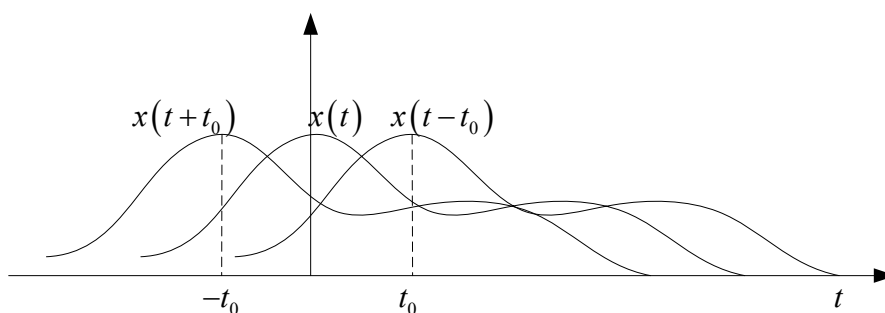


Pitanje 3: Modifikacija nezavisne vremenske promenljive t u kontinualnim signalima

Pomeranje signala u vremenu

Mnoge jednostavne ali važne operacija nad signalima se mogu predstaviti jednostavnom modifikacijom vremenske promenljive t u analitičkim izrazima za signale. Već smo videli da signal $x(t - t_0)$ nije ništa drugo nego pomeranje signala $x(t)$ za vremenski interval t_0 . Ukoliko je $t_0 > 0$ to je zapravo kašnjenje signala (pomeranje u desno), ukoliko je $t_0 < 0$ to je takozvano prednjačenje signala (pomeranje u levo). Na slici 3.1. ilustrovano je prednjačenje i kašnjenje signala.



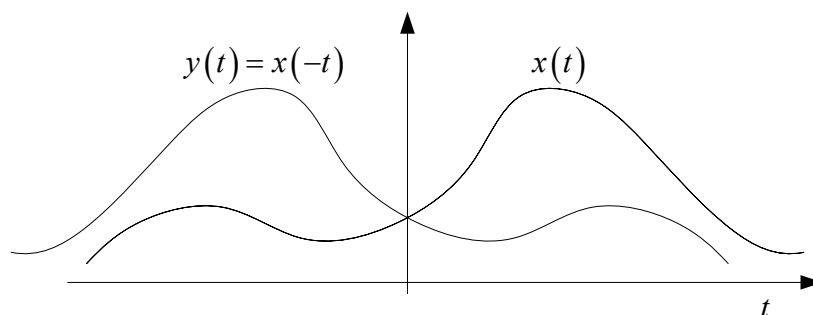
Slika 3.1: Ilustracija vremenskog pomeranja signala

Inverzija vremena

Posmatrajmo modifikovani signal

$$y(t) = x(-t) \quad (3.1)$$

Poslednja relacija govori da je, na primer, $y(1) = x(-1)$, $y(\pi) = x(-\pi)$, i tako dalje za sve vrednosti nezavisne promenljive t . Primer ovakvih signala je prikazan na slici 2.2. Efekat inverzije vremena je najuočljiviji ukoliko se video traka premotava unazad.



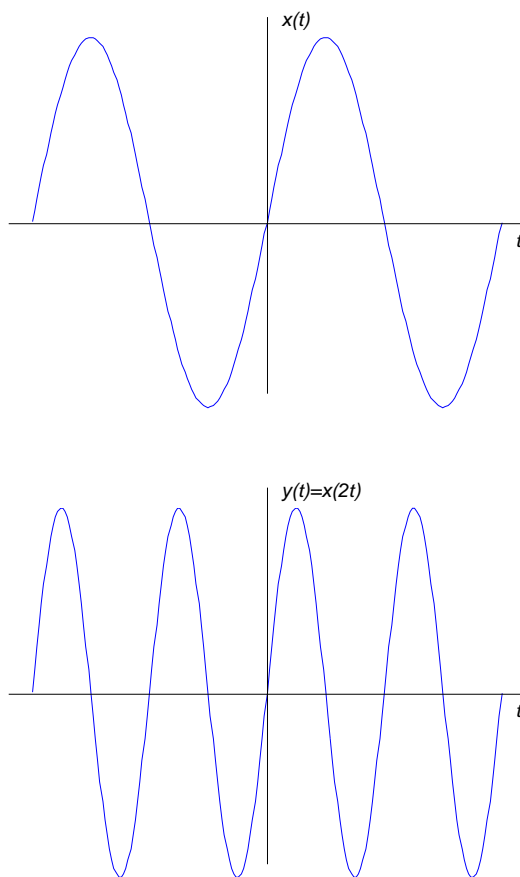
Slika 3.2: Ilustracija signala sa inverzijom vremena

Skaliranje vremena

Dalje, posmatrajmo modifikaciju signala na sledeći način:

$$y(t) = x(2t) \quad (3.2)$$

Tada je $y(1) = x(2)$, $y(1/2) = x(1)$ i tako dalje, što znači da je u signalu $y(t)$ vreme kompresovano i da je signal y zapravo dva puta ubrzani signal x (u engleskoj literaturi se za ovakve sisteme kaže *compressed-time signals*). Primer ovih signala je prikazan na slici 3.3.

