Pitanje 10: Osobine kontinualnih LTI sistema

Kako je objašnjeno u prethodnom pitanju, linearan stacionaran kontinualni sistem je u potpunosti definisan kroz njegov jedinični impulsni odziv. Međutim, zanimljivo je videti kako se osobine kauzalnosti, stabilnosti i invertibilnosti odslikavaju na ovaj odziv.

Sistem sa memorijom

Kako izlaz $y(t)$ sistema bez memorije može zavisiti samo od trenutnog ulaznog signala $x(t)$, tada u slučaju linearnog i vremenski invarijantnog sistema, veza između ulaznog i izlaznog signala mora biti

$$y(t) = Kx(t) \tag{10.1}$$

gde se parametar *K* naziva pojačanjem sistema. U tom slučaju impulsni odziv takvog sistema bez memorije glasi

$$h(t) = K\delta(t) \tag{10.2}$$

Shodno tome možemo zaključiti da kadgod je impulsni odziv nekog sistema $h(t_0)$ različit od nule za $t_0 \neq 0$, u pitanju je sistem sa memorijom.

Kauzalni sistem

Kao što smo već rekli, osobina kauzalnog sistema je da on ne može da da odgovor na ulazni signal dok god se taj signal ne pojavi na njegovom ulazu. Dakle, odziv na događaj na ulazu koji se pojavio u trenutku $t = t_0$, za kauzalni sistem, mora biti jednak nuli za svako $t < t_0$. Shodno tome, impulsni odziv kauzalnog sistema mora biti takav da je

$$h(t) = 0 \text{ za } t < 0 \tag{10.3}$$

Primenjujući osobinu kauzalnosti, konvolucioni integral koji definiše odziv kauzalnih sistema postaje:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{10.4}$$

ili, nakon smene promenljivih $t - \tau = \lambda$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \tag{10.5}$$

Poslednja relacija jasno ukazuje da samo vrednosti $x(\lambda)$ gde je $\lambda \leq t$ utiču na vrednost odziva $y(t)$ u trenutku *t*.

Paralelno sa pojmom kauzalnosti sistema, po ugledu na impulsni odziv kauzalnih sistema, definišu se i kauzalni signali. Signal $x(t)$ ćemo zvati kauzalnim ako zadovoljava sledeći uslov

$$x(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \tag{10.6}$$

čak iako signal $x(t)$ nije ničiji impulsni odziv.

Kaskadna (redna) veza sistema

Za dva sistema kažemo da su u rednoj ili kaskadnoj vezi ukoliko je izlaz prvog od njih istovremeno ulazni signal za drugi sistem, kao što je to prikazano na slici 10.1. Kako je izlaz prvog od njih

$$w(t)=x(t)*h_1(t) \tag{10.7}$$

u važnosti je sledeća relacija

$$y(t)=w(t)*h_2(t)=\left[x(t)*h_1(t)\right]*h_2(t) \tag{10.8}$$

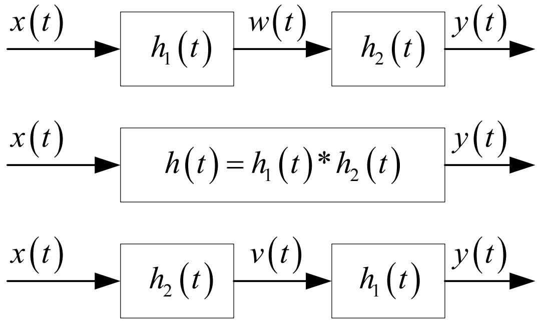
Na osnovu svojstva asocijativnosti koje važi za operaciju konvolucije, dalje možemo pisati

$$y(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]=x(t)*h(t) \tag{10.9}$$

što znači da će se isti odziv dobiti ukoliko signal $x(t)$ dovedemo na ulaz sistema čiji je impulsni odziv jednak $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$. Dalje, na osnovu osobine komutativnosti operacije konvolucije izraz (10.9) može biti napisan i na sledeći način:

$$y(t)=x(t)*\left[h_2(t)*h_1(t)\right]=\left[x(t)*h_2(t)\right]*h_1(t) \tag{10.10}$$

što pak, sa druge strane znači da se u smislu generisanja odziva kaskadne veze sistema ništa ne menja ukoliko sistemi zamene redosled. Dobijeni rezultati se mogu bez probleme generalizovati i za kaskadnu vezu proizvoljnog broja različitih sistema.



Slika 10.1: Ekvivalentne reprezentacije kaskadne veze LTI sistema

Paralelna veza sistema

Za dva sistema se kaže da su paralelno vezani ako imaju zajednički ulazni signal a njihovi izlazi se sabiraju i formiraju zajednički izlazni signal, kao što je to prikazano na slici 10.2. Tada se njihov zbirni izlazni signal može napisati u formi:

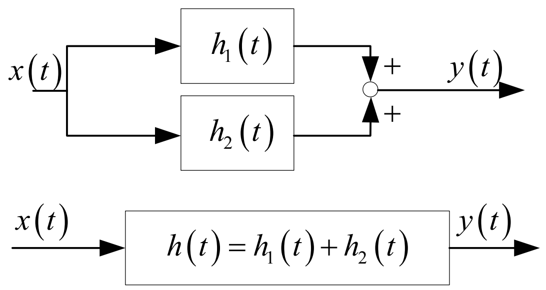
$$y(t)=\left[x(t)*h_1(t)\right]+\left[x(t)*h_2(t)\right] \tag{10.11}$$

a na osnovu osobine distributivnosti operacije konvolucije nad sabiranjem, poslednju relaciju možemo zapisati u sledećoj formi:

$$y(t)=x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h(t) \tag{10.12}$$

Drugim rečima, odziv sistema možemo predstaviti kao izlaz jednog sistema čiji je impulsni odziv jednak:

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t) \tag{10.13}$$



Slika 10.2: Ekvivalentna reprezentacija paralelne veze dva LTI sistema

Slično kao i kod kaskadne veze, i u slučaju paralelne veze sistema, dobijeni rezultat se može generalizovati za proizvoljan broj paralelno vezanih sistema.

