

Pitanje 20: Odabiranje signala u svetlu Fourier-ove transformacije

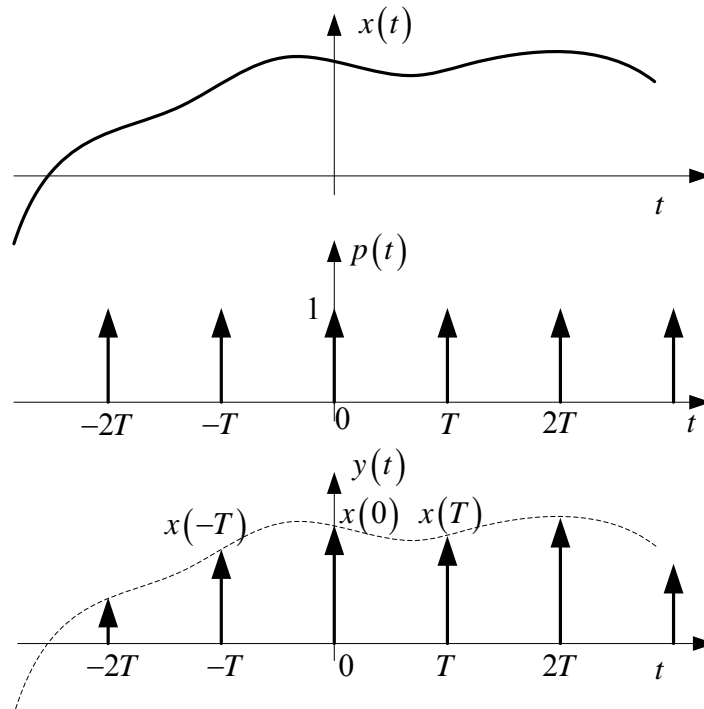
Jedna od ključnih operacija koja se nad kontinualnim signalim može vršiti jeste odabiranje. S obzirom da se ovom transformacijom kontinualni signali pretvaraju u diskretne, vrlo često se za proces odabiranja koristi termin *analogno-digitalna konverzija*. Ukoliko želimo na neki matematički način da modeliramo proces odabiranja, najjednostavniji postupak je da uvedemo periodičnu povorku Dirakovih impulsa $p(t)$:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (8.1)$$

gde se perioda T uobičajeno naziva periodom odabiranja (u engl. literaturi je uobičajen naziv *sampling period*). Rezultat odabiranja nad nekim kontinualnim signalom $x(t)$ je signal $y(t)$ koji se dobija množenjem sa povorkom impulsa $p(t)$:

$$y(t) = x(t) p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (8.3)$$

Ilustracija ovih signala data je na slici 8.1.



Slika 8.1: Ilustracija procesa odabiranja

Polazeći od pretpostavke da se signali $x(t)$ i $p(t)$ množe kako bi formirali signal $y(t)$, jasno je da njihove Fourier-ove transformacije ulaze u konvoluciju:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) P(j\omega) \quad (8.4)$$

Kako je pri tome signal $p(t)$ periodičan, njegov transformacioni par se može potražiti ili kroz Fourier-ov red ili kroz Fourier-ovu transformaciju. Ako pođemo od razvoja u Fourier-ov red:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_s t} \quad (8.5)$$

gde je $\omega_s = 2\pi/T$ učestanost odabiranja, koeficijenti reda su

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.6)$$

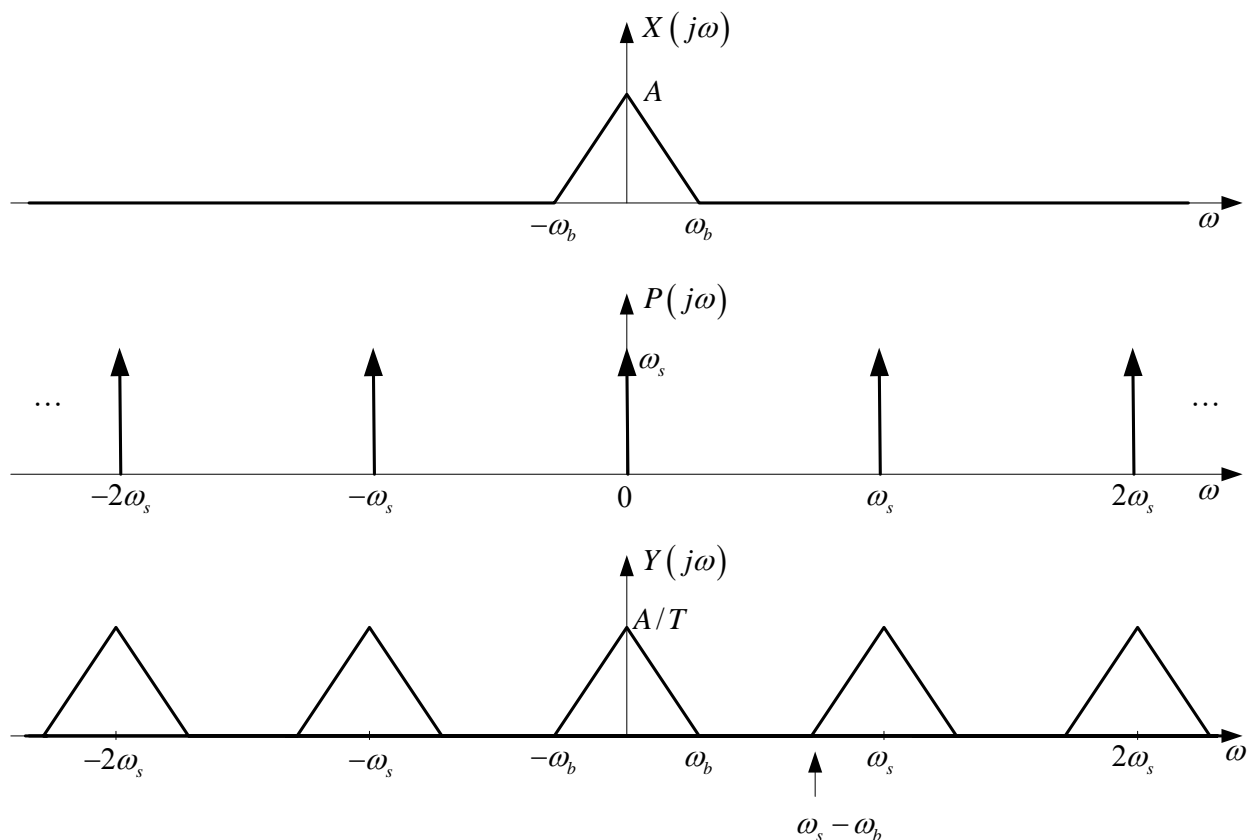
Sada na osnovu (7.22) možemo pisati:

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s) \quad (8.7)$$

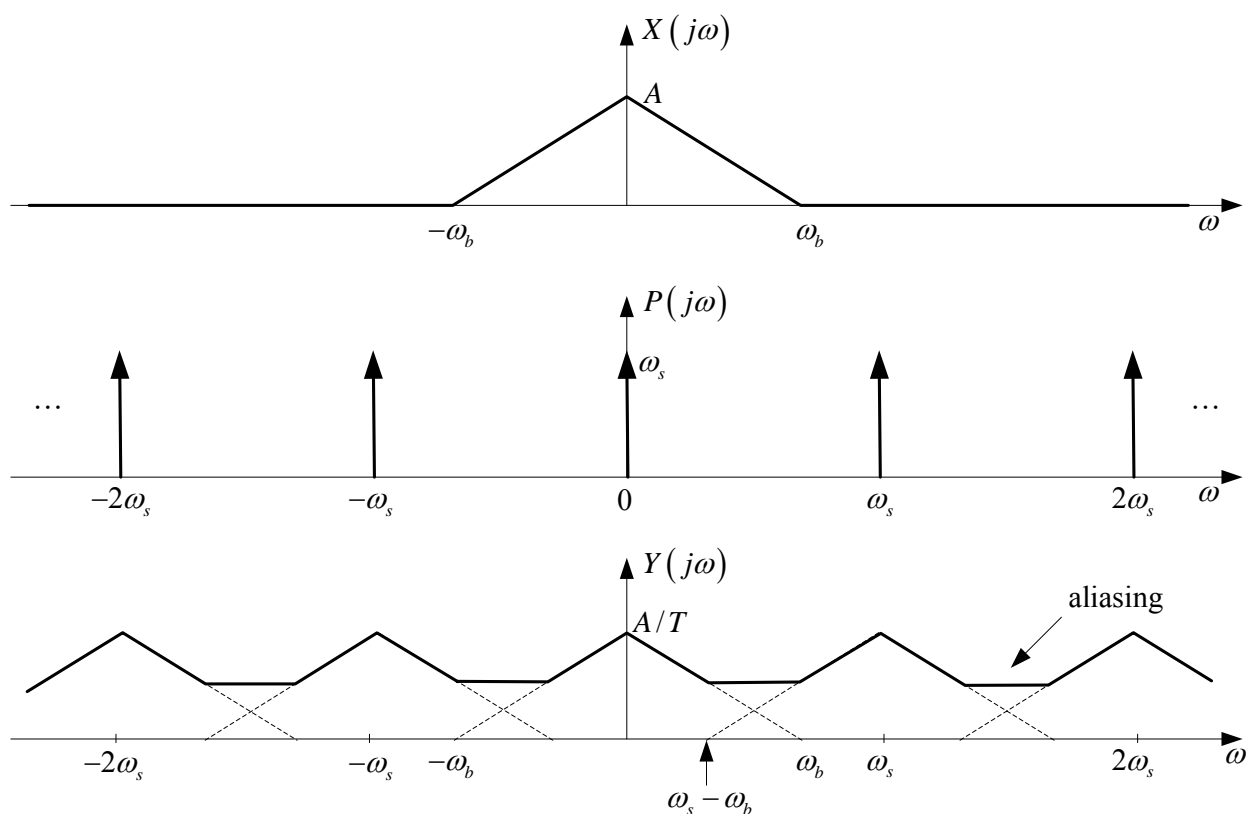
Konačno na osnovu (8.4), dalje možemo pisati

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Poslednja relacija nam govori da se Fourier-ova transformacija $Y(j\omega)$ sastoji od periodičnog ponavljanja frekvencijskog signala $X(j\omega)$ centriranog oko celobrojnog umnoška učestanosti $k\omega_s$, gde je ω_s učestanost odabiranja a $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dva primera ovakvih spektara su prikazana na slikama 8.2. i 8.3. i među njima postoji značajna razlika.