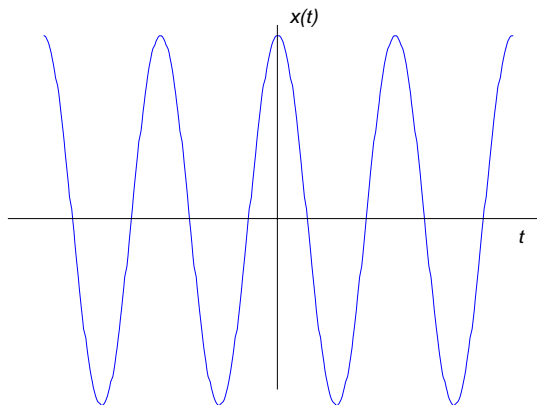


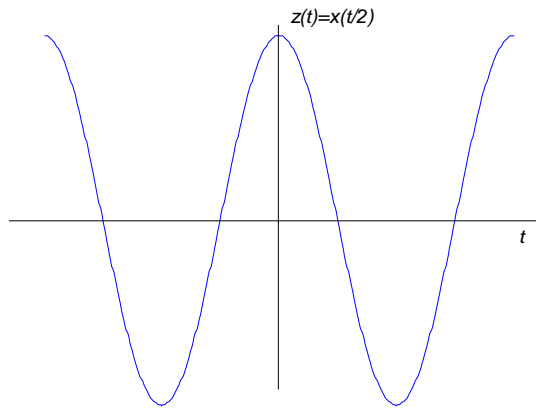
Slika 3.3: Ilustracija skaliranja (kompresije) vremena

Ukoliko definišemo novi signal $z(t)$ na sledeći način:

$$z(t) = x(t/2) \quad (3.3)$$

Sada će vrednost signala $z(1)$ biti jednaka $x(0.5)$, $z(2)$ biti jednaka $x(1)$ i tako dalje. Drugim rečima, posmatrani signal z biti 'razvučena' ili usporena verzija signala x . U engleskoj literaturi se za ovakve signale koristi termin *stretched-time signals*. Primer ovakvih signala dat je na slici 3.4.

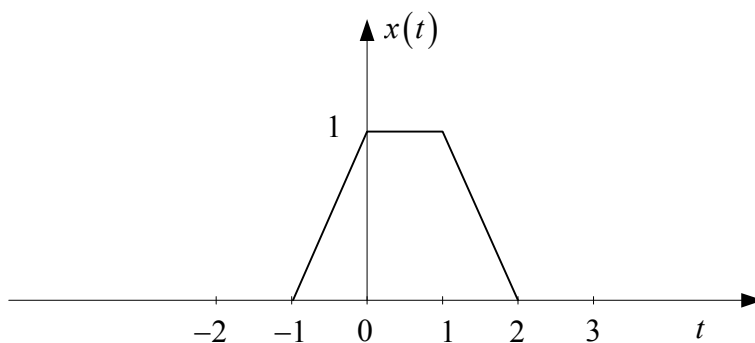




Slika 2.4: Primer skaliranja signala (*stretched-time signal*)

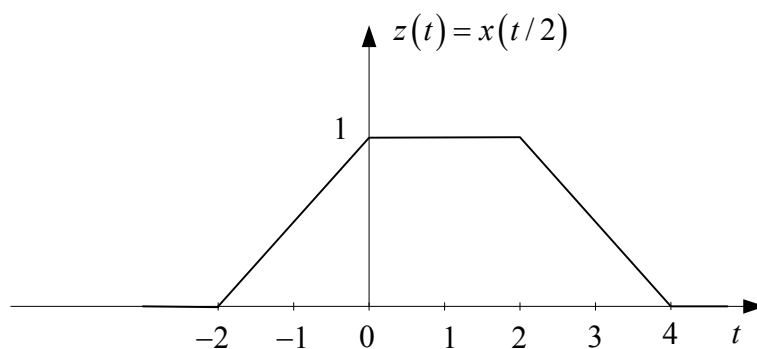
Vrlo često se u obradi signala istovremeno srećemo sa više modifikacija nezavisne vremenske promenljive t u istom signalu. Recimo, ukoliko je potrebno da na osnovu zadatog signala $x(t)$ generišemo signal $y(t) = x(2 - 3t)$, jasno je da su tri modifikacije vremenske ose izvršene uzastopno. Prvo je od na signalu $x(t)$ izvršeno skaliranje vremenske ose i dobijen je signal $x(3t)$, zatim je izvršena inverzija vremena koja rezultuje signalom $x(-3t)$ da bi konačno bilo izvršeno pomeranje u vremenskom domenu što nas dovodi do konačnog rezultata $x(2 - 3t)$. Naravno, redosled ovih transformacija nije jednoznačan, međutim, kada god imamo ovakav problem dobro je da se vežemo za neko konkretno $t = t_0$ i da pomoću njega pratimo regularnost sekvence transformacija. Ovaj problem je ilustrovan na sledećem primeru.