Stabilni sistem

BIBO stabilnost LTI kontinualnih sistema se takođe može jednostavno detektovati na osnovu jediničnog impulsnog odziva $h(t)$. Pretpostavimo da je ulazni signal $x(t)$ takav da zadovoljava sledeću nejednakost:

$$|x(t)| \leq B_1 \text{, za svako } t \tag{10.14}$$

gde je B_1 pozitivna konstanta.Tada će apsolutna vrednost odziva sistema biti

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \tag{10.15}$$

Ako se poslužimo činjenicom da je apsolutna vrednost integrala uvek manja ili jednaka od integrala apsolutne vrednosti i da je apsolutna vrednost proizvoda jednaka proizvodu apsolutnih vrednosti, poslednji izraz postaje:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau \leq B_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \tag{10.16}$$

jer je po pretpostavci $|x(t-\tau)| \leq B_1$. Ako je jedinični impulsni odziv apsolutno integrabilan, odnosno ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = G < \infty \tag{10.17}$$

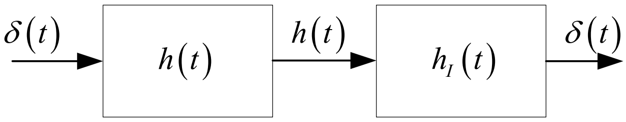
tada se na osnovu prethodne dve relacije može pisati

$$|y(t)| \leq B_1 G = B_2 \tag{10.18}$$

Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov da kontinualan LTI sistem bude BIBO stabilan jeste da njegov impulsni odziv bude apsolutno integrabilan u smislu relacje (10.17).

Invertibilni sistem

Već smo zaključili da ukoliko je sistem invertibilan, tada postoji njemu odgovarajući inverzan sistem, takav da ako se veže u kaskadu sa originalnim sistemom, signali na ulazu i izlazu te kaskade moraju biti identični. Ovo tvrđenje važi za svaki signal na ulazu, pa onda važi i u slučaju kada je ulazni signal Dirakov impuls (slika 10.3). Na ovoj slici je sa $h_I(t)$ označen jedinični impulsni odziv inverznog sistema.



Slika 10.3:Invertibilni LTI sistem i njegov inverzni sistem

U tom slučaju je jasno da impulsni odziv inverznog sistema mora zadovoljiti sledeću relaciju:

$$h(t)*h_I(t)=\delta(t) \tag{10.19}$$

Lako se pokazuje da ako inverzni sistem LTI sistema postoji, onda i on mora biti i linearan i vremenski invarijantan. Ako na ulaz originalnog sistema dovedemo signal $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, tada će se na njegovom ulazu pojaviti signal $y(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$, što je istovremeno ulaz inverznog sistema. Da bi on zaista bio inverzan on mora na svom izlazu da generiše signal $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, što jeste dokaz njegove linearnosti. Sa druge strane ako na ulaz originalnog sistema dovedemo signal $x(t-t_0)$, na njegovom izlazu će biti signal $y(t-t_0)$ a pak na izlazu inverznog sistema ponovo $x(t-t_0)$, što dokazuje njegovu stacionarnost. Kao zaključak ove analize možemo tvrditi da ako je sistem invertibilan, mora postojati funkcija $h_I(t)$ koja zadovoljava relaciju (10.19). Tehnike nalaženja ove funkcije se neće razmatrati na ovom mestu, međutim, ono što ovde svakako možemo navesti jeste, da čak i ako uspemo da odredimo impulsni odziv inverznog sistema on uglavnom nema druge važne osobine koje smo već pomenuli a to su kauzalnost i stabilnost.

Jedinični odskočni odziv

Već smo videli da je opisati sistem pomoću jediničnog impulsnog odziva vrlo efikasan i sadržajan način, jer se pomoću ove funkcije može odediti odziv sistema za bilo koju pobudu, a istovremeno se na osnovu impulsnog odziva mogu analizirati sve značajne osobine sistema. Međutim, u mnogim primenama je jedinični odskočni odziv (odziv sistema ako je na njegov ulaz dovedena jedinična odskočna funkcija) takođe vrlo korisni način da se sistem okarakteriše. Jasno je da se jedinični odskočni odziv sistema može sračunati kao konvolucija impulsnog odziva i jedinične odskočne funkcije:

$$s(t)=h(t)*u(t) \tag{10.20}$$

Uzimajući u obzir specifičnost jediničnog odskočnog signala, poslednji izraz postaje:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,d\tau \tag{10.21}$$

što predstavlja jednostavnu vezu između impulsnog i odskočnog odziva. Konačno, ako se odskočni odziv može sračunati kao odgovarajući integral impulsnog odziva, očigledno je da se i impulsni odziv može sračunati kao prvi izvod odskočnog odziva:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt} \tag{10.22}$$

Primer 10.1: Ukoliko nam je poznat odskočni odziv jednog sistema

$$s(t)=\left[\cos(\omega_0 t)\right]u(t) \tag{10.23}$$

odgovarajući impulsni odziv se direktno sračunava primenom relacije (10.22)