Slika 8.2: Primer odabiranja signala bez efekta preklapanja



Slika 8.3: Primer spektara prilikom odabiranja signala sa efektom preklapanja (*aliasing effect*)

Na slikama 8.2. i 8.3. su prikazani spektri signala koji se pojavljuju u procesu odabiranja i između ova dva slučaja postoji značajna razlika. Primetimo da je u prvom slučaju frekventijska širina originalnog korisnog signala ω_b i da je učestanost odabiranja ω_s izabrana tako da bude zadovoljen uslov

$$\omega_s - \omega_b > \omega_b \quad (8.9)$$

odnosno

$$\omega_s > 2\omega_b \quad (8.10)$$

Takvim izborom je omogućeno da spektar signala $y(t)$ iz opsega učestanosti $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ bude identičan spektru originalnog signala $x(t)$ i da se prilikom odabiranja ne izgubi ništa od informacija. Sa druge strane, na slici 8.3, učestanost odabiranja ne zadovoljava uslove (8.9) i (8.10) i došlo je do efekta preklapanja (u engleskoj literaturi se ovaj efekat naziva *aliasing*) što za posledicu ima da je spektralni sadržaj signala $y(t)$ postao različit od sadržaja originalnog signala i time je značajan deo informacija sadržanih u signalu $x(t)$ prilikom odabiranja izgubljen. Rezultat izražen relacijama (8.9) i (8.10) se može formulisati u obliku takozvane *teoreme o odabiranju* koja kaže da se prilikom odabiranja kontinualnog signala odabiranje mora vršiti učestanošću odabiranja ω_s koja je bar dva puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala koji se odabira.

Pitanje 21: Frekvencijski odziv LTI sistema

Već smo pokazali da se linearni, vremenski invarijantni sistemi jednoznačno mogu opisati impulsnim odzivom sistema. Sa druge strane, videli smo da se proizvoljni signali u vremenskom domenu, potpuno ravnopravno mogu opisati i okarakterisati njihovim transformacionim parovima, pa to isto važi i za impulsni odziv sistema $h(t)$. Drugim rečima, linearan vremenski invarijantan LTI sistem se može opisati Fourier-ovom transformacijom $H(j\omega)$. Ukoliko sa $x(t)$ i $y(t)$ označimo ulazni i izlazni signal jednog LTI sistema, znamo da među njima postoji sledeća veza:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (8.11)$$

Kako je jedna od već analiziranih osobina Fourier-ove transformacije ta, da kada dva signala ulaze u konvoluciju, njihovi transformacioni parovi se množe, dalje možemo pisati:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \quad (8.12)$$

Funkcija $H(j\omega)$ se naziva *frekvencijskim odzivom* LTI sistema. Da bismo razumeli značenje funkcije $H(j\omega)$ i konkretnih vrednosti za neko $\omega = \omega_0$, pretpostavimo da je na ulaz sistema dovedena kompleksna sinusoida baš ove učestanosti:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (8.13)$$

Njen Fourier-ov transformacioni par glasi:

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (8.14)$$

a na osnovu relacije (8.12) dalje možemo pisati:

$$Y(j\omega) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) \quad (8.15)$$

što sa druge strane znači da je odziv sistema u vremenskom domenu

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} \quad (8.16)$$

Dakle, i odziv sistema je kompleksna sinusoida iste učestanosti kakve je bila i sinusoida na ulazu ω_0 , ali je njena amplituda skalirana kompleksnom vrednošću $H(j\omega_0)$.

Znajući da je naš sistem linearan i vremenski invarijantan, dalje možemo pretpostaviti da je na ulaz sistema doveden trigonometrijski red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (8.17)$$

i odmah možemo pisati čemu će biti jednak odziv sistema:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (8.18)$$

Ovo je rezultat koji smo već videli kada smo dokazivali da kompleksne sinusoide jesu sopstvene funkcije LTI sistema. Međutim, ovaj se rezultat može proširiti i na neperiodične signale. Ako ulaz u sistem predstavimo preko njegovog Fourier-ovog transformacionog para:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (8.19)$$

odziv sistema se može napisati u analognoj formi:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (8.20)$$

podrazumevajući da se svaka frekvencijska komponenta $X(j\omega)e^{j\omega t}/2\pi$ po kontinumu učestanosti prenosi kroz sistem skalirana vrednošću $H(j\omega)$.