Primer 3.1: Na slici 3.5 je prikazan trapezoidni signal $x(t)$. Na osnovu njega skicirati signal $y(t) = x(1 - t/2)$.



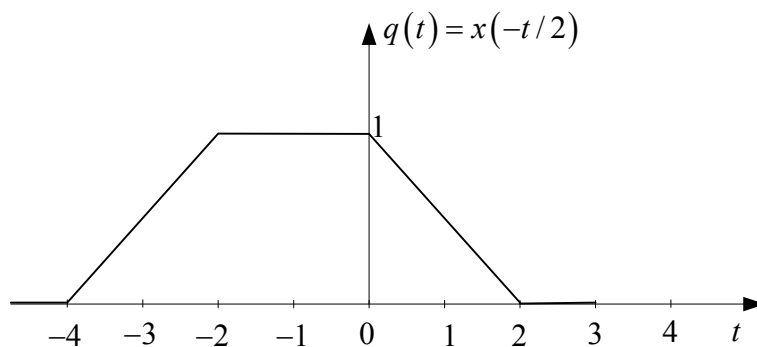
Slika: 3.5: Primer trapezoidnog signala

Kao prvi korak ćemo od signala $x(t)$ formirati pomoćni signal $z(t) = x(t/2)$. U pitanju je vremensko skaliranje (usporavanje ili razvlačenje signala) sa faktorom 2. Neka nam kontrolna tačka bude $t = 0$, i kao uslov ispravnosti rada treba da vodimo računa da je $z(0) = x(0) = 1$. Na slici 3.6. prikazan je signal $z(t) = x(t/2)$.



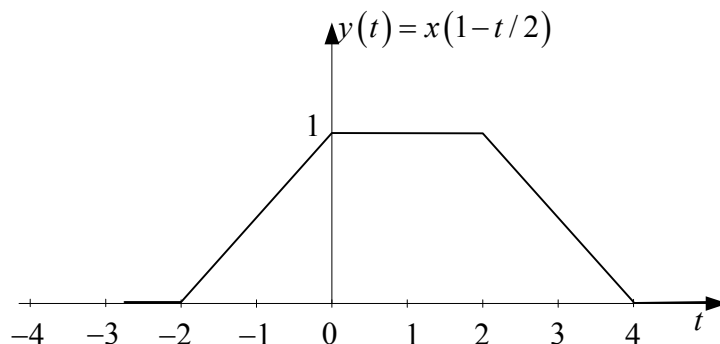
Slika 3.6: Signal $z(t) = x(t/2)$

Sada formirajmo novi, pomoćni signal $q(t) = z(-t) = x(-t/2)$ koji će uključiti inverziju vremena. On se jednostavno dobija od signala $z(t)$ tako što se izvrši prosta refleksija u odnosu na oordinatu (zbog toga se ponekada ova modifikacija inverzija vremena naziva refleksijom). Ovaj signal je prikazan na slici 3.7. Opet nam je kontrolna tačka $q(0) = x(0) = 1$.



Slika 3.7: Pomoćni signal $q(t) = x(-t/2)$

Konačno, treba izvršiti skaliranje u vremenu da bi dobili željeni signal $y(t) = x(1-t/2)$. Ova poslednja transformacija se dobija jednostavnim pomeranjem poslednjeg signala $q(t)$, ali da bismo dobili tačnu informaciju o tome za koliko treba izvršiti pomeranje i u kome pravcu, napišimo signal $y(t)$ na sledeći način: $y(t) = x(1-t/2) = x(-(t-2)/2) = q(t-2)$. Dakle, konačni signal $y(t)$ se dobija iz signala $q(t)$ tako što se on pomera u desno (dakle signal y kasni u odnosu na signal q) za 2 jedinice vremena. Signal $y(t)$ je prikazan na slici 3.8.



Slika 3.8: Konačni oblik signala $y(t) = x(1-t/2)$

I naravno, ponovo možemo proveriti korektnost dobijenog signal vezujući se za neke konkretne vrednosti vremenskih trenutaka: $y(0) = x(1 - 0/2) = 1$, $y(1) = x(1 - 1/2) = 1$ i t.d.

Primer 3.2: Zanimljivo je pogledati Dirakov signal u kome je nezavisna vremenska promenljiva skalirana koeficijentom $1/a$. Dakle posmatrajmo signal $\delta(t/a)$. Ako se setimo uslova koje treba da zadovolji Dirakov signal $\delta(t)$ videćemo da ih i signal $\delta(t/a)$ zadovoljava. Naime:

1. Signal $\delta(t/a) = 0$ za svako $t \neq 0$,
2. Vrednost $\delta(t/a)$ nije definisano za $t = 0$.
3. Konačno, $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t/a) dt = a \int_{t_1/a}^{t_2/a} \delta(\tau) d\tau = a$ ako je $t_1 < 0 < t_2$

Dakle, signal $\delta(t/a) = a\delta(t)$ pod pretpostavkom da je parametar a pozitivan.