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\cos(\omega_0 t)}{dt}u(t) + \cos(\omega_0 t)\frac{du(t)}{dt} \\
&= -\omega_0 \sin(\omega_0 t)u(t) + \cos(\omega_0 t)\delta(t) = \delta(t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t)u(t)
\end{aligned}
\tag{10.24}
$$

Pitanje 11: Diferencijalne jednačine i njihova primena

Svi smo manje ili više familijarni sa linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima, ili na osnovu znanja iz matematike ili teorije električnih kola. Ovakve vrste jednačina igraju vrlo značajnu ulogu u mnogim naučnim oblastima kao što su elektrotehnika, elektronika, mašinstvo, hemija, tehnologija, fizika i tako dalje. Zapravo, diferencijalne jednačine jesu i specifičan način da se definiše sistem, jer su one uglavnom definisane tako da postoje ulazni signali, da su zavisne promenljive čijim rešavanje možemo odrediti izlazni signal i istovremeno postoji nezavisna vremenska promenljiva. Dakle, sistemi koji su definisani na ovaj način pripadaju širokoj klasi kontinualnih sistema. Ukoliko je u pitanju linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima onda ona definiše linearan stacionaran (LTI) sistem.

Diferencijalna jednačina

Opšti oblik diferencijalne jednačine konačnog reda sa konstantnim koeficijentima je dat u sledećoj formi:

$$
\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k} \tag{11.1}
$$

gde je sa N označen red diferencijalne jednačine i on je uvek jednak najvišem izvodu zavisne promenljive y. Ukoliko nam je poznati konkretan ulazni signal $x(t)$, uopšteno govoreći, signal $y(t)$ koji je rešenje diferencijalne jednačine može da se napiše u formi:

$$
y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{11.2}
$$

gde je sa $y_p(t)$ označeno partikularno rešenje koje zadovoljava uslov (1.1), dok je sa $y_h(t)$ označeno rešenje homogene jednačine:

$$
\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{d t^k} = 0 \tag{11.3}
$$

gde je konkretna forma homogenog dela $y_h(t)$ određena sa N dodatnih uslova sistema.

Primer 11.1: Posmatrajmo odziv $y(t)$ kontinualnog sistema opisanog diferencijalnom jednačinom prvog reda

$$
\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{11.4}
$$

gde je $x(t)$ kauzalni signal

$$
x(t) = e^{-bt}u(t) \tag{11.5}
$$

Pod pretpostavkom da je partikularno rešenje za $t>0$ u sledećoj formi

$$y_p(t)=Ae^{-bt} \tag{11.6}$$

lako proveravamo da $y_p(t)$ mora da zadovolji sledeći uslov:

$$\frac{dy_p(t)}{dt}+ay_p(t)=x(t)\Rightarrow -Abe^{-bt}+aAe^{-bt}=e^{-bt}\Rightarrow -bA+aA=1 \tag{11.7}$$

odnosno

$$A=\frac{1}{a-b} \tag{11.8}$$

Otuda partikularno rešenje glasi:

$$y_p(t)=\frac{1}{a-b}e^{-bt}\ ,\ t>0 \tag{11.9}$$

Da bismo dobili signal $y_h(t)$ homogene diferencijalne jednačine

$$\frac{d\,y_h(t)}{dt}+ay_h(t)=0 \tag{11.10}$$

pretpostavimo rešenje u obliku:

$$y_h(t)=Ke^{st} \tag{11.11}$$

odakle smenom u (1.10) dobijamo uslov

$$sKe^{st}+aKe^{st}=0 \tag{11.12}$$

odnosno

$$s=-a \tag{11.13}$$

Tako da homogeno rešenje postaje

$$y_h(t)=Ke^{-at} \tag{11.14}$$

uz još uvek neodređenu vrednost parametra *K*. Kombinujući partikularno i homogeno rešenje za $t>0$, dobijamo oblik izlaznog signala

$$y(t)=\frac{1}{a-b}e^{-bt}+Ke^{-at}\ ;\ t>0 \tag{1.15}$$

Da bismo odredili vrednost konstante *K*, potrebno je da znamo vrednost $y(0)=Y_I$ (takozvani početni uslov). Smenom u (11.15) dalje možemo pisati

$$y(0)=\frac{1}{a-b}+K=Y_I \tag{11.16}$$

odnosno

$$K=Y_I-\frac{1}{a-b} \tag{11.17}$$

pa naše konačno rešenje za $t>0$ postaje

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)\ ;\ t>0 \tag{11.18}$$

Za $t<0$ poznato nam je da je ulazni signal jednak nuli $x(t)=0$, pa rešenje početne diferencijalne jednačine mora biti jednako rešenju homogene diferencijalne jednačine, odnosno

$$y(t)=y_h(t)=Ke^{-at} \;;\; t<0 \tag{11.19}$$

što uz početni uslov $y(0)=Y_I$ postaje

$$y(t)=Y_Ie^{-at} \;;\; t<0 \tag{11.20}$$

Konačno, rešenje za $t<0$ i $t>0$ mogu biti kombinovana u sledećoj formi

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t) \tag{11.21}$$

pri čemu je i uslov za trenutak $t=0$ ispoštovan vođenjem računa o početnom uslovu.

