Pitanje 12: Pregled i osobine diskretnih sistema

Sve osobine koje smo naveli kao osnovne karakteristike kontinualnih sistema imaju odgovarajuću interpretaciju u domenu diskretnih sistema. Ove osobine imaju značajne posledice po ponašanje sistema i zbog toga će biti data njihova odgovarajuća matematička interpretacija.

Sistemi sa memorijom

Za diskretni sistem kažemo da ima memoriju ukoliko njegov odziv $y[n]$ u nekom trenutku $n = n_0$ ne zavisi samo od ulazan u tom istom trenutku $x[n_0]$ već i od vrednosti ulaznog signala u nekim drugim vremenskim trenucima. Ti drugi vremenski trenuci mogu pripadati, generalno govoreći, i prošlosti i budućnosti. U protivnom, ukoliko nam je za sračunavanje odziva u trenutku $n = n_0$ dovoljno da znamo vrednost ulaznog signala u tom istom trenutku $x[n_0]$, za sistem kažemo da je bez memorije.

Trivijalan primer sistema bez memorije je sistem opisan sledećom relacijom:

$$y[n_0] = x^2[n_0] \tag{5.1}$$

dok je primer, takozvanog, akumulatora:

$$y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n] \tag{5.2}$$

tipičan primer sistema sa memorijom.

Kauzalnost sistema

Diskretni sistem je kauzalan ukoliko njegov odziv $y[n]$ u proizvoljnom trenutku $n = n_0$ zavisi od vrednosti $x[n]$ za $n \le n_0$. Drugim rečima, ako odziv sistema u sadašnjem trenutku zavisi od ulaza sistema u sadašnjem i prošlim trenucima, a ne od ulaza u budućnosti, sistem je kauzalan. Dakle, realan sistem mora biti kauzalan, jer ga drugačije nije moguće realizovati.

Istini za volju, u obradi signala se često pojavljuje potreba za nekauzalnim sistemima, međutim oni se mogu primeniti isključivo u takozvanom *off-line* postupku, kada su svi odbirci signala već zabeleženi, i kada se nad njima naknadno vrši obrada. Jedan od takvih filtara je takozvano centrirano prozorsko usrednjavanje definisano sledećom relacijom:

$$y[n_0] = \sum_{n=n_0-2}^{n_0+2} x[n] \tag{5.3}$$

Linearni diskretni sistemi

Analogno kao kod kontinualnih signala, za diskretni sistem kažemo da je linearan ukoliko zadovoljava dva svojstva: aditivnost i homogenost.

Sistem zadovoljava uslov aditivnosti ukoliko na pobudu $x_1[n] + x_2[n]$ generiše odziv $y_1[n] + y_2[n]$, gde su $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pojedinačni odzivi na pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respektivno. Sa druge strane, za sistem kažemo da zadovoljava uslov homogenosti ukoliko za pobudu $ax[n]$ generiše odziv $ay[n]$, gde je sa $y[n]$ obeležen odziv sistema za pobudu $x[n]$.

Svojstva aditivnosti i homogenosti su istovremeno sadržana u principu superpozicije koji kaže da sistem zadovoljava ovaj princip ukoliko za pobudu $a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$ generiše odziv $a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$ gde su $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pojedinačni odzivi na pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respektivno.

Vremenski invarijantni sistemi

Vremenski invarijantni diskretni sistemi podrazumevaju da se pomeraj u ulaznom signalu direktno preslikava u pomeraj u odzivu sistema. Drugim rečima, ako je odziv sistema na pobudu $x[n]$ bio $y[n]$, tada će odziv na pobudu $x[n-n_0]$ biti $y[n-n_0]$. Ako je ovo tvrđenje tačno za bilo koji ulazni signal i bilo koji pomeraj, sistem je vremenski invarijantan.

Stabilnost diskretnih sistema

Za diskretni sistem kažemo da je stabilan u smislu ograničen ulaz- ograničen izlaz (BIBO stabilnost) ukoliko za proizvoljni pobudni signal koji zadovoljava uslov

$$|x[n]| \le B_1 \tag{5.4}$$

dobijamo odziv $y[n]$ ograničen po svojoj amplitudi, odnosno

$$|y[n]| \le B_2 \tag{5.5}$$

za konačne konstante B_1 i B_2.