Simetričnost signala

Neke važne definicije i osobine signala potiču iz osobina simetričnosti. Iz matematike je poznato da neki signali imaju osobine parnosti ili neparnosti. Za signal koji zadovoljava sledeću jednakost

$$x(t) = x(-t) \quad (3.4)$$

kažemo da je paran. Sa druge strane, za signal sa sledećim svojstvom

$$x(t) = -x(-t) \quad (3.5)$$

kažemo da je neparan. Tipični parni signali su $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ ili $x(t) = e^{-|t|}$, dok su predstavnici neparnih signala ili funkcija $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ ili $x(t) = u(t) - 0.5$. Važnost parnih i neparnih signala potiče uglavnom iz činjenice da se realni signal (signal koji za svaki trenutak nezavisne vremenske promenljive uzima vrednost iz skupa realnih brojeva) može napisati kao zbir njegovog parnog i neparnog dela. Parni deo signala se definiše na sledeći način:

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (3.6)$$

dok se neparni deo signala sračunava kao:

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (3.7)$$

Oznake Ev i Od potiču od engleskih reči *even* i *odd*, što znači paran, odnosno neparan. Lako se na osnovu relacija (3.6) i (3.7) proverava, da se signal $x(t)$ zaista može sračunati kao zbir njegovog parnog i neparnog dela:

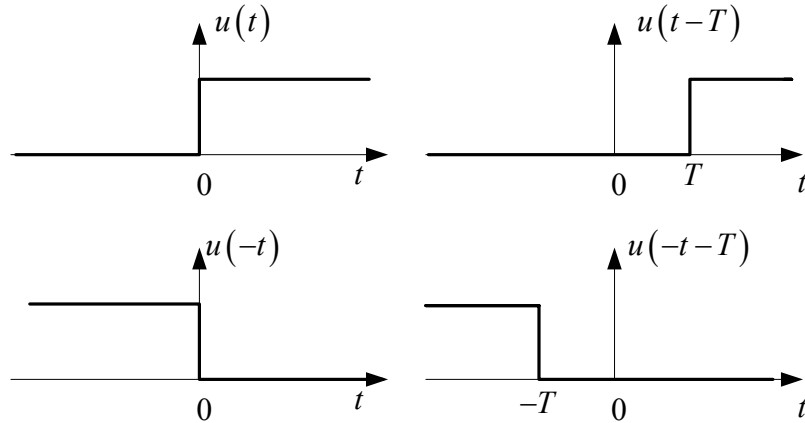
$$x(t) = Ev\{x(t)\} + Od\{x(t)\} \quad (3.8)$$

Primer 3.3: Sračunajmo parni i neparni deo pravougaone četvrtke $p(t) = u(t) - u(t - T)$. Po definiciji parnog i neparnog dela signala, možemo pisati:

$$Ev\{p(t)\} = \frac{1}{2}[p(t) + p(-t)] = \frac{1}{2}[u(t) - u(t - T) + u(-t) - u(-t - T)] \quad (3.9)$$

$$Od\{p(t)\} = \frac{1}{2}[p(t) - p(-t)] = \frac{1}{2}[u(t) - u(t-T) - u(-t) + u(-t+T)] \quad (3.10)$$

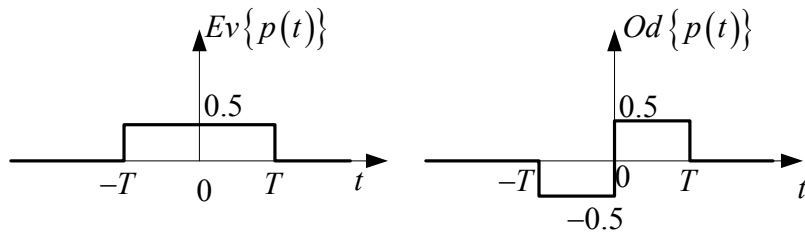
Na slici 3.9 su prikazani signali $u(t)$, $u(t-T)$, $u(-t)$ i $u(-t+T)$ na osnovu kojih se lako sračunavaju funkcije $Ev\{p(t)\}$ i $Od\{p(t)\}$.



Slika 3.9.: Oblik signala $u(t)$, $u(-t)$, $u(t-T)$ i $u(-t-T)$

Na osnovu ovih signala se vrlo jednostavno sračunavaju signali $Ev\{p(t)\}$ i $Od\{p(t)\}$. Oni su prikazani na slici 3.10. a njihovi analitički oblici glase:

$$\begin{aligned} Ev\{p(t)\} &= \frac{1}{2}[u(t+T) - u(t-T)] \\ Od\{p(t)\} &= \frac{1}{2}[-u(t+T) + 2u(t) - u(t-T)] \end{aligned} \quad (3.11)$$



Slika 3.10: Parni i neparni deo signala $p(t)$

Pitanje 4: Konvolucija kontinualnih vremenskih funkcija

Fundamentalna operacija nad signalima koja se u teoriji obrade signala koristi jeste konvolucija. Ako nad signalim $x(t)$ i $h(t)$ primenimo konvoluciju kao rezultat ćemo dobiti treću kontinualnu funkciju $y(t)$, pri čemu kao oznaku za konvoluciju koristimo simbol $*$:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (4.1)$$

a izračunava se shodno sledećoj relaciji

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.2)$$

Ukoliko u poslednjoj relaciji izvršimo smenu promenljivih $t-\tau = \lambda$ dobija se

$$y(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = h(t)*x(t) \quad (4.3)$$