Primetimo da je za $a=b$ razlomak u (1.21) nedefinisan, jer dolazi do deljenja sa nulom. Da bismo primenom L'Hopital-ovo pravilo uvedimo oznaku

$$f(b)=e^{-bt}-e^{-at} \tag{11.22}$$

i

$$g(b)=a-b \tag{11.23}$$

Kako je

$$f'(b)=-te^{-bt} \;;\; g'(b)=-1 \tag{11.24}$$

u graničnom procesu kada $b\to a$, dobija se

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(b)}=te^{-at} \tag{11.25}$$

odnosno za slučaj $a=b$, odziv našeg sistema glasi

$$y(t)=Y_Ie^{-at}+te^{-at}u(t) \tag{11.26}$$

Primetimo takođe da je u slučaju nultog početnog stanja sistema $(Y_I=0)$ odziv sistema jednak

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t) \tag{11.27}$$

Ovakav odziv se zove *odziv iz nultog stanja* ili *odziv relaksiranog sistema.* U suprotnom, da je postojao samo početni uslov Y_i a da je uzlazni signal jednak nuli $x(t)=0$, tada bi odziv sistem bio

$$y_{zi}(t)=Y_Ie^{-at} \tag{11.28}$$

Ova vrsta odziva se naziva *odziv na početne uslove.* Očigledno je da se ukupni odziv sistema može napisati kao zbir odziva relaksiranog sistema i odziva na početne uslove:

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t) \tag{11.29}$$

Ne treba poistovećivati ove dve vrste odziva sa partikularnim i homogenim rešenjem diferencijalne jednačine, jer oni u opštem slučaju nisu jednaki. Međutim, raščlaniti odziv sistema na odzive $y_{zs}(t)$ i $y_{zi}(t)$ je vrlo korisno, i tu ćemo činjenicu često koristiti.

Ovde je potrebno još dodati jedan komentar. Logično je da očekujemo da sistem koji je opisan linearnim diferencijalnim jednačinama bude linearan. Međutim, to nije tačno uvek tačno. Naime, ako pretpostavimo da je ulaz u signal $x(t)=0$, tada će odziv sistema biti $y_{zi}(t)$ koji u opštem slučaju nije nula. To automatski znači da neće biti zadovoljen uslov homogenosti (*k* puta veći ulaz neće generisati *k* puta veći izlaz), pa sistem nije linearan. Međutim, takav sistem će biti inkrementalno linearan. Ukoliko je odziv $y_{zi}(t)$ jednak nuli (a to se dešava ako je početni uslov sistema jednak nuli), tada će i princip homogenosti biti zadovoljen pa će sistem biti linearan.

Primer 11.2: Posmatrajmo sledeću diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t) \tag{11.30}$$

u kojoj je početni uslov

$$y(0)=Y_I=0 \tag{11.31}$$

Za takav sistem sa nultim početni uslovom se kaže da je relaksiran. Dalje, pretpostavimo da je

$$x(t)=u(t) \tag{11.32}$$

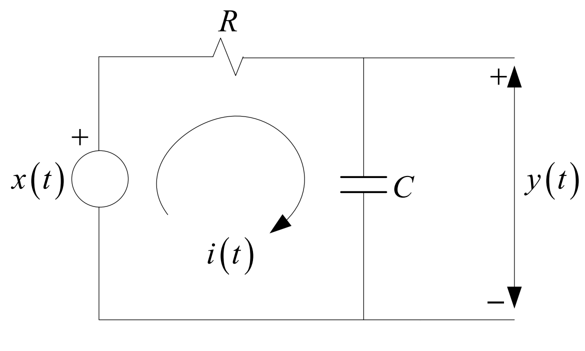
U tom slučaju, rešenje jednačine postaje jedinični odskočni odziv:

$$y(t)=s(t)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t) \tag{11.33}$$

Shodno vezi između jediničnog odskočnog i jediničnog impulsnog odziva, na osnovu relacije (11.33) lako sračunavamo jedinični impulsni odziv:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=e^{-at}u(t) \tag{11.34}$$

Upravo rešena diferencijalna jednačina zapravo opisuje jednostavno RC kolo prikazano na slici 11.1.



Slika11.1: RC električno kolo

Primenom Kirhofovog zakona možemo pisati:

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau=x(t) \tag{11.35}$$

Kako je

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{11.36}$$

i

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt} \tag{11.37}$$

diferencijalna jednačina koja opisuje ovo kolo postaje:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \tag{11.38}$$

Uvodeći vremensku konstantu $\tau = RC$ i uvodeći smenu $a = 1/\tau$, diferencijalnu jednačinu možemo prepisati u formi

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t) \tag{11.39}$$

što je ekvivalentno jednačini (11.30) s tom razlikom da se umesto ulaznog signala $x(t)$ pojavljuje signal $ax(t)$. Dakle, impulsni odziv ovog sistema glasi

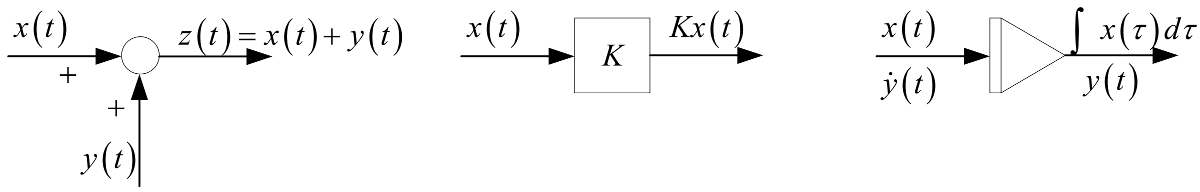
$$h(t) = ae^{-at}u(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \tag{11.40}$$

Prednost ovog pristupa je da sada, kada smo odredili jedinični impulsni odziv sistema, za bilo koji oblik ulaznog napona $x(t)$, možemo jednostavno sračunati izlazni napon $y(t)$ primenom konvolucije

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{11.41}$$

Blok dijagrami

Predstava sistema pomoću blok dijagrama je vrlo koristan alat, ne samo u smislu jednostavnijeg razumevanja strukture sistema, već je to alat koji u velikoj meri pomaže prilikom projektovanja različitih vrsta sistema za obradu signala ili upravljanje. Vrlo često se ova tehnika naziva analognim modeliranjem, jer je njena osnovna namena da se princip funkcionisanja sisema prikaže korišćenjem tri elementarna bloka a to su: sabirač dva signal, množač signala konstantnim pojačanjem i integrator signala. Šematska oznaka za ove blokove je data na slici 11.2.