Primer BIBO stabilnog sistema je takozvano jedinčno kašnjenje:

$$y[n] = x[n-1] \tag{5.6}$$

Jednostavno se dokazuje da je ovakav sistem BIBO stabilan:

$$|y[n]| = |x[n-1]| \le B_1 \tag{5.7}$$

dok je primer nestabilnog sistema takozvani sabirač (ili akumulator)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{5.8}$$

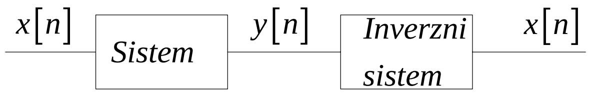
Ako pretpostavimo da smo na ulaz sabirača doveli jediničnu odskočnu funkciju koja je ograničena, na izlazu dobijamo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = r[n] \tag{5.9}$$

gde je sa $r[n]$ označena jedinična diskretna usponska funkcija i koja teži beskonačnosti kako promenljiva *n* raste.

Invertibilni sistemi

Kao i za slučaj kontinualnih sistema, za diskretni sistem kažemo da je invertibilan ukoliko njegov ulazni signal $x[n]$ jednoznačno može biti određen na osnovu njegovog izlaza $y[n]$. Drugim rečima, sistem je invertibilan ukoliko različiti ulazi generišu različite izlaze. Dakle, ako je sistem invertibilan može se odrediti njegov inverzni sistem koji za ulaz $y[n]$ generiše odziv $x[n]$, kako je to prikazano na slici 5.1.



Slika 5.1: Primer sistema i njegove inverzije

Primer invertibilnog sistema je diskretni sabirač ili akumulator. Njegov inverzni sistem je opisan sledećom relacijom:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \tag{5.10}$$

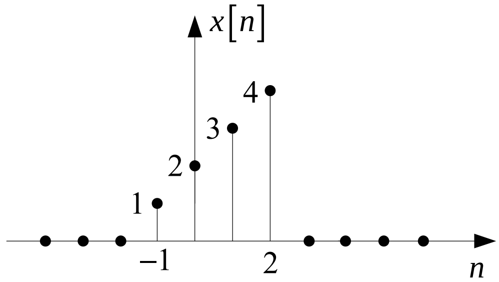
Pitanje 13: Diskretni linearni vremenski invarijantni (LTI) sistemi

Sve napred navedene osobine diskretnih sistema su važne, međutim posebnu pažnju zahtevaju osobine linearnosti i vremenske invarijantnosti. Zbog toga će sistemima koji imaju ova dva svojstva biti posvećeno više prostora i kao i u slučaju kontinualnih sistema biće korišćena oznaka LTI (*Linear Time Invariant*) sistem. Jedan od fundamentalnih načina da se ovakav sistem opiše jeste njegov impulsni odziv, jer će se kasnije pokazati da odziv sistema na bilo koju pobudu može da se sračuna kao konvolucija impulsnog odziva i te pobude.

Da bismo došli do ovog rezultata pođimo od proizvoljnog pobudnog signala $x[n]$. Uzmimo za primer signal

$$x[n] = (n+2)\big(u[n+1] - u[n-3]\big) \tag{5.11}$$

prikazan slikom 5.2.



Slika 5.2: Primer pobudnog signala

Ukoliko se tako dogovorimo, signal $x[n]$ se može napisati i u obliku zbir jedinčnih impulsa:

$$x[n] = \sum_{k=-1}^{2} (k+2)\,\delta[n-k] \tag{5.12}$$

Zapravo, bilo koji pobudni signal se može napisati u formi zbira jediničnih impulsnih signala:

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{5.13}$$

ili u kompaktnijoj formi:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{5.14}$$

Pretpostavimo sada da smo na ulaz LTI diskretnog sistema doveli kao pobudu jediničnu impulsnu funkciju $x[n] = \delta[n]$. Takođe pretpostavimo da se na izlazu sistema pojavio odziv $h[n]$. Ovaj ćemo signal zvati jedinični impulsni odziv sistema.

Slika 5.3: Definicija jediničnog impulsnog odziva sistema

Kako je naš sistem vremenski invarijantan, to znači da će on za pomerenu pobudu $x[n] = \delta[n-k]$ generisati pomerni odziv $h[n-k]$. Istovremeno, naš je sistem linearan pa onda važi i princip superpozicije, što znači da za pobudu

$$x[n] = \sum_{k} a_k \delta[n-k] \tag{5.15}$$

sistem treba da generiše odziv

$$y[n] = \sum_{k} a_k h[n-k] \tag{5.16}$$

Tako će naš sistem sa impulsnim odzivom $h[n]$ za pobudu definisanu signalom (5.12) generisati odziv