što je dokaz da je konvolucija komutativna operacija nad signalima, odnosno

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t) \quad (4.4)$$

Lako se dokazuje da je ova operacija ima i osobinu asocijativnosti:

$$\begin{aligned} (x(t)*h(t))*g(t) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\lambda-\tau)d\tau \right] g(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda-\tau)g(t-\lambda)d\lambda \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\mu)g(t-\tau-\mu)d\mu \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [h(t-\tau)*g(t-\tau)] d\tau = x(t)*(h(t)*g(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Takođe, lako se dokazuje da je operacija konvolucija distributivna sa operacijom sabiranja signala:

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t) \quad (4.6)$$

Na osnovu relacije (4.2) se može zaključiti, da ako želimo da sračunamo konvoluciju signala $x(t)$ i $h(t)$, naš algoritam treba da se sastoji u sledeća četiri koraka:

1. **korak:** Signal $h(\tau)$ se prvo invertuje i pomeri u vremenu kako bi se dobila forma $h(t-\tau)$, što postaje funkcija od τ gde je t parametar.
2. **korak:** Signali $x(\tau)$ i $h(t-\tau)$ se izmnože za sva moguće vrednosti varijable τ a za neko fiksno t .
3. **korak:** Proizvod $x(\tau)h(t-\tau)$ se integriše po celom skupu vrednosti τ i tako se dobija vrednost $y(t)$ za neko fiksno t .
4. **korak:** Ponove se koraci 1,2 i 3 za različite vrednosti parametra t iz skupa $(-\infty, \infty)$ kako bi se dobila kompletna funkcija $y(t)$.

Dakle, teorijski gledano beskonačno mnogo neodređenih integrala treba odrediti u cilju jedne jedine konvolucije $y(t)$. Međutim, na sreću, u najčešćem broju slučajeva, ovaj se problem uglavnom svodi na sračunavanje par određenih integrala.

Primer 4.1: Sračunajmo konvoluciju dve jedinične odskočne funkcije

$$y(t) = u(t)*u(t) \quad (4.7)$$

Po definiciji možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (4.8)$$

Znajući da je $u(\tau) = 0$ za $\tau < 0$, poslednji izraz postaje

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (4.9)$$

Dalje, uzimajući u obzir da je $u(\tau) = 1$ za $\tau > 0$, integral se dalje pojednostavljuje

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau) d\tau \quad (4.10)$$

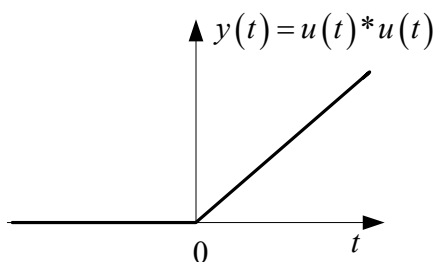
Ukoliko izvršimo smenu promenljivih $t - \tau = \lambda$, izraz (4.10) postaje

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda \quad (4.11)$$

Konačno, poslednji integral je jednostavno sračunati ukoliko je poznata vrednost vremenske promenljive t :

$$\begin{aligned} t < 0 &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t 0 d\lambda = 0 \\ t \geq 0 &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = \int_0^t d\lambda = t \end{aligned} \quad (4.12)$$

Oblik signala $y(t)$ je prikazan na slici 4.1.



Slika 4.1: Oblik signala $y(t) = u(t) * u(t)$

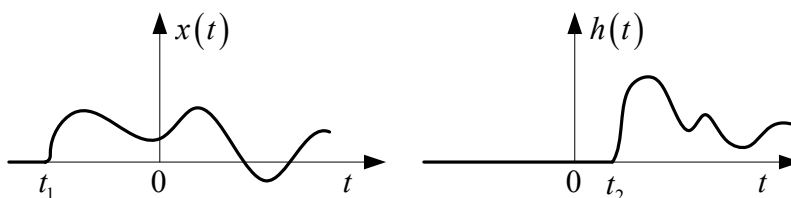
S obzirom na prirodu jediničnog odskočnog signala dobijeni rezultat možemo napisati u pojednostavljenoj formi:

$$y(t) = tu(t) \quad (4.13)$$

Primer 4.2: Jedna od važnih osobina konvolucije $y(t) = x(t) * h(t)$ je ilustrovana u sledećem primeru. Ako signali $x(t)$ i $h(t)$ zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ za } t < t_1 \\ h(t) &= 0 \text{ za } t < t_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

kao što je to prikazano na slici 4.2., tada i njihova konvolucija $y(t)$ zadovoljava sličan uslov.



Slika 4.2.