Slika 11.2: Šematska oznaka za elementarne blokove u blok dijagramima sistema

Usvajanjem ovakvih oznaka, mi možemo ne samo predstaviti sisteme različitih struktura, već ih možemo i realizovati jednostavnih elektronskim sklopovima. U kojoj meri će neko od naših praktičnih rešenja biti ekonomično i izvodljivo ne zavisi samo od strukture sistema koji želimo da realizujemo, već i od poznavanja tehnike blokovskih dijagrama. Sledeći primer ilustruje navedenu činjenicu.

Primer 11.3: Posmatrajmo jednostavan sistem koji je opisan diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+y(t)=\dot{x}(t)+4x(t) \tag{11.42}$$

gde je radi jednostavnijeg pisanja usvojena oznaka $\ddot{y}(t)=d^2y(t)/dt^2$, $\dot{y}(t)=dy(t)/dt$. Ukoliko želimo da nacrtamo ovaj sistem u blokovskoj formi, ili da ga realizujemo pomoću elementarnih elektronskih komponenti, možemo postupiti na dva načina.

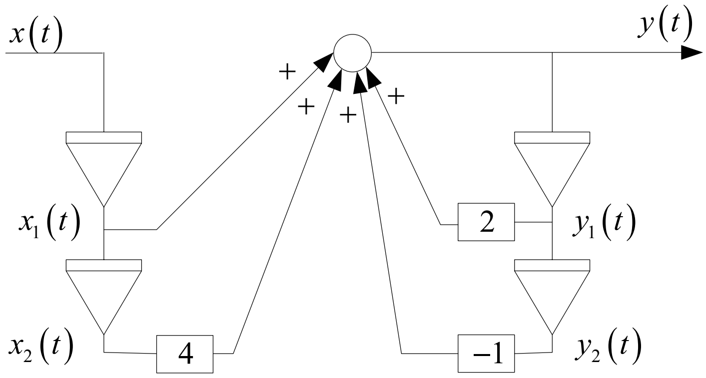
Direktna realizacija: U želji da se oslobodimo izvoda u relaciji (11.42) integralimo celu jednačinu dva puta. Dobijenu jednačinu možemo zapisati u formi:

$$y(t)-2y_1(t)+y_2(t)=x_1(t)+4x_2(t) \tag{11.43}$$

gde je radi jednostavnijeg pisanja za višestruki *i-ti* integral signala $y(t)$ uvedena oznaka $y_i(t)$ i analogno tome za signal $x(t)$. Ako poslednju relaciju napišemo u formi

$$y(t)=2y_1(t)-y_2(t)+x_1(t)+4x_2(t) \tag{11.44}$$

blokovska reprezentacija direktno sledi (zbog toga se i zove direktna realizacija) i prikazana je slikom 11.3.



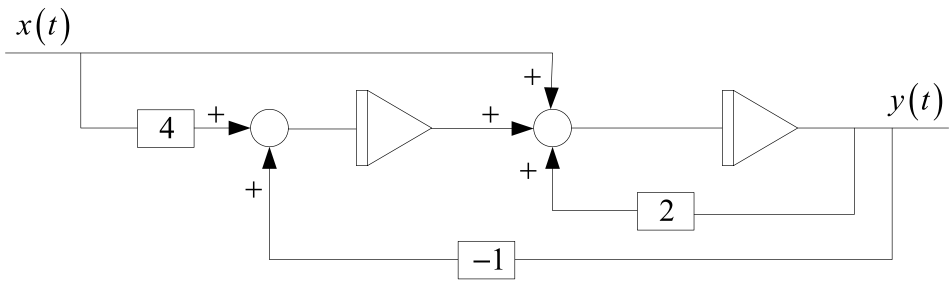
Slika 11.3: Direktna realizacija sistema

Primetimo da nam je za direktnu realizaciju sistema potrebno četiri integratora, dva pojačavača, jedan invertor i jedan sabirač. A pogledajmo sada drugi pristup u blokovskoj predstavi, odnosno realizaciji, koji se naziva kanonična realizacija.

Kanonična realizacija : Ako ponovo krenemo od relacije (11.42) ali je prepišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} y(t)&=2y_1(t)-y_2(t)+x_1(t)+4x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[2y(\tau)+x(\tau)-y_1(\tau)+4x_1(\tau)\right]dt \\ &=\int_{-\infty}^{t}\left[2y(\tau)+x(\tau)+\int_{-\infty}^{\tau}\left(-y(\lambda)+4x(\lambda)\right)d\lambda\right]d\tau \end{aligned} \tag{11.45}$$

Poslednja relacija govori o tome da se signal $y(t)$ može dobiti kao izlaz iz integratora kome je na ulaz doveden zbir tri signala $2y(t)$, $x(t)$ i izlaz iz integratora koji na ulazu ima zbir dva signala $-y(t)$ i $4x(t)$. Odgovarajuća blokovska realizacija je prikazana na slici 11.4.



