteno govoreći, signal $y(t)$ koji je rešenje diferencijalne jednačine može da se napiše u formi:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{4.65}$$

gde je sa $y_p(t)$ označeno partikularno rešenje koje zadovoljava uslov (4.64), dok je sa $y_h(t)$ označeno rešenje homogene jednačine:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{d t^k} = 0 \tag{4.66}$$

gde je konkretna forma homogenog dela $y_h(t)$ određena sa $N$ dodatnih uslova sistema.

**Primer 4.3:** Posmatrajmo odziv $y(t)$ kontinualnog sistema opisanog diferencijalnom jednačinom prvog reda

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{4.67}$$

gde je $x(t)$ kauzalni signal

$$x(t) = e^{-bt}u(t) \tag{4.68}$$

Pod pretpostavkom da je partikularno rešenje za $t>0$ u sledećoj formi

$$y_p(t)=Ae^{-bt} \tag{4.69}$$

lako proveravamo da $y_p(t)$ mora da zadovolji sledeći uslov:

$$\frac{dy_p(t)}{dt}+ay_p(t)=x(t)\Rightarrow -Abe^{-bt}+aAe^{-bt}=e^{-bt}\Rightarrow -bA+aA=1 \tag{4.70}$$

odnosno

$$A=\frac{1}{a-b} \tag{4.71}$$

Otuda partikularno rešenje glasi:

$$y_p(t)=\frac{1}{a-b}e^{-bt}\ ,\ t>0 \tag{4.72}$$

Da bismo dobili signal $y_h(t)$ homogene diferencijalne jednačine

$$\frac{d\,y_h(t)}{dt}+ay_h(t)=0 \tag{4.73}$$

pretpostavimo rešenje u obliku:

$$y_h(t)=Ke^{st} \tag{4.74}$$

odakle smenom u (4.73) dobijamo uslov

$$sKe^{st}+aKe^{st}=0 \tag{4.75}$$

odnosno

$$s=-a \tag{4.76}$$

Tako da homogeno rešenje postaje

$$y_h(t)=Ke^{-at} \tag{4.77}$$

uz još uvek neodređenu vrednost parametra *K*. Kombinujući partikularno i homogeno rešenje za $t>0$, dobijamo oblik izlaznog signala

$$y(t)=\frac{1}{a-b}e^{-bt}+Ke^{-at}\ ;\ t>0 \tag{4.78}$$

Da bismo odredili vrednost konstante *K*, potrebno je da znamo vrednost $y(0)=Y_I$ (takozvani početni uslov). Smenom u (4.78) dalje možemo pisati

$$y(0)=\frac{1}{a-b}+K=Y_I \tag{4.79}$$

odnosno

$$K=Y_I-\frac{1}{a-b} \tag{4.80}$$

pa naše konačno rešenje za $t>0$ postaje

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)\ ;\ t>0 \tag{4.81}$$

Za $t<0$ poznato nam je da je ulazni signal jednak nuli $x(t)=0$, pa rešenje početne diferencijalne jednačine mora biti jednako rešenju homogene diferencijalne jednačine, odnosno

$$y(t)=y_h(t)=Ke^{-at}\ ;\ t<0 \tag{4.82}$$

što uz početni uslov $y(0)=Y_I$ postaje

$$y(t)=Y_Ie^{-at}\ ;\ t<0 \tag{4.83}$$

Konačno, rešenje za $t<0$ i $t>0$ mogu biti kombinovana u sledećoj formi

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t) \tag{4.83}$$

pri čemu je i uslov za trenutak $t=0$ ispoštovan vođenjem računa o početnom uslovu.