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} (k+2) h[n-k] \tag{5.17}$$

Do rezultata smo došli primenom principa superpozicije, a da konvoluciju nismo ni pomenuli. Do očekivanog rezultata ćemo doći ukoliko u relaciji (5.15) izvršimo smenu $a_k = x[k]$, čime dobijamo relaciju (5.14) i direktno odatle dolazimo do vrlo važnog rezultata da je odziv sistema na bilo koju pobudu jednak konvoluciji impulsnog odziva i pobude:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{5.18}$$

Kako je konvolucija komutativna operacija, poslednji izraz se može po potrebi napisati i u sledećoj formi

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = h[n] * x[n] \tag{5.19}$$

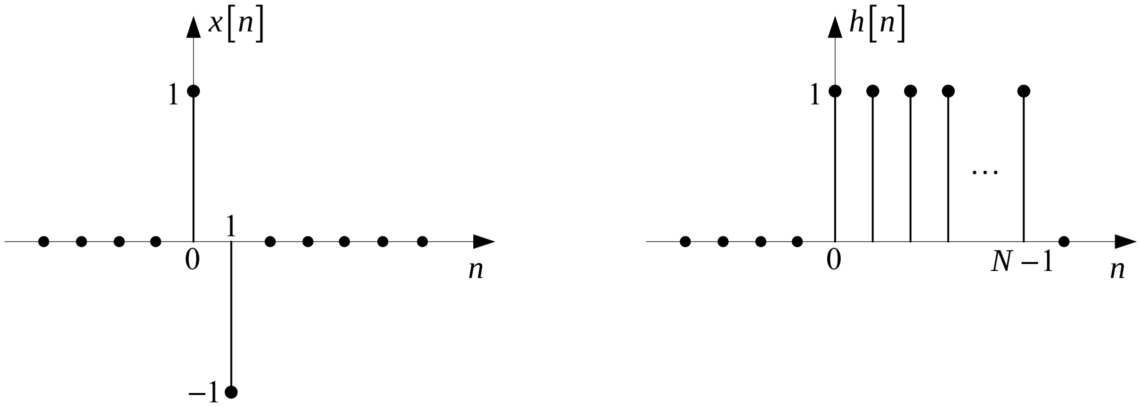
Primer 5.1: Sračunajmo odziv sistema čiji je impulsni odziv

$$h[n] = u[n] - u[n-N] \tag{5.20}$$

na pobudu

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \tag{5.21}$$

Ovi signali su prikazani na slici 5.4.



Slika 5.4: Pobuda i impulsni odziv sistema

Do rešenja se jednostavno može doći na dva načina. Prvi je principom superpozicije. Naime, ako je pobuda sistema predstavljena algebarskim zbirom dva imulsna signala

$$x[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \tag{5.22}$$

onda je odziv sistema jednak zbiru dva pomerena impulsna odziva:

$$y[n]=h[n]-h[n-1]=\big(u[n]-u[n-N]\big)-\big(u[n-1]-u[n-N-1]\big) \tag{5.23}$$

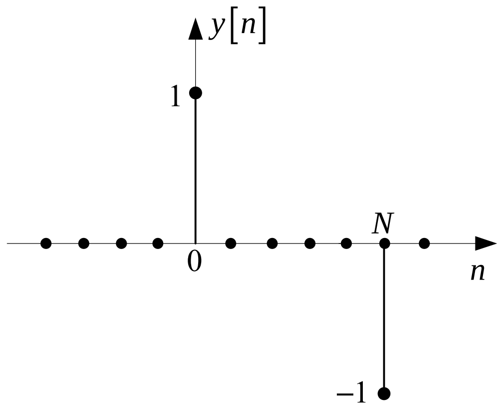
Poslednji izraz se može napisati u formi:

$$y[n]=\big(u[n]-u[n-1]\big)-\big(u[n-N]-u[n-N-1]\big)=\delta[n]-\delta[n-N] \tag{5.24}$$

Do potpuno identičnog rezultata se moglo doći primenom konvolucije:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N-1}x[n-k]=\sum_{k=n-N+1}^{n} x[m] \\ &= \sum_{m=n-N+1}^{n}\big(\delta[m]-\delta[m-1]\big)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]-\sum_{m=-\infty}^{n-N}\delta[m]-\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m-1]+\sum_{m=-\infty}^{n-N}\delta[m-1] \\ &= u[n]-u[n-1]-u[n-N]+u[n-N-1]=\delta[n]-\delta[n-N] \end{aligned} \tag{5.25}$$

Ovaj rezultat je prikazan na slici 5.5.