Slika 11.4: Kanonična blok reprezentacija sistema

Primetimo da reprezentacije na slikama 11.3 i 11.4 predstavljaju iste sisteme, međutim za realizaciju sistema prikazanog slikom 11.4. potrebna su nam dva integratora, dva pojačavača, jedan invertor i dva sabirača. Očigledno, sa stanovišta integratora (a kasnije će biti objašnjeno zašto su integratori najvažniji elementi u ovakvoj blokovskoj predstavi) kanonična realizacija ima drastičnu prednost u odnosu na direktnu.

Pitanje 12: Pregled i osobine diskretnih sistema

Sve osobine koje smo naveli kao osnovne karakteristike kontinualnih sistema imaju odgovarajuću interpretaciju u domenu diskretnih sistema. Ove osobine imaju značajne posledice po ponašanje sistema i zbog toga će biti data njihova odgovarajuća matematička interpretacija.

Sistemi sa memorijom

Za diskretni sistem kažemo da ima memoriju ukoliko njegov odziv $y[n]$ u nekom trenutku $n = n_0$ ne zavisi samo od ulazan u tom istom trenutku $x[n_0]$ već i od vrednosti ulaznog signala u nekim drugim vremenskim trenucima. Ti drugi vremenski trenuci mogu pripadati, generalno govoreći, i prošlosti i budućnosti. U protivnom, ukoliko nam je za sračunavanje odziva u trenutku $n = n_0$ dovoljno da znamo vrednost ulaznog signala u tom istom trenutku $x[n_0]$, za sistem kažemo da je bez memorije.

Trivijalan primer sistema bez memorije je sistem opisan sledećom relacijom:

$$y[n_0] = x^2[n_0] \tag{12.1}$$

dok je primer, takozvanog, akumulatora:

$$y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n] \tag{12.2}$$

tipičan primer sistema sa memorijom.

Kauzalnost sistema

Diskretni sistem je kauzalan ukoliko njegov odziv $y[n]$ u proizvoljnom trenutku $n = n_0$ zavisi od vrednosti $x[n]$ za $n \le n_0$. Drugim rečima, ako odziv sistema u sadašnjem trenutku zavisi od ulaza sistema u sadašnjem i prošlim trenucima, a ne od ulaza u budućnosti, sistem je kauzalan. Dakle, realan sistem mora biti kauzalan, jer ga drugačije nije moguće realizovati.

Istini za volju, u obradi signala se često pojavljuje potreba za nekauzalnim sistemima, međutim oni se mogu primeniti isključivo u takozvanom *off-line* postupku, kada su svi odbirci signala već zabeleženi, i kada se nad njima naknadno vrši obrada. Jedan od takvih filtara je takozvano centrirano prozorsko usrednjavanje definisano sledećom relacijom:

$$y[n_0] = \sum_{n=n_0-2}^{n_0+2} x[n] \tag{12.3}$$

Linearni diskretni sistemi

Analogno kao kod kontinualnih signala, za diskretni sistem kažemo da je linearan ukoliko zadovoljava dva svojstva: aditivnost i homogenost.

Sistem zadovoljava uslov aditivnosti ukoliko na pobudu $x_1[n]+x_2[n]$ generiše odziv $y_1[n]+y_2[n]$, gde su $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pojedinačni odzivi na pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respektivno. Sa druge strane, za sistem kažemo da zadovoljava uslov homogenosti ukoliko za pobudu $ax[n]$ generiše odziv $ay[n]$, gde je sa $y[n]$ obeležen odziv sistema za pobudu $x[n]$.

Svojstva aditivnosti i homogenosti su istovremeno sadržana u principu superpozicije koji kaže da sistem zadovoljava ovaj princip ukoliko za pobudu $a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$ generiše odziv $a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$ gde su $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pojedinačni odzivi na pobude $x_1[n]$ i $x_2[n]$, respektivno.

Vremenski invarijantni sistemi

Vremenski invarijantni diskretni sistemi podrazumevaju da se pomeraj u ulaznom signalu direktno preslikava u pomeraj u odzivu sistema. Drugim rečima, ako je odziv sistema na pobudu $x[n]$ bio $y[n]$, tada će odziv na pobudu $x[n-n_0]$ biti $y[n-n_0]$. Ako je ovo tvrđenje tačno za bilo koji ulazni signal i bilo koji pomeraj, sistem je vremenski invarijantan.

Stabilnost diskretnih sistema

Za diskretni sistem kažemo da je stabilan u smislu ograničen ulaz- ograničen izlaz (BIBO stabilnost) ukoliko za proizvoljni pobudni signal koji zadovoljava uslov

$$|x[n]| \le B_1 \tag{12.4}$$

dobijamo odziv $y[n]$ ograničen po svojoj amplitudi, odnosno

$$|y[n]| \le B_2 \tag{12.5}$$

za konačne konstante B_1 i B_2.

Primer BIBO stabilnog sistema je takozvano jedinično kašnjenje:

$$y[n] = x[n-1] \tag{12.6}$$

Jednostavno se dokazuje da je ovakav sistem BIBO stabilan:

$$|y[n]| = |x[n-1]| \le B_1 \tag{12.7}$$

dok je primer nestabilnog sistema takozvani sabirač (ili akumulator)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{12.8}$$

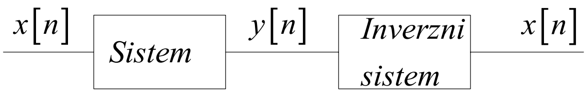
Ako pretpostavimo da smo na ulaz sabirača doveli jediničnu odskočnu funkciju koja je ograničena, na izlazu dobijamo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = r[n] \tag{12.9}$$

gde je sa $r[n]$ označena jedinična diskretna usponska funkcija i koja teži beskonačnosti kako promenljiva *n* raste.