Analiza LTI sistema na osnovu njegovog frekvencijskog odziva $H(j\omega)$ se može sprovesti na nekoliko različitih načina, pri čemu je najčešća analiza amplitude i faze. Ako na relaciju (8.12) primenimo moduo, dobija se

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)| \quad (8.21)$$

Poslednja relacija kaže da se amplituda spektra $|X(j\omega)|$ množi sa amplitudom frekvencijskog odziva $|H(j\omega)|$ i da se na taj način dobija amplituda spektra izlaznog signala $|Y(j\omega)|$. Sličnu relaciju možemo izvesti i za argumente:

$$\arg\{Y(j\omega)\} = \arg\{H(j\omega)\} + \arg\{X(j\omega)\} \quad (8.22)$$

Ova relacija nam govori da se faza spektra signala $y(t)$ dobija kao zbir faze spektra ulaznog signala $x(t)$ i faze frekvencijskog odziva $\arg\{H(j\omega)\}$. Podsetimo se još da ako je impulsni odziv sistema realna funkcija, tada je amplituda spektra parna funkcija a faza spektra neparna funkcija:

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \quad (8.23)$$

i

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arg\{H(-j\omega)\} \quad (8.24)$$

Primer 8.1: Posmatrajmo sistem čiji je impulsni odziv $h(t) = e^{-at}u(t)$. Za ovaj sistem smo već računali odskočni odziv $s(t)$ primenom konvolucije:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \frac{1-e^{-at}}{a} u(t) \quad (8.25)$$

Međutim, do istog rezultata se može doći primenom frekvencijskog odziva sistema:

$$S(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad (8.26)$$

znajući da je

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0 \quad (8.27)$$

i

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (8.28)$$

Podsetimo se da je rezultat (8.28) dobijen na osnovu integraljenja Dirakovog impulsa. Shodno tome, spektar odziva sistema postaje

$$S(j\omega) = \frac{1}{j\omega} H(j\omega) + \pi H(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega(a+j\omega)} + \pi\left(\frac{1}{a}\right)\delta(\omega) \quad (8.29)$$

Ukoliko želimo da iz frekvencijskog domena pređemo u vremenski, prvo predstavimo prvi sabirak na desnoj strani relacije (8.29) u zbir parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{j\omega(a+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{a+j\omega} \quad (8.30)$$

gde se koeficijenti A i B određuju na poznati način:

$$A = \lim_{\omega \rightarrow 0} (j\omega) \frac{1}{j\omega(a+j\omega)} = \frac{1}{a}; \quad B = \lim_{\omega \rightarrow -a/j} (a+j\omega) \frac{1}{j\omega(a+j\omega)} = -\frac{1}{a} \quad (8.31)$$

Tada spektar $S(j\omega)$ postaje

$$S(j\omega) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a+j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \quad (8.32)$$

Lako prepoznamo da prvi i treći sabirak u zagradi čine Fourier-ovu transformaciju jedinične odskočne funkcije $u(t)$, dok drugi sabirak predstavlja kauzalni eksponent istog tipa kakav je impulsni odziv, tako da odskočni odziv sistema postaje:

$$s(t) = \frac{1}{a} [u(t) - e^{-at}u(t)] = \frac{1-e^{-at}}{a} u(t) \quad (8.33)$$

Pitanje 22: Bode-ove karakteristike sistema

Uobičajeno je da se sistem predstavi tako što se amplituda frekvencijskog odziva sistema $|H(j\omega)|$ crta u log/log skali, pri čemu se na oordinatu nanose vrednosti u decibelima, odnosno vrednosti $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$. Ovakav prikaz se naziva amplitudskom karakteristikom sistema, dok se fazna karakteristika sistema dobija tako što se opet na logaritamskom dijagramu crta vrednost funkcije $\arg\{H(j\omega)\}$ za učestanosti ω na apscisi u logaritamskoj srazmeri.

Kroz sledeće primere će biti ilustrovana tehnika crtanja frekvencijskih karakteristika, i biće pokazana tehnika aproksimacija prilikom crtanja amplitudskih frekvencijskih karakteristika. Ovakve frekvencijske karakteristike se nazivaju Bode-ovim.

Primer 8.2: Posmatrajmo sistem čiji je frekvencijski odziv

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0 + j\omega a_1} \quad (8.34)$$

Analiziraćemo tri karakteristična slučaja vrednosti parametara a i b .

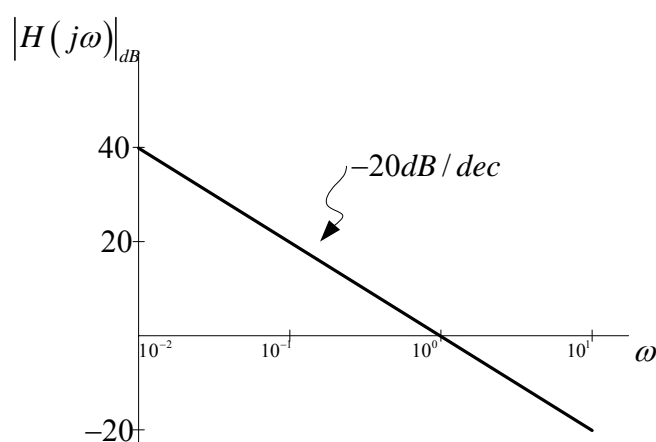
Prvi slučaj: Neka je $a_0 = b_1 = 0$. Tada je frekvencijski odziv sistema

$$H(j\omega) = \frac{b_0}{j\omega a_1} = \frac{K}{j\omega}; \quad K = \frac{b_0}{a_1} \quad (8.35)$$

Amplituda frekvencijskog odziva je u tom slučaju:

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\omega} \right) = 20 \log_{10}(K) - 20 \log_{10}(\omega) \quad (8.36)$$

Ovo je očigledno logaritamska funkcija od učestanosti ω , međutim kako je i razmera učestanosti logaritamska, oblik ove funkcije na Bode-ovom dijagramu biće prava linija. Za tu pravu liniju su karakteristične dve osobenosti. Prvo, nagib ove karakteristike je -20 decibela po dekadi, što znači da ako se učestanost poveća 10 puta, njen logaritam će se povećati za 1, a karakteristika će biti manja za 20 decibela. Ovakav nagib se označava kao -20dB/dec. Druga važno svojstvo ove karakteristike je da kada učestanost ω uzme vrednost K , vrednost karakteristike će biti jednaka nuli, što znači da za tu vrednost učestanosti karakteristika seče ω osu. Pod pretpostavkom da je $K=1$, oblik amplitudske karakteristike je dat na slici 8.4.

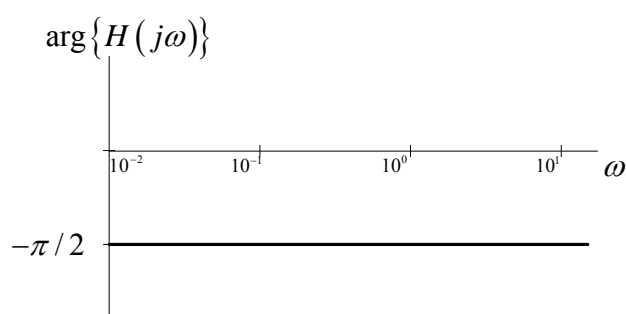


Slika 8.4: Amplitudska frekvencijska karakteristika sistema frekvencijskog odziva $H(j\omega) = 1/j\omega$

Fazna karakteristika sistema je u ovom slučaju

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\left\{\frac{b_0}{j\omega a_1}\right\} = -\pi/2; \quad b_0/a_1 > 0 \quad (8.37)$$

i prikazana je na slici 8.5. Naravno, pretpostavka je da su parametri b_0 i a_1 istog znaka, inače bi cela fazna karakteristika bila pomerenjena za π .



Slika 8.5: Fazna karakteristika sistema sa frekvencijskim odzivom (8.35)

Drugi slučaj: Pretpostavimo sada slučaj u kome je $b_1 = 0$, pa frekvencijski odziv sistema postaje

$$H(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1} \quad (8.38)$$

Prilikom crtanja Bodeovih karakteristika, uobičajeno je da se frekvencijski odziv sistema predstavi u takozvanoj Bodovoj formi, u kojoj su polinomi u brojiocu i imeniocu faktorisani i pri čemu su slobodni koeficijenti jednaki 1. U našem slučaju Bodeove forma postaje:

$$H(j\omega) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{1 + j\omega a_1 / a_0} = k \frac{1}{1 + j\omega / \lambda} \quad (8.39)$$

gde je

$$k = \frac{b_0}{a_0}; \lambda = \frac{a_0}{a_1} \quad (8.40)$$

U želji da nacrtamo amplitudsku karakteristiku, posmatrajmo moduo izraza (8.39)

$$|H(j\omega)| = \left| k \frac{1}{1 + j\omega / \lambda} \right| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega / \lambda)^2}} \quad (8.41)$$

ili u decibelima:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} k - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (8.42)$$

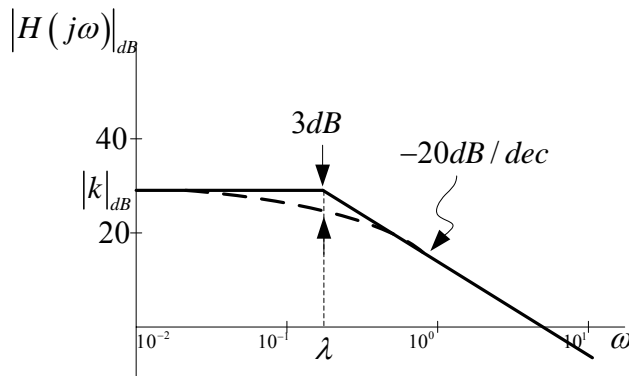
Jasno je da se funkcije definisane relacijama (8.41) i (8.42) mogu skicirati ili nacrtati pomoću nekog od programskih paketa ili programskih jezika, međutim, Bode je predložio vrlo jednostavnu aproksimaciju koja dovodi do vrlo tačnih aproksimativnih rešenja. Takvo aproksimativno rešenje se za ovaj slučaj sastoji u sledećem: podelimo sve učestanosti u dva podskupa: $\omega < \lambda$ i $\omega > \lambda$. Za prvi skup učestanosti količnik ω / λ je manji od 1, pa ćemo taj količnik zanemariti u odnosu na sabirak 1, i aproksimacija amplitudske karakteristike postaje konstanta:

$$\omega < \lambda \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log k \quad (8.43)$$

Sa druge strane, ukoliko je $\omega > \lambda$, količnik ω / λ je veći od 1, pa se sabirak 1 može zanemariti u odnosu na ω / λ . Tada aproksimacija dobija oblik:

$$\omega > \lambda \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} k - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\lambda} \quad (8.44)$$

što jeste u logaritamskoj razmeri linearni segment sa nagibom od -20 decibela po dekad. Spajajući ova dva linearna segmenta dobija se Bodeova amplitudska karakteristika sistema prikazana na slici 8.6.