Primetimo da je za $a=b$ razlomak u (4.83) nedefinisan, jer dolazi do deljenja sa nulom. Da bismo primenom L'Hopital-ovo pravilo uvedimo oznaku

$$f(b)=e^{-bt}-e^{-at} \tag{4.84}$$

i

$$g(b)=a-b \tag{4.85}$$

Kako je

$$f'(b)=-te^{-bt}\ ;\ g'(b)=-1 \tag{4.86}$$

u graničnom procesu kada $b\to a$, dobija se

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(b)}=te^{-at} \tag{4.87}$$

odnosno za slučaj $a=b$, odziv našeg sistema glasi

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+te^{-at}u(t) \tag{4.88}$$

Primetimo takođe da je u slučaju nultog početnog stanja sistema $(Y_I=0)$ odziv sistema jednak

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t) \tag{4.89}$$

Ovakav odziv se zove *odziv iz nultog stanja* ili *odziv relaksiranog sistema.* U suprotnom, da je postojao samo početni uslov $Y_i$ a da je uzlazni signal jednak nuli $x(t)=0$, tada bi odziv sistem bio

$$y_{zi}(t)=Y_Ie^{-at} \tag{4.90}$$

Ova vrsta odziva se naziva *odziv na početne uslove.* Očigledno je da se ukupni odziv sistema može napisati kao zbir odziva relaksiranog sistema i odziva na početne uslove:

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t) \tag{4.91}$$

Ne treba poistovećivati ove dve vrste odziva sa partikularnim i homogenim rešenjem diferencijalne jednačine, jer oni u opštem slučaju nisu jednaki. Međutim, raščlaniti odziv sistema na odzive $y_{zs}(t)$ i $y_{zi}(t)$ je vrlo korisno, i tu ćemo činjenicu često koristiti.

Ovde je potrebno još dodati jedan komentar. Logično je da očekujemo da sistem koji je opisan linearnim diferencijalnim jednačinama bude linearan. Međutim, to nije tačno uvek tačno. Naime, ako pretpostavimo da je ulaz u signal $x(t)=0$, tada će odziv sistema biti $y_{zi}(t)$ koji u opštem slučaju nije nula. To automatski znači da neće biti zadovoljen uslov homogenosti (*k* puta veći ulaz neće generisati *k* puta veći izlaz), pa sistem nije linearan. Međutim, takav sistem će biti inkrementalno linearan. Ukoliko je odziv $y_{zi}(t)$ jednak nuli (a to se dešava ako je početni uslov sistema jednak nuli), tada će i princip homogenosti biti zadovoljen pa će sistem biti linearan.

**Primer 4.4:** Posmatrajmo sledeći primer, diferencijalne jednačine (4.67)

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t) \tag{4.92}$$

u kojoj je početni uslov

$$y(0)=Y_I=0 \tag{4.93}$$

Za takav sistem sa nultim početni uslovom se kaže da je relaksiran. Dalje, pretpostavimo da je

$$x(t)=u(t) \tag{4.94}$$

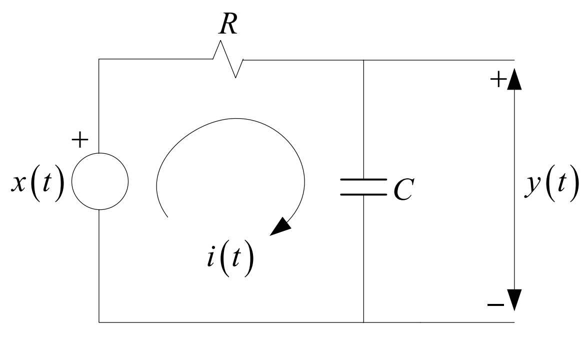
U tom slučaju, rešenje jednačine postaje jedinični odskočni odziv:

$$y(t)=s(t)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t) \tag{4.95}$$

Shodno vezi između jediničnog odskočnog i jediničnog impulsnog odziva, na osnovu relacije (4.95) lako sračunavamo jedinični impulsni odziv:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=e^{-at}u(t) \tag{4.96}$$

Upravo rešena diferencijalna jednačina zapravo opisuje jednostavno RC kolo prikazano na slici 4.8.