Invertibilni sistemi

Kao i za slučaj kontinualnih sistema, za diskretni sistem kažemo da je invertibilan ukoliko njegov ulazni signal $x[n]$ jednoznačno može biti određen na osnovu njegovog izlaza $y[n]$. Drugim rečima, sistem je invertibilan ukoliko različiti ulazi generišu različite izlaze. Dakle, ako je sistem invertibilan može se odrediti njegov inverzni sistem koji za ulaz $y[n]$ generiše odziv $x[n]$, kako je to prikazano na slici 12.1.



Slika 12.1: Primer sistema i njegove inverzije

Primer invertibilnog sistema je diskretni sabirač ili akumulator. Njegov inverzni sistem je opisan sledećom relacijom:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \tag{12.10}$$

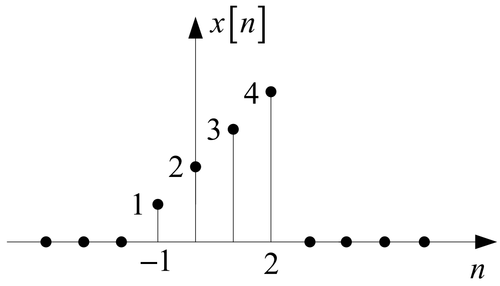
Pitanje 13: Diskretni linearni vremenski invarijantni (LTI) sistemi

Sve napred navedene osobine diskretnih sistema su važne, međutim posebnu pažnju zahtevaju osobine linearnosti i vremenske invarijantnosti. Zbog toga će sistemima koji imaju ova dva svojstva biti posvećeno više prostora i kao i u slučaju kontinualnih sistema biće korišćena oznaka LTI (*Linear Time Invariant*) sistem. Jedan od fundamentalnih načina da se ovakav sistem opiše jeste njegov impulsni odziv, jer će se kasnije pokazati da odziv sistema na bilo koju pobudu može da se sračuna kao konvolucija impulsnog odziva i te pobude.

Da bismo došli do ovog rezultata pođimo od proizvoljnog pobudnog signala $x[n]$. Uzmimo za primer signal

$$x[n] = (n+2)\big(u[n+1] - u[n-3]\big) \tag{13.1}$$

prikazan slikom 13.1.



Slika 13.1: Primer pobudnog signala

Ukoliko se tako dogovorimo, signal $x[n]$ se može napisati i u obliku zbir jedinčnih impulsa:

$$x[n] = \sum_{k=-1}^{2} (k+2)\delta[n-k] \tag{13.2}$$

Zapravo, bilo koji pobudni signal se može napisati u formi zbira jediničnih impulsnih signala:

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{13.3}$$

ili u kompaktnijoj formi:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{13.4}$$

Pretpostavimo sada da smo na ulaz LTI diskretnog sistema doveli kao pobudu jediničnu impulsnu funkciju $x[n] = \delta[n]$. Takođe pretpostavimo da se na izlazu sistema pojavio odziv $h[n]$. Ovaj ćemo signal zvati jedinični impulsni odziv sistema.

Slika 13.2: Definicija jediničnog impulsnog odziva sistema

Kako je naš sistem vremenski invarijantan, to znači da će on za pomerenu pobudu $x[n] = \delta[n-k]$ generisati pomerni odziv $h[n-k]$. Istovremeno, naš je sistem linearan pa onda važi i princip superpozicije, što znači da za pobudu

$$x[n] = \sum_{k} a_k \delta[n-k] \tag{13.5}$$

sistem treba da generiše odziv

$$y[n] = \sum_{k} a_k h[n-k] \tag{13.6}$$

Tako će naš sistem sa impulsnim odzivom $h[n]$ za pobudu definisanu signalom (13.2) generisati odziv

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} (k+2) h[n-k] \tag{13.7}$$

Do rezultata smo došli primenom principa superpozicije, a da konvoluciju nismo ni pomenuli. Do očekivanog rezultata ćemo doći ukoliko u relaciji (13.6) izvršimo smenu $a_k = x[k]$, čime dobijamo relaciju (13.4) i direktno odatle dolazimo do vrlo važnog rezultata da je odziv sistema na bilo koju pobudu jednak konvoluciji impulsnog odziva i pobude:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] \tag{13.8}$$

Kako je konvolucija komutativna operacija, poslednji izraz se može po potrebi napisati i u sledećoj formi

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[n]*x[n] \tag{13.9}$$

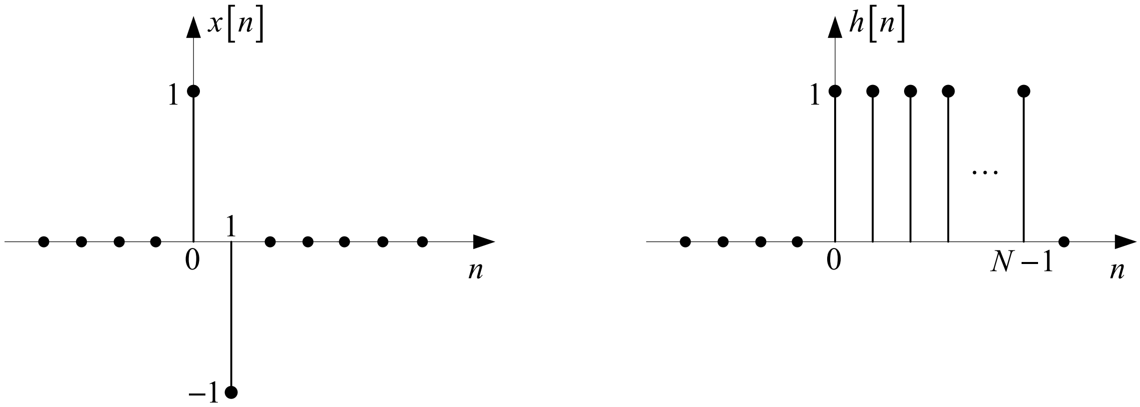
Primer 13.1: Sračunajmo odziv sistema čiji je impulsni odziv

$$h[n] = u[n] - u[n-N] \tag{13.10}$$

na pobudu

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \tag{13.11}$$

Ovi signali su prikazani na slici 13.3.