Ovo tvrđenje nije teško dokazati. Ponovo možemo poći od definicionog izraza za konvoluciju:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.15)$$

S obzirom da je signal $x(\tau)$ jednak nuli za $\tau < t_1$, integral (4.15) postaje

$$y(t) = \int_{t_1}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.16)$$

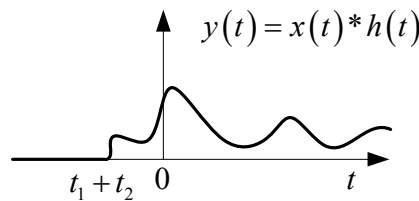
Uvodeći smenu $t - \tau = \lambda$, dalje možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (4.17)$$

S obzirom na činjenicu da je $h(\lambda) = 0$ za $\lambda < t_2$, konačni rezultat postaje:

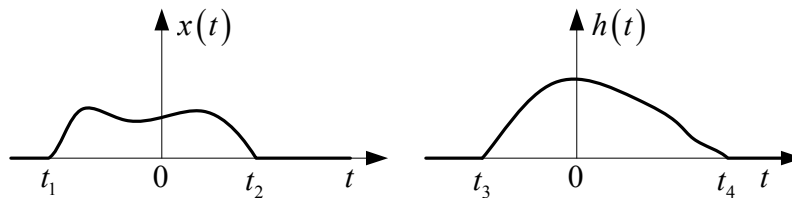
$$y(t) = \begin{cases} 0 & ; t - t_1 < t_2 \\ \int_{t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t - t_1 \geq t_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; t < t_1 + t_2 \\ \int_{t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t \geq t_1 + t_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Dakle, signal konvolucije $y(t)$ ima svojstvo da je $y(t) = 0$ za $t < t_1 + t_2$. Oblik signala $y(t)$ je prikazan na slici 4.3.



Slika 2.13: Oblik signala $y(t)$

Primer 4.3: Pogledajmo primer konvolucije dva signala koja su ograničenog trajanja kao što je to prikazano na slici 4.4. Dokažimo da je i njihova konvolucija takođe ograničenog trajanja, pri čemu se granice trajanja tog signala vrlo jednostavno određuju.



Slika 4.4: Primer signala ograničenih trajanja u vremenu

Ne uzimajući u obzir znakove vremenskih trenutaka t_1, t_2, t_3 i t_4 (mogu biti i pozitivni i negativni), krenimo opet od definicije konvolucije:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.19)$$

i ponovo uzimajući u obzir granice signala $x(\tau)$, možemo pisati:

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (4.20)$$

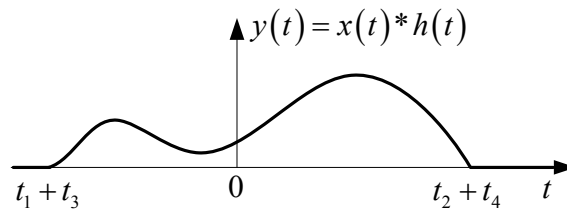
Nakon smene promenljivih $t - \tau = \lambda$, dobija se:

$$y(t) = \int_{t-t_2}^{t-t_1} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (4.21)$$

Uzimajući u obzir ograničeno trajanje signala $h(\lambda)$, konačno se dobija

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{cases} 0 & ; t - t_1 < t_3 \\ \int_{\max(t-t_2, t_3)}^{\min(t-t_1, t_4)} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t - t_1 \geq t_3 \text{ i } t - t_2 < t_4 \\ 0 & ; t - t_2 \geq t_4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & ; t < t_1 + t_3 \\ \int_{\max(t-t_2, t_3)}^{\min(t-t_1, t_4)} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda & ; t \in [t_1 + t_3, t_2 + t_4) \\ 0 & ; t \geq t_2 + t_4 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Konačno, oblik signala y je prikazan na slici 4.5.



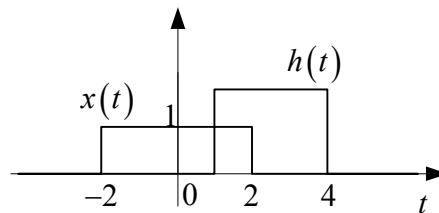
Slika 4.5: Oblik konvolucije nad signalima $x(t)$ i $h(t)$

Dobijeni rezultati su vrlo važni jer se na osnovu njih može zaključiti da ako su signali $x(t)$ i $h(t)$ kauzalni (signal $x(t)$ je kauzalan ako za svako $t < 0$, $x(t) = 0$), tada je i njihova konvolucija $y(t) = x(t) * h(t)$ takođe kauzalan signal. Ovo je osobina koja će nam u velikoj meri pomoći prilikom određivanja odziva sistema na zadatu pobudu.

Primer 4.4: Sračunajmo konvoluciju dva pravougaona signala $x(t)$ i $h(t)$:

$$x(t) = u(t+2) - u(t-2); \quad h(t) = 2[u(t-1) - u(t-4)]$$

Ovi signali su prikazani na slici 4.6.