Slika 4.8: RC električno kolo

Primenom Kirhofovog zakona možemo pisati:

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = x(t) \tag{4.97}$$

Kako je

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{4.98}$$

i

$$i(t)=C\frac{dy(t)}{dt} \tag{4.99}$$

diferencijalna jednačina koja opisuje ovo kolo postaje:

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \tag{4.100}$$

Uvodeći vremensku konstantu $\tau = RC$ i uvodeći smenu $a = 1/\tau$, diferencijalnu jednačinu možemo prepisati u formi

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=ax(t) \tag{4.101}$$

što je ekvivalentno jednačini (4.92) s tom razlikom da se umesto ulaznog signala $x(t)$ pojavljuje signal $ax(t)$. Dakle, impulsni odziv ovog sistema glasi

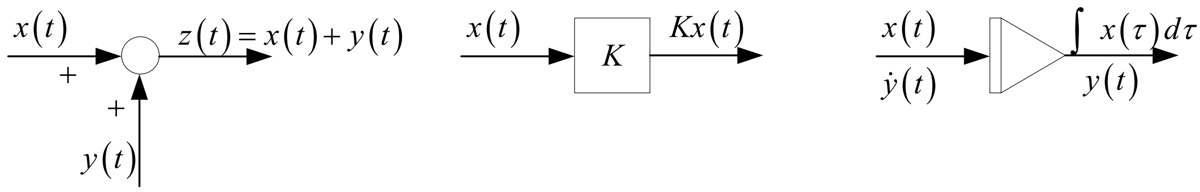
$$h(t)=ae^{-at}u(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \tag{4.102}$$

Prednost ovog pristupa je da sada, kada smo odredili jedinični impulsni odziv sistema, za bilo koji oblik ulaznog napona $x(t)$, možemo jednostavno sračunati izlazni napon $y(t)$ primenom konvolucije

$$y(t)=h(t)*x(t) \tag{4.103}$$

***Blok dijagrami***

Predstava sistema pomoću blok dijagrama je vrlo koristan alat, ne samo u smislu jednostavnijeg razumevanja strukture sistema, već je to alat koji u velikoj meri pomaže prilikom projektovanja različitih vrsta sistema za obradu signala ili upravljanje. Vrlo često se ova tehnika naziva analognim modeliranjem, jer je njena osnovna namena da se princip funkcionisanja sisema prikaže korišćenjem tri elementarna bloka a to su: sabirač dva signal, množač signala konstantnim pojačanjem i integrator signala. Šematska oznaka za ove blokove je data na slici 4.9.




Slika 4.9: Šematska oznaka za elementarne blokove u blok dijagramima sistema

Usvajanjem ovakvih oznaka, mi možemo ne samo predstaviti sisteme različitih struktura, već ih možemo i realizovati jednostavnih elektronskim sklopovima. U kojoj meri će neko od naših praktičnih rešenja biti ekonomično i izvodljivo ne zavisi samo od strukture sistema koji želimo da realizujemo, već i od poznavanja tehnike blokovskih dijagrama. Sledeći primer ilustruje navedenu činjenicu.

**Primer 4.5:** Posmatrajmo jednostavan sistem koji je opisan diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+y(t)=\dot{x}(t)+4x(t) \tag{4.104}$$

gde je radi jednostavnijeg pisanja usvojena oznaka $\ddot{y}(t)=d^2y(t)/dt^2$, $\dot{y}(t)=dy(t)/dt$. Ukoliko želimo da nacrtamo ovaj sistem u blokovskoj formi, ili da ga realizujemo pomoću elementarnih elektronskih komponenti, možemo postupiti na dva načina.