Slika 5.5: Odziv sistema

Primer 5.2: Sračunajmo odskočni odziv diskretnog LTI sistema čiji je impulsni odziv dat:

$$h[n] = a^n u[n] \tag{5.26}$$

Polazeći od činjenice da je odziv linearnog stacionarnog diskretnog sistema na bilo koju pobudu jednak diskretnoj konvoluciji te pobude i impulsnog odziva, možemo pisati:

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] h[n-k] \tag{5.27}$$

Uzimajući u obzir osobine jedinične odskočne funkcije poslednja suma se može pojednostaviti:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k] \tag{5.28}$$

ili nakon smene promenljivih $n-k=m$

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[n] \tag{5.29}$$

Poslednja relacija definiše vezu između jediničnog odskočnog i jediničnog impulsnog odziva diskretnih sistema. Dakle, umesto integrala kod kontinualnih sistema, kod diskretnih sistema se odskočni odziv definiše preko sume odbiraka impulsnog odziva, i obrnuto, umesto izvoda kod kontinualnih sistema, impulsni odziv se može sračunati kao konačna jednokoračna razlika odskočnog odziva:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{5.30}$$

U našem slučaju gde je impulsni odziv definisan relacijom (5.26), odskočni odziv postaje:

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} a^m u[m] = \begin{cases} 0 \ ; \ n<0 \\ \sum\limits_{m=0}^{n} a^m \ ; \ n \geq 0 \end{cases} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n] \tag{5.31}$$

Na ovom mestu možemo definisati impulsne odzive nekih često korišćenih a jednostavnih diskretnih sistema.

Jedinično kašnjenje

Rad sistema koji se naziva jediničnim kašnjenjem je opisan sledećom relacijom:

$$y[n] = x[n-1] \tag{5.32}$$

Samim tim je impulsni odziv jediničnog kašnjenja:

$$h[n] = \delta[n-1] \tag{5.33}$$

Jedinično prednjačenje

Potpuno analogno sa jediničnim kašnjenjem, relacija koja definiše rad ovog diskretnog sistema je

$$y[n] = x[n+1] \tag{5.34}$$

sa odgovarajućim impulsnim odzivov

$$h[n] = \delta[n+1] \tag{5.35}$$

Primetimo da je sistem jediničnog prednjačenja nekauzalan.

Akumulator ili sabirač

Rad akumulatora ili sabirača je sadržan u sledećoj vezi između ulaznog signala $x[n]$ i njegovog izlaza $y[n]$:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{5.36}$$

Ukoliko umesto signala $x[k]$ upotrebimo diskretni impuls, odziv sistema postaje impulsni odziv:

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]=u[n] \tag{5.37}$$

dakle, jedinična odskočna funkcija.

Pitanje 14: Osobine diskretnih linearnih vremenski invarijantnih (LTI) sistema

Po analogiji sa kontinualnim sistemima, cilj nam je da se kroz ovo pitanje analiziraju svojstva impulsnih odziva koji zadovoljavaju ili ne zadovoljavaju osobine kao što su kauzalnost, posedovanje memorije, stabilnost i invertibilnost.

Sistemi sa memorijom

Linearni, vremenski invarijantan diskretni sistem bez memorije je definisan relacijom

$$y[n]=Kx[n] \tag{5.38}$$

pa je samim tim njegov impulsni odziv

$$h[n]=K\delta[n] \tag{5.38}$$

Zaključujemo da ako impulsni odziv nekog sistema zadovoljava uslov da je $h[n_0]\neq 0$ za neko $n_0\neq 0$, da je u pitanju sistem sa memorijom.

Kauzalni sistem

Kauzalnost podrazumeva da sistem ne može da generiše odgovor, odnosno odziv, pre nego što se pobuda pojavi na njegovom ulazu. Dakle, impulsni odziv $h[n]$ nekog kauzalnog sistema mora da zadovolji uslov:

$$h[n]=0 \quad za \;\; n<0 \tag{5.39}$$

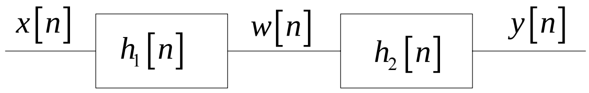
U slučaju kauzalnih sistema, konvolucija kojom se sračunava odziv sistema $y[n]$ na proizvoljnu pobudu $x[n]$ može da se napiše u pojednostavljenoj formi:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]=\sum_{l=-\infty}^{n} x[l]h[n-l] \tag{5.40}$$

Iz poslednje jednakosti se jednoznačno vidi da na vrednost odziva $y[n]$ utiču isključivo odbirci signala $x[l]$ za $l\leq n$.