Slika 8.6: Bodeova amplitudska karakteristika sistema sa frekvencijskim odzivom (8.39)

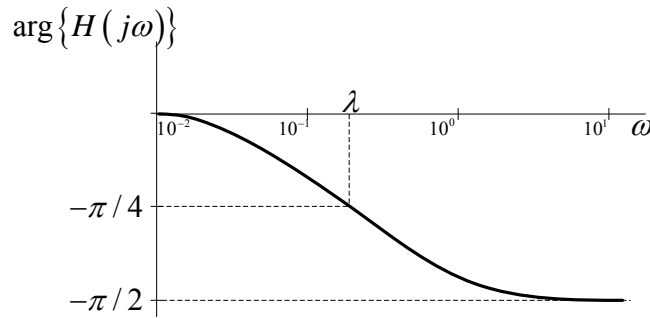
Zanimljivo je proveriti u kojoj meri ovako dobijena aproksimativna amplitudska frekvencijska karakteristika zaista odstupa od prave karakteristike. Lako se pokazuje da je najveće odstupanje

ovih karakteristika u kolenu aproksimativne funkcije u tački $\omega = \lambda$ i ono iznosi $3dB$. Prava karakteristika je prikazana na slici 8.6 isprekidanom linijom.

Fazna karakteristika sistema glasi:

$$\arg \{H(j\omega)\} = \arg \left\{ \frac{k}{1 + j\omega/\lambda} \right\} = -\arctan \frac{\omega}{\lambda}; \quad k > 0 \quad (8.45)$$

gde je opet pretpostavljeno da je pojačanje k pozitivno, inače se cela fazna karakteristika pomera za ugao π . Oblik ove karakteristike je dat na slici 8.7.



Slika 8.7: Fazna frekvencijska karakteristika sistema čiji je frekvencijski odziv (8.39)

Treći slučaj: Pretpostavimo da su svi koeficijenti a_0, a_1, b_0 i b_1 različiti od nule. Ako ponovo frekvencijski odziv predstavimo u Bodeovoj formi, dobićemo:

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0 + j\omega a_1} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + j\omega b_1/b_0}{1 + j\omega a_1/a_0} = k \frac{1 + j\omega/\mu}{1 + j\omega/\lambda} \quad (8.46)$$

gde je

$$k = \frac{b_0}{a_0}, \quad \lambda = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu = \frac{b_0}{b_1} \quad (8.47)$$

Pretpostavimo dalje da je $k > 0, \lambda > 0$ i $\mu > 0$. Takođe je važno imati informaciju koji je od parametara μ i λ veći, jer njihov odnos značajno menja oblik amplitudske karakteristike. Otuda razlikujemo dva slučaja. Neka je u prvom slučaju $\lambda < \mu$. Ako sada napišemo decibelski izraz za moduo frekvencijskog odziva

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} k + 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 \right) - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (8.48)$$

očigledno da sada postoje dve kritične tačke za učestanost ω i Bodeova aproksimacija se sastoji u tome da ceo mogući skup učestanosti podelimo u tri podskupa. Prvi podskup je za $\omega < \lambda$. Tada su količnici ω/λ i ω/μ manji od 1 pa će se ovi sabirci zanemariti u odnosu na 1:

$$\omega < \lambda \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} k = |k|_{dB} \quad (8.49)$$

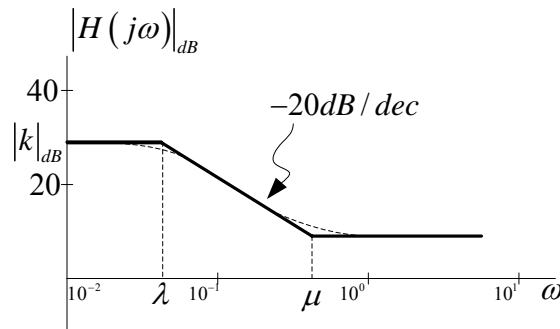
što predstavlja linearni segment sa nagibom od $0dB$ po dekadi. Za opseg učestanosti $\lambda < \omega < \mu$, količnik ω/λ postaje veći od 1 pa se 1 zanemaruje u odnosu na njega, dok je količnik ω/μ još uvek manji od 1 pa se on zanemaruje u odnosu na 1. Tada aproksimacija postaje:

$$\lambda < \omega < \mu \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} k - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\lambda} \quad (8.50)$$

što takođe predstavlja linearni segment sa nagibom od $-20dB$ po dekadi. Na kraju, ako pretpostavimo da je $\omega > \mu$, Bodeova aproksimacija amplitudske karakteristike postaje:

$$\omega > \mu \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} k + 20 \log_{10} \frac{\omega}{\mu} - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\lambda} = 20 \log_{10} k + 20 \log_{10} \frac{\lambda}{\mu} \quad (8.51)$$

što je takođe linearni segment nagiba $0dB$ po dekadi. Kompozicijom ova tri segmenta dobija se Bodeova amplitudska karakteristika prikazana na slici 8.8.



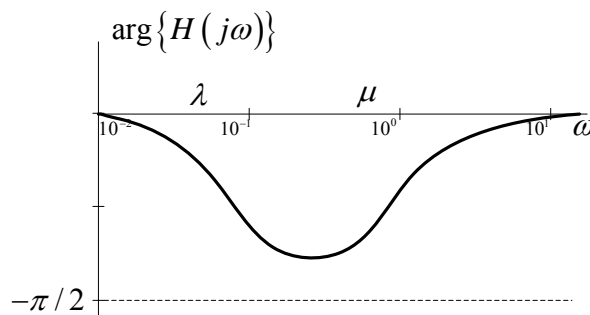
Slika 8.8: Amplitudska frekvencijska karakteristika sistema sa frekvencijskim odzivom (8.46)

Ponovo je na slici 8.8. isprekidanom linijom označena prava vrednost amplitudske karakteristike dobijene bez aproksimacija. Uočava se da je najveća razlika između ove dve karakteristike u kolenima karakteristike i maksimalno odstupanje opet nije veće od $3dB$.

Fazna karakteristika ovakvog sistema glasi:

$$\arg \{H(j\omega)\} = \arg \left\{ k \frac{1 + j\omega/\mu}{1 + j\omega/\lambda} \right\} = \arctan \left(\frac{\omega}{\mu} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) \quad (8.52)$$

Na slici 8.9 je prikazana ova fazna karakteristika.



Slika 8.9: Fazna karakteristika sistema čiji je frekvencijski odziv (8.46)

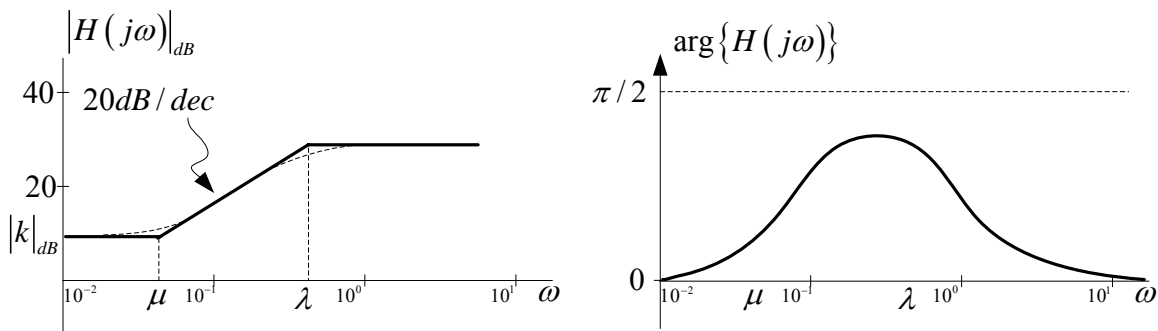
U slučaju da je vrednost parametra λ veća od parametra μ oblik i amplitudske i fazne karakteristike se menja. Ponovo se u cilju aproksimacije amplitudske karakteristike skup učestanosti ω deli na tri podskupa:

$$\omega < \mu \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = |k|_{dB} + 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 \right) - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right) \approx |k|_{dB} \quad (8.53)$$

$$\begin{aligned} \mu < \omega < \lambda &\Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = |k|_{dB} + 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 \right) - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right) \\ &\approx |k|_{dB} + 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} \lambda < \omega &\Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = |k|_{dB} + 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2 \right) - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right) \\ &\approx |k|_{dB} + 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\mu} \right) - 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) = |k|_{dB} + 20 \log_{10} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (8.55)$$

Razlika u odnosu na prethodni slučaj je u tome da je srednji segment, za učestanosti $\mu < \omega < \lambda$ linearni segment sa nagibom od $+20dB$ po dekad. Oblik amplitudske i fazne karakteristike ovakvog sistema dat je na slici 8.10.



Slika 8.10: Amplitudska i fazna frekvencijska karakteristika sistema (8.46) za $\mu < \lambda$

Korisno je da studenti nacrtaju asimptotske amplitudske i fazne karakteristike sistema sa sledećim frekvencijskim odzivima:

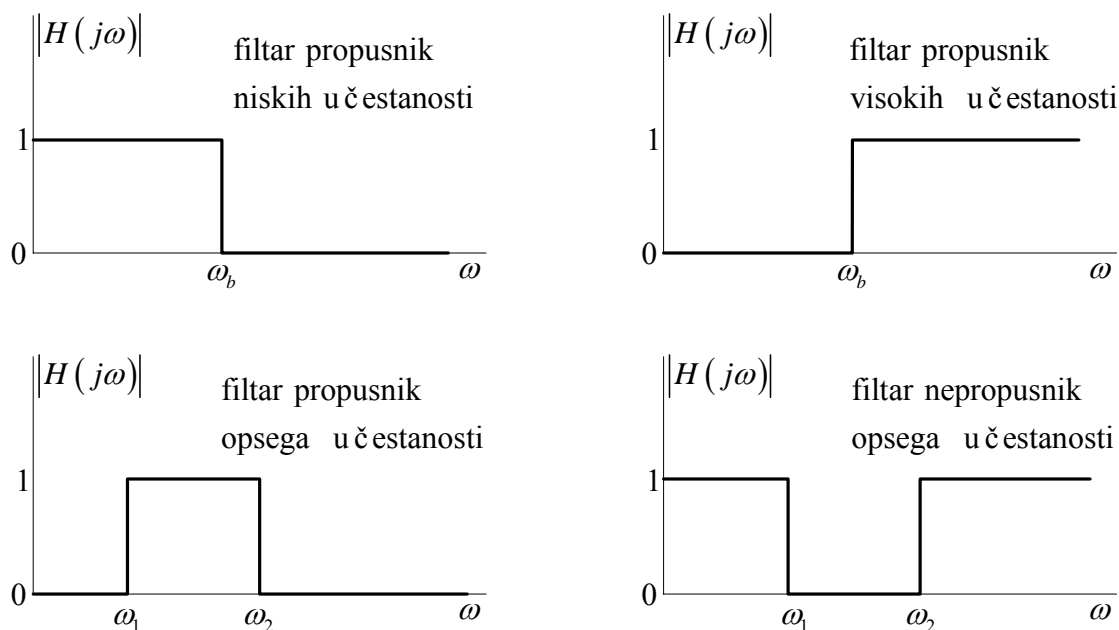
$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= \frac{5j\omega}{1+5j\omega}; \quad H_2(j\omega) = \frac{100}{(1+j\omega)(1+10j\omega)}; \\ H_3(j\omega) &= \frac{100(1+5j\omega)}{(1+j\omega)(1+10j\omega)}; \quad H_4 = \frac{100(1-5j\omega)}{(1+j\omega)(1+10j\omega)} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Pitanje 23: Filtracija signala