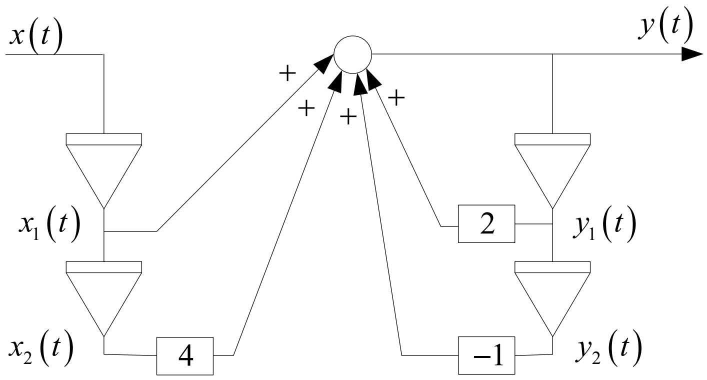
***Direktna realizacija:*** U želji da se oslobodimo izvoda u relaciji (4.104) integralimo celu jednačinu dva puta. Dobijenu jednačinu možemo zapisati u formi:

$$y(t)-2y_1(t)+y_2(t)=x_1(t)+4x_2(t) \tag{4.105}$$

gde je radi jednostavnijeg pisanja za višestruki *i-ti* integral signala $y(t)$ uvedena oznaka $y_i(t)$ i analogno tome za signal $x(t)$. Ako poslednju relaciju napišemo u formi

$$y(t)=2y_1(t)-y_2(t)+x_1(t)+4x_2(t) \tag{4.106}$$

blokovska reprezentacija direktno sledi (zbog toga se i zove direktna realizacija) i prikazana je slikom 4.10.



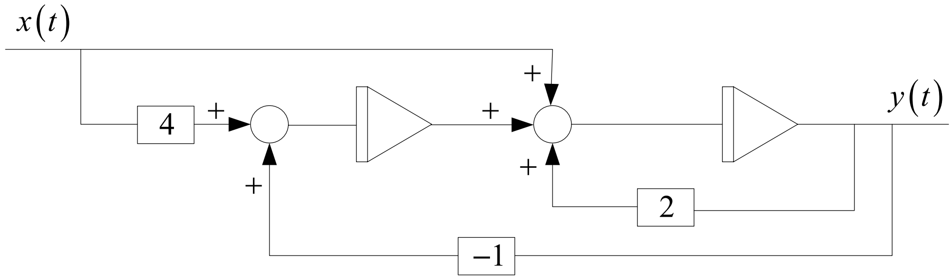

Slika 4.10: Direktna realizacija sistema

Primetimo da nam je za direktnu realizaciju sistema potrebno četiri integratora, dva pojačavača, jedan invertor i jedan sabirač. A pogledajmo sada drugi pristup u blokovskoj predstavi, odnosno realizaciji, koji se naziva kanonična realizacija.

***Kanonična realizacija*** : Ako ponovo krenemo od relacije (4.106) ali je prepišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} y(t)&=2y_1(t)-y_2(t)+x_1(t)+4x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[2y(\tau)+x(\tau)-y_1(\tau)+4x_1(\tau)\right]dt \\ &=\int_{-\infty}^{t}\left[2y(\tau)+x(\tau)+\int_{-\infty}^{\tau}\left(-y(\lambda)+4x(\lambda)\right)d\lambda\right]d\tau \end{aligned} \tag{4.107}$$

Poslednja relacija govori o tome da se signal $y(t)$ može dobiti kao izlaz iz integratora kome je na ulaz doveden zbir tri signala $2y(t)$, $x(t)$ i izlaz iz integratora koji na ulazu ima zbir dva signala $-y(t)$ i $4x(t)$. Odgovarajuća blokovska realizacija je prikazana na slici 4.11.




Slika 4.11: Kanonična blok reprezentacija sistema

Primetimo da reprezentacije na slikama 4.10 i 4.11 predstavljaju iste sisteme, međutim za realizaciju sistema prikazanog slikom 4.11. potrebna su nam dva integratora, dva pojačavača, jedan invertor i dva sabirača. Očigledno, sa stanovišta integratora (a kasnije će biti objašnjeno zašto su integratori najvažniji elementi u ovakvoj blokovskoj predstavi) kanonična realizacija ima drastičnu prednost u odnosu na direktnu.