Kaskadna veza

Pod kaskadnom vezom dva diskretna signala podrazumevamo takvu vezu u kojoj je izlaz prvog sistema istovremeno ulaz drugog, kako je to prikazano na slici 5.6.



Slika 5.6: Kaskadna veza dva linearna diskretna sistema

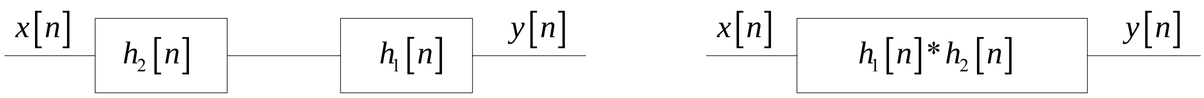
Na osnovu slike 5.6. odziv $y[n]$ možemo napisati u sledećoj formi:

$$y[n] = w[n] * h_2[n] = \left[x[n] * h_1[n]\right] * h_2[n] \tag{5.41}$$

Uzimajući u obzir osobine komutativnosti i asocijativnost operacije diskretne konvolucije, poslednji izraz se može napisati i u sledećoj formi:

$$y[n] = x[n] * \left[h_1[n] * h_2[n]\right] = \left[x[n] * h_2[n]\right] * h_1[n] \tag{5.42}$$

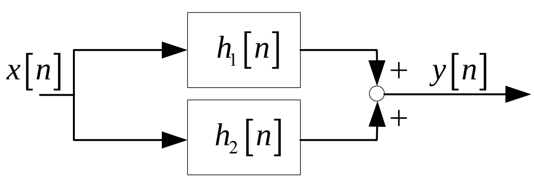
što znači da u kaskadnoj vezi LTI sistemi mogu menjati svoja mesta. Drugi zaključak je da se kaskadna veza dva LTI sistema može ekvivalentno predstaviti jednim LTI sistemom koji ima impulsni odziv jednak konvoluciji impulsnih odziva početnih sistema u kaskadi. Ove dve ekvivalentne strukture su prikazane na slici 5.7.



Slika 5.7: Strukture ekvivalentne kaskadnoj vezi sa slike 5.6

Paralelna veza dva LTI sistema

Pod paralelnom vezom dva LTI sistema se podrazumeva veza dva sistema koji imaju zajednički ulazni signal i pri čemu se njihovi odzivi sabiraju i formiraju zajednički izlaz, kako je to prikazano na slici 5.8.



Slika 5.8: Paralelna veza dva LTI sistema

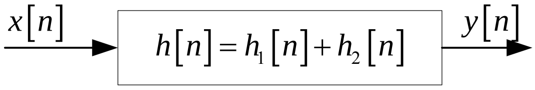
Na osnovu slike 5.8, možemo izračunati odziv sistema $y[n]$ na sledeći način:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \tag{5.43}$$

Uzimajući u obzir osobinu distributivnosti operacije konvolucije nad sabiranjem, poslednji izraz se može napisati na sledeći način:

$$y[n] = x[n] * \left[h_1[n] + h_2[n]\right] \tag{5.44}$$

što nam govori da se paralelna veza dva LTI sistema ekvivalentno može predstaviti kao jedan LTI sistem čiji je impulsni odziv jednak zbiru impulsnih odziva sistema u paraleltnim granama (slika 5.9).



Slika 5.9: Sistem ekvivalentan paralelnoj vezi dva LTI sistema

Stabilnost sistema

BIBO stabilnost diskretnog LTI sistema se vrlo jednostavno može proveriti pomoću impulsnog odziva $h[n]$. Pretpostavimo da je ulazni signal $x[n]$ takav da zadovoljava sledeći uslov:

$$(\forall n)\ |x[n]| \le B_1 \tag{5.45}$$

Tada se apsolutna vrednost odziva $y[n]$ može napisati u sledećoj formi:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \tag{5.46}$$

Znajući da je apsolutna vrednost zbira uvek manja ili jednaka od zbira apsolutnih vrednosti sabiraka, dobijamo sledeću nejednakost:

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]h[n-k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]| \le B_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \tag{5.47}$$

Uslov da naš sistem bude BIBO stabilan jeste da beskonačna suma u izrazu (5.47) bude ograničena, odnosno

$$(\exists G) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \le G \tag{5.48}$$

U tom slučaju je i apsolutna vrednost odziva ograničena:

$$|y[n]| \le B_1 G = B_2 \tag{5.49}$$

Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov da LTI sistem bude BIBO stabilan jeste da njegov impulsni odziv bude apsolutno sumabilan, odnosno da bude zadovoljena relacija (5.48).