Slika 13.3: Pobuda i impulsni odziv sistema

Do rešenja se jednostavno može doći na dva načina. Prvi je principom superpozicije. Naime, ako je pobuda sistema predstavljena algebarskim zbirom dva imulsna signala

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \tag{13.12}$$

onda je odziv sistema jednak zbiru dva pomerena impulsna odziva:

$$y[n] = h[n] - h[n-1] = \left(u[n] - u[n-N]\right) - \left(u[n-1] - u[n-N-1]\right) \tag{13.13}$$

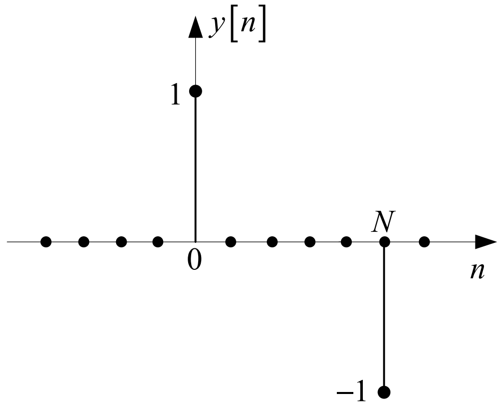
Poslednji izraz se može napisati u formi:

$$y[n] = \left(u[n] - u[n-1]\right) - \left(u[n-N] - u[n-N-1]\right) = \delta[n] - \delta[n-N] \tag{13.14}$$

Do potpuno identičnog rezultata se moglo doći primenom konvolucije:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N-1}x[n-k]=\sum_{k=n-N+1}^{n}x[m]$$
$$=\sum_{m=n-N+1}^{n}\left(\delta[m]-\delta[m-1]\right)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]-\sum_{m=-\infty}^{n-N}\delta[m]-\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m-1]+\sum_{m=-\infty}^{n-N}\delta[m-1] \quad (13.15)$$
$$=u[n]-u[n-1]-u[n-N]+u[n-N-1]=\delta[n]-\delta[n-N]$$

Ovaj rezultat je prikazan na slici 13.4.



Slika 13.4: Odziv sistema

Primer 13.2: Sračunajmo odskočni odziv diskretnog LTI sistema čiji je impulsni odziv dat:

$$h[n]=a^n u[n] \quad (13.16)$$

Polazeći od činjenice da je odziv linearnog stacionarnog diskretnog sistema na bilo koju pobudu jednak diskretnoj konvoluciji te pobude i impulsnog odziva, možemo pisati:

$$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]h[n-k] \quad (13.17)$$

Uzimajući u obzir osobine jedinične odskočne funkcije poslednja suma se može pojednostaviti:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k] \quad (13.18)$$

ili nakon smene promenljivih $n-k=m$

$$s[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}h[n] \quad (13.19)$$

Poslednja relacija definiše vezu između jediničnog odskočnog i jediničnog impulsnog odziva diskretnih sistema. Dakle, umesto integrala kod kontinualnih sistema, kod diskretnih sistema se odskočni odziv definiše preko sume odbiraka impulsnog odziva, i obrnuto, umesto izvoda kod kontinualnih sistema, impulsni odziv se može sračunati kao konačna jednokoračna razlika odskočnog odziva:

$$h[n]=s[n]-s[n-1] \quad (13.20)$$

U našem slučaju gde je impulsni odziv definisan relacijom (13.6), odskočni odziv postaje:

$$s[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}h[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}a^m u[m]=\begin{cases}0\ ;\ n<0\\ \sum_{m=0}^{n}a^m\ ;\ n\geq 0\end{cases}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n] \quad (13.21)$$

Na ovom mestu možemo definisati impulsne odzive nekih često korišćenih a jednostavnih diskretnih sistema.

Jedinično kašnjenje

Rad sistema koji se naziva jediničnim kašnjenjem je opisan sledećom relacijom:

$$y[n] = x[n-1] \tag{13.22}$$

Samim tim je impulsni odziv jediničnog kašnjenja:

$$h[n] = \delta[n-1] \tag{13.23}$$

Jedinično prednjačenje

Potpuno analogno sa jediničnim kašnjenjem, relacija koja definiše rad ovog diskretnog sistema je

$$y[n] = x[n+1] \tag{13.24}$$

sa odgovarajućim impulsnim odzivov

$$h[n] = \delta[n+1] \tag{13.25}$$

Primetimo da je sistem jediničnog prednjačenja nekauzalan.

Akumulator ili sabirač

Rad akumulatora ili sabirača je sadržan u sledećoj vezi između ulaznog signala $x[n]$ i njegovog izlaza $y[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{13.26}$$

Ukoliko umesto signala $x[k]$ upotrebimo diskretni impuls, odziv sistema postaje impulsni odziv:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] \tag{13.27}$$

dakle, jedinična odskočna funkcija.