Slika 4.6: Primer pravougaonih signala

Primenom definicionog izraza (4.3) možemo pisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t-\tau) d\tau = \int_{-2}^2 h(t-\tau) d\tau$$

Usvajajući smenu pomenljivih $t - \tau = \lambda$ dobija se integral:

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+2} h(\lambda) d\lambda$$

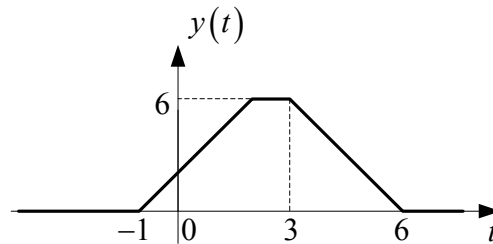
Poslednji izraz nam govori da pravougaoni signal $h(\lambda) = 2[u(\lambda-1) - u(\lambda-4)]$ treba integraliti u intervalu od $t-2$ do $t+2$. Uzimajući u obzir oblik signala $h(\lambda)$ jasno je da, zavisno od vrednosti nezavisne promenljive t , ovaj integral može uzeti različite vrednosti:

$$\begin{aligned} t+2 < 1 &\Rightarrow y(t) = 0 \\ t+2 \in [1, 4] &\Rightarrow y(t) = \int_1^{t+2} 2d\lambda = 2(t+1) \\ t+2 \in [4, 5] &\Rightarrow y(t) = \int_1^4 2d\lambda = 6 \\ t-2 \in [1, 4] &\Rightarrow y(t) = \int_{t-2}^4 2d\lambda = 2(6-t) \\ t-2 \geq 4 &\Rightarrow y(t) = 0 \end{aligned}$$

ili

$$y(t) = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ 2(t+1); & t \in [-1, 2) \\ 6; & t \in [2, 3) \\ 2(6-t); & t \in [3, 6) \\ 0; & t \geq 6 \end{cases}$$

Ovaj signal je prikazan na slici 4.7, sa koje se jasno vidi da je usled ograničenosti signala x na intervalu $[-2, 2]$ i signala h na intervalu $[1, 4]$, proističe ograničenost signala y na intervalu $[-1, 6]$.



Slika 4.7: Konvolucija signala

Primetimo da se ovaj zadatak mogao lakše rešiti korišćenjem rezultata dobijenim iz primera 4.1:

$$u(t) * u(t) = tu(t)$$

Naime, imajući u vidu kako su definisani signali $x(t)$ i $h(t)$, traženi konvolucionni signal $y(t)$ se mogao napisati kao zbir četiri konvoluciona signala:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= [u(t+2) - u(t-2)] * [2(u(t-1) - u(t-4))] \\ &= 2\{u(t+2) * u(t-1) - u(t+2) * u(t-4) - u(t-2) * u(t-1) + u(t-2) * u(t-4)\} \end{aligned}$$

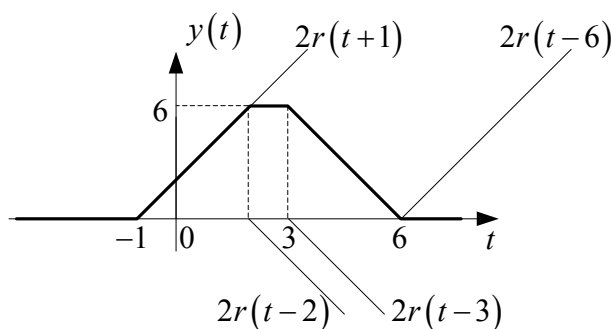
Sa druge strane, lako se pokazuje (čitaocima se prepušta dokaz) da ako je signal $y(t)$ konvolucija signala $x(t)$ i $h(t)$, tada je konvolucija pomerenih signala $x(t-t_1)$ i $h(t-t_2)$ signal $y(t-t_1-t_2)$. Na osnovu toga, ako uvedemo oznaku

$$r(t) = tu(t) = u(t) * u(t),$$

tada će traženi konvolucionni signal biti:

$$y(t) = 2[r(t+1) - r(t-2) - r(t-3) + r(t-6)]$$

Superpozicijom ovih signala, kako je to prikazano na slici 4.8 dobija se isti rezultat kakav je prikazan na slici 4.7.



Slika 4.8: Sračunavanje konvolucije superpozicijom odskočnih funkcija

Studentima se preporučuje da radi vežbanja sračunaju konvolucije sledećih parova signala:

$$x(t) = \sin(t); \quad h(t) = u(t)$$

$$x(t) = \cos(t); \quad h(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$x(t) = u(t); \quad h(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)]$$

$$x(t) = u(t+1) - u(t-1); \quad h(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)]$$

Pitanje 5: Elementarni diskretni signali

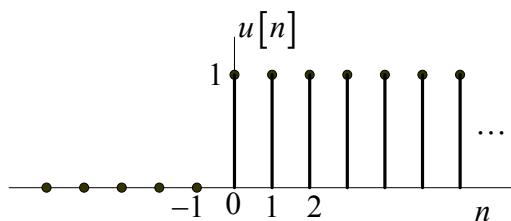
Postoji čitava klasa signala diskretnih u vremenu koja je vrlo korisna u cilju analize signala i sistema. U najvećem broju slučajeva ovi signali su analogni elementarnim kontinualnim signalima, ali postoje i značajne razlike. Takođe, možemo se dogovoriti da ubuduće umesto do sada korišćene opšte oznake za signale $x(t)$, specijalno za signale diskretne u vremenu koristimo oznaku $x[n]$. Dakle, uglasta zagrada umesto obične, male treba da označi da je u pitanju diskretni signal. Diskretni signali se, takođe, vrlo često u literaturi označavaju i kao *sekvence* jer oni zaista i predstavljaju sekvencu, niz brojeva.