Jedna od osnovnih operacija koja se realizuje prilikom obrade signala jeste filtracija signala. Pod izrazom filter, se u tehnici, uglavnom podrazumeva neki podsistem ili uređaj sa specijalnom namenom. U teoriji obrade signala pod filtrom se podrazumeva sistem sa specificiranom amplitudskom i faznom karakteristikom. Najčešće su to, takozvani, frekvencijski selektivni filteri i njihov oblik amplitudske karakteristike je dat na slici 8.11.

Za sve ove filtere se podrazumeva da je njihov impulsni odziv realna funkcija vremena, pa otuda važi da je

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \quad (8.57)$$



Slika 8.11: Karakteristični oblici amplituda frekvencijsko selektivnih filtera

Na primer, za idealan filtar propusnik niskih učestanosti se usvaja sledeća amplitudska karakteristika:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_b \\ 0, & |\omega| > \omega_b \end{cases} \quad (8.58)$$

Otuda, ako na ulaz ovakvog filtra dovedemo signal $x(t)$, na njegovom izlazu će se pojaviti signal $y(t)$, čija je amplituda spektra

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)| = \begin{cases} |X(j\omega)|, & |\omega| < \omega_b \\ 0, & |\omega| > \omega_b \end{cases} \quad (8.59)$$

što znači da idealan niskopropusni filtar propušta samo one komponente signala koje su manje od učestanosti odsecanja ω_b a sve ostale odseca ili, koristi se termin, potiskuje.

Primer 8.3: U pitanju broj 20 smo se bavili odabiranjem kontinualnih signala i na slici 8.2. je prikazano da se kao posledica odabiranja dobio signal čiji je spektar periodičan. Vrlo često su te replike originalnog signala na višim učestanostima nepotrebne i štetne, i zbog toga se koristi takozvani postfilter čiji je osnovni zadatak da propusti frekvencijski sadržaj u osnovnom segmentu učestanosti a da sve ostale sadržaje potisne. Dakle, logično je da se za tu svrhu iskoristi filtar propusnik niskih učestanosti. Pretpostavimo da je učestanost odabiranja pravilno izabrana, odnosno da je zadovoljen uslov

$$\omega_s > 2\omega_b \quad (8.60)$$

U želji da se spektar originalnog signala $X(j\omega)$ rekonstruiše iz spektra signala $Y(j\omega)$, isprojektujemo idealan filtar propusnik niskih učestanosti:

$$H_L(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (8.61)$$

gde je sa T označena perioda odabiranja: $T = 2\pi / \omega_s$. Često se za ovakvu vrstu filtra koristi i termin *filtrar nulte faze*, jer se podrazumeva da je fazna karakteristika ovog filtra konstantna i iznosi nula. Ako sa $h_L(t)$ označimo impulsni odziv ovog filtra, u važnosti je relacija:

$$x(t) = h_L(t) * y(t) \quad (8.62)$$

ili, na osnovu relacije (8.3)

$$x(t) = h_L(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_L(t - kT) \quad (8.63)$$

Ako usvojimo da je $\omega_c = \omega_s / 2$, impulsni odziv filtra postaje:

$$\begin{aligned} h_L(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \frac{e^{j\omega t}}{jt} \Big|_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{e^{j\omega_s t/2} - e^{-j\omega_s t/2}}{jt} = \frac{T}{\pi} \frac{\sin(\omega_s t/2)}{t} = \frac{T\omega_s}{2\pi} \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} = \text{sinc}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \end{aligned} \quad (8.64)$$

Drugim rečima, idealna rekonstrukcija signala $x(t)$ na osnovu njegovih odbiraka $x(kT)$ se može dobiti primenom relacije:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - kT)}{T}\right) \quad (8.65)$$

Pri tome, nemojmo zaboraviti da je ova idealna rekonstrukcija dobijena pod pretpostavkom da je frekvencijski spektar originalnog signala bio ograničen i da je učestanost odabiranja izabrana tako da bude zadovoljena relacija (8.60).

O tehnikama projektovanja filtara sa zadatom amplitudskom ili faznom karakteristikom biće govora u predmetima kao što su Digitalna obrada signala ili Sistemi automatskog upravljanja na višim godinama studija.