Primer 5.3: Impulsni odziv jednog diskretnog LTI sistema glasi:

$$h[n] = a^n u[n] \tag{5.50}$$

Lako možemo proveriti pod kojim uslovima, odnosno za kakvo a je ovaj sistem BIBO stabilan. Ako, shodno relaciji (5.48) sračunamo sumu

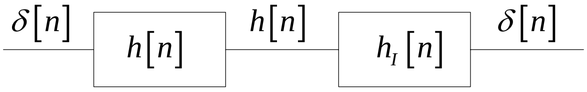
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-|a|^k}{1-|a|} \tag{5.51}$$

Očigledno je da poslednja granična vrednost postoji, samo pod uslovom da je $|a|<1$ i tada ona iznosi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h[k] \right| = \frac{1}{1-|a|} \; ; \; |a| < 1 \tag{5.52}$$

Invertibilnost sistema

Pod pretpostavkom da LTI sistem čiji je impulsni odziv $h[n]$ ima inverzni sistem, možemo formirati kaskadnu konekciju originalnog sistema i inverznog sistema kakva je prikazana na slici 5.10.



Slika 5.11: Kaskadna veza originalnog i inverznog sistema

Pod tom pretpostavkom, ako na ulaz originalnog sistema dovedemo diskretni impuls, na njegovom izlazu će se pojaviti impulsni odziv $h[n]$ a na izlazu iznverznog sistema, čiji je impulsni odziv označen sa $h_I[n]$ će se pojaviti ponovo diskretni impuls. Tada možemo pisati:

$$h[n] * h_I[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h_I[n-k] = \delta[n] \tag{5.53}$$

Drugim rečima, da bi LTI diskretni sistem bio invertibilan, potrebno je da postoji signal $h_I[n]$ koji zadovoljava relaciju (5.53) i to će biti impulsni odziv njegovog inverznog sistema. Postupak za nalaženje impulsnog odziva inverznog sistema, ako on postoji, može biti vrlo složen, međutim i ukoliko on postoji i mi ga izračunamo, vrlo često taj inverzni sistem nema neke od nama važnih osobina kao što su kauzalnost i stabilnost.

Pitanje 15: Diferencne jednačine i njihova primena

Uloga diferencnih jednačina u domenu diskretnih sistema je potpuno analogna ulozi diferencijalnih jednačina u prostoru kontinualnih sistema. Opšta forma linearne diferencne jednačine *N*-tog reda sa konstantnim koeficijentima jeste

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{5.54}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine se uvek može napisati u obliku:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] \tag{5.55}$$

gde je sa $y_p[n]$ označeno partikularno rešenje koje zadovoljava jednačinu (5.54), a sa $y_h[n]$ je označeno homogeno rešenje koje zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \tag{5.56}$$

pri čemu se egzaktna forma homogenog rešenja dobija na osnovu dodatnih početnih uslova signala $y[n]$.

Primer 5.4: Posmatrajmo diferencnu jednačinu prvog reda

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \tag{5.57}$$

gde je $x[n]$ kauzalni signal

$$x[n]=b^n u[n] \tag{5.58}$$

Ponovo ćemo rešenje diferencne jednačine tražiti posebno za $n\geq 0$ i za $n<0$. Pretpostavimo da je partikularno rešenje $y_p[n]$ za $n\geq 0$ u obliku:

$$y_p[n]=Ab^n \tag{5.59}$$

Smenom u relaciju (5.57) dobijamo:

$$Ab^n-aAb^{n-1}=b^n \tag{5.60}$$

odnosno

$$Ab-Aa=b \Rightarrow A=\frac{b}{b-a} \tag{5.61}$$

Dakle, partikularno rešenje za nenegativno *n* glasi:

$$y_p[n]=\frac{b^{n+1}}{b-a} \;;\; n\geq 0 \tag{5.62}$$

Homogeno rešenje $y_h[n]$ treba da zadovolji relaciju:

$$y_h[n]-ay_h[n-1]=0 \tag{5.63}$$

Usvojmo ovo rešenje u obliku:

$$y_h[n]=Kc^n \tag{5.64}$$

gde posle zamene u (5.63) dobijamo:

$$Kc^n-aKc^{n-1}=0 \Rightarrow Kc-aK=0 \Rightarrow c=a \tag{5.65}$$

Dakle, homogeno rešenje glasi:

$$y_h[n]=Ka^n \tag{5.66}$$

Kombinujući partikularno i homogeno rešenje za nenegativno *n*, dobijamo

$$y[n]=\frac{b^{n+1}}{b-a}+Ka^n \;;\; n\geq 0 \tag{5.67}$$

Da bismo odredili nepoznatu konstantu *K* potreban nam je jedan početni uslov, recimo $y[-1]=Y_i$. Tada možemo pisati:

$$y[0]-ay[-1]=1 \Rightarrow y[0]=aY_I+1=\frac{b}{b-a}+K \tag{5.68}$$

odnosno

$$K=aY_i-\frac{a}{b-a} \;;\; n\geq 0 \tag{5.69}$$

Konačno rešenje za nenegativno *n* postaje

$$y[n] = Y_i a^{n+1} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \;,\; n \geq 0 \tag{5.70}$$

Za $n<0$ originalna diferencna jednačina postaje homogena jer je $x[n]=0$. Dakle, za $n<0$ rešenje diferencne jednačine je

$$y[n] = y_h[n] = Ka^n \;,\; n<0 \tag{5.71}$$

gde se vrednost nepoznatog parametra K ponovo određuje iz postojećeg početnog uslova $y[-1]=Y_i$, dakle

$$Ka^{-1} = Y_i \Rightarrow K = Y_i a \;;\; n<0 \tag{5.72}$$

pa konačno rešenje za negativno *n* postaje:

$$y[n] = Y_i a^{n+1} \;;\; n<0 \tag{5.73}$$

Rešenja (5.70) i (5.73) se mogu objediniti u jedan zapis na sledeći način:

$$y[n] = Y_i a^{n+1} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} u[n] \tag{5.74}$$

Posmatrajući odziv (5.74) dalje možemo zaključiti da prvi sabirak potiče od prisustva početnog uslova, dok drugi sabirak potiče od prisustva kauzalnog signala $x[n]$. Dakle, rešenje diferencne jednačine se može napisati u obliku:

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \tag{5.75}$$

Prvi sabirak nosi indeks *zi* (*zero-input*) jer označava da se on dobija kada postoji početni uslov a ne postoji ulaz u sistem $x[n]$ i jednak je:

$$y_{zi}[n] = Y_i a^{n+1} \tag{5.76}$$

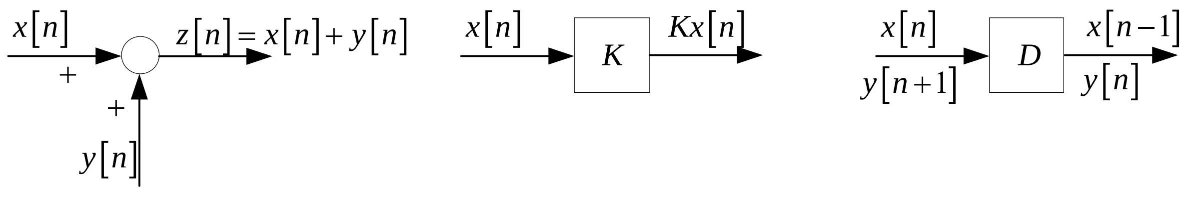
dok drugi sabirak nosi indeks *zs* (*zero states*) jer on označava deo odziva koji potiče od spoljašnjeg signala a ne od početnog uslova:

$$y_{zs}[n] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} u[n] \tag{5.77}$$

Ponovo, ne treba mešati ove sabirke sa partikularnim i homogenim delom rešenja diferencne jednačine jer oni generalno govoreći nisu jednaki.

Blok dijagrami

Slično kao kod kontinualnih sistema, i diskretni sistemi se vrlo često predstavljaju pomoću blok dijagrama gde su elementarni blokovi koji se koriste: sabirači, elementi za kašnjenje (koji se obično obeležavaju sa *D* (*delay*)) i pojačavači ili množači. Ovi blokovi su prikazani na slici 5.12.



Slika 5.12: Elementarni blokovi u diskretnim blok dijagramima (sabirač, množač i element za kašnjenje)

Predstava sistema u obliku blok dijagrama je izuzetno korisna, ne samo sa aspekta lakšeg razumevanja načina na koji sistem funkcioniše, takozvane analize sistema, već i sa aspekta projektovanja diskretnih sistema. Na sledećem primeru ćemo ilustrovati dva različita pristupa predstave diskretnog sistema u formi blok dijagrama.