Jedinična odskočna funkcija

Diskretna jedinična odskočna funkcija se uobičajeno obeležava kao $u[n]$ i definiše se na sledeći način:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

i prikazana je na slici 5.1.

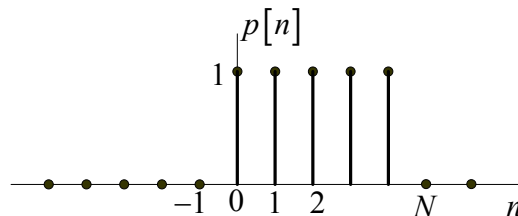


Slika 5.1: Grafički prikaz diskretnog jediničnog odskočnog signala

Primetimo da je za razliku od kontinualnog jediničnog odskočnog signala, sada vrednost $u[0]$ definisana i iznosi 1. Takođe, diskretna pravougaona četvrtka (u engleskoj literaturi označena kao *rectangular pulse*) je vrlo često u upotrebi i definiše se kao:

$$p[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (5.2)$$

i prikazana na slici 5.2.



Slika 5.2: Diskretna pravougaona četvrtka

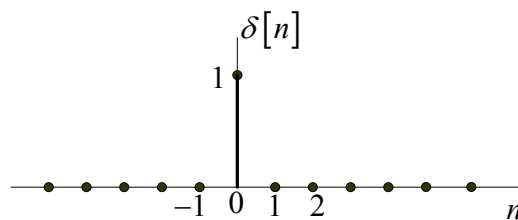
Primetimo takođe, da signal $u[n - N]$ označava signal $u[n]$ koji je zakašnjen (dakle pomeren u desno na vremenskoj skali) za N , i koji je jednak nuli za $n < N$ i jednak jedinici za $n \geq N$.

Jedinična impulsna funkcija

Diskretna jedinična impulsna funkcija (ponekad nazivana *jediničnim odbirkom*, na engleskom *unit-sample*) se označava kao $\delta[n]$ i definiše se na sledeći način:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

i prikazana je na slici 5.3.



Slika 3.3: Diskretna jedinična impulsna funkcija

I dalje postoji jednostavna veza između jedinične odskočne i impulsne funkcije. Jednostavno se dokazuje da je jedinična impulsna funkcija jednaka jednokoračnoj konačnoj razlici dve odskočne funkcije:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (5.4)$$

dok se jedinična odskočna funkcija može napisati u obliku suma jediničnih impulsnih signala:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (5.5)$$

Očigledno da prvom diferencijalu u kontinualnom vremenu odgovara konačna razlika, dok integralu odgovara postupak sumiranja u diskretnom domenu. Analogno relaciji (2.13) iz drugog pitanja koju smo zvali osobina pomeranja impulsne funkcije, u diskretnom domenu vremena odgovara sledeća relacija

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (5.6)$$

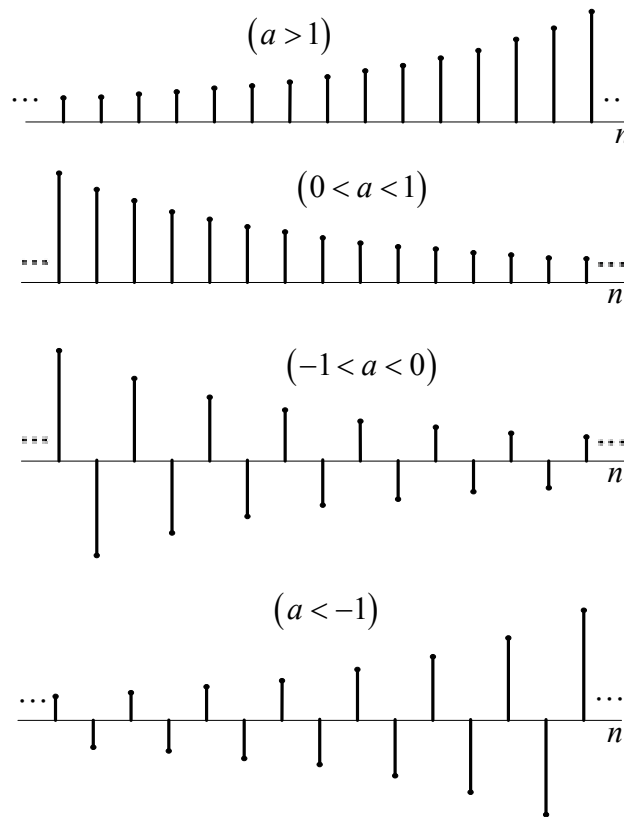
koju je