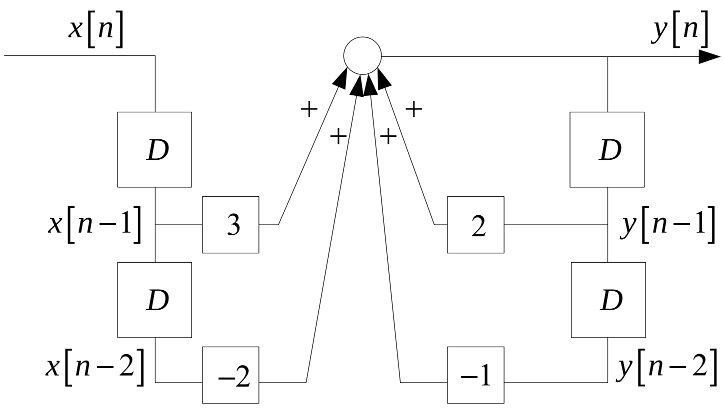
Primer 5.5: Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom

$$y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=3x[n-1]-2x[n-2] \tag{5.78}$$

Kao i u slučaju predstave kontinualnih sistema preko blok dijagrama, najjednostavniji način da se ovaj postupak izvrši jeste takozvana ***direktna realizacija.*** Kao prvi korak, potrebno je izraziti odbirak $y[n]$ preko svih ostalih odbiraka:

$$y[n]=2y[n-1]-y[n-2]+3x[n-1]-2x[n-2] \tag{5.79}$$

i odatle, direktnim postupkom, korišćenjem odgovarajućih blokova za kašnjenje, dobijamo blok dijagram. Ovakav blok dijagram je prikazan na slici 5.13.



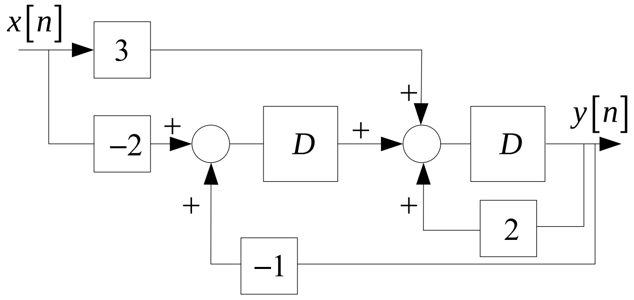
Slika 5.13: Blok dijagram sistema dobijen direktnim postupkom

Iako je direktni postupak vrlo jednostavan u smislu dobijanja blok dijagrama diskretnog sistema, on ima jedan vrlo važan nedostatak, a to je broj elemenata za kašnjenje. Primetimo, sa slike 5.13, da je broj ovih elemenata jednak 4.

Drugi postupak za dobijanje blok strukture sistema jeste takozvana kanonična realizacija. Postupak se sadrži u sledećem: uvedimo oznaku $D\{y[n]\}=y[n-1]$, gde se D tumači kao operator koji primenjen na neki signal vrši njegovo kašnjenje za jedan period odabiranja. Tada relaciju (5.79) možemo napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} y[n]&=2y[n-1]-y[n-2]+3x[n-1]-2x[n-2] \\ &=D\{2y[n]-y[n-1]+3x[n]-2x[n-1]\} \\ &=D\{2y[n]+3x[n]+D\{-y[n]-2x[n]\}\} \end{aligned} \tag{5.80}$$

Poslednji rezultat se može tumačiti na sledeći način: Signal $y[n]$ se može dobiti kao izlaz iz elementa za jedinično kašnjnje, ako se na ulaz tog elementa dovede zbir tri signala, od kojih je prvi $2y[n]$, drugi $3x[n]$ a treći opet izlaz iz drugog elementa za kašnjenje kome je na ulaz doveden zbir signala $-y[n]-2x[n]$. Ova ideja je realizovana na slici 5.14. i naziva se kanoničnim blok dijagramom diskretnog sistema.



Slika 5.15: Kanonični blok dijagram diskretnog sistema

Očigledno da je ovakav, kanonični blok dijagram, mnogo povoljniji sa aspekta projektovanja i realizacije sistema s obzirom da je u njega uključeno dva elemenata za kašnjenje, što zapravo predstavlja red diferencne jednačine kojom je sistem definisan u relaciji (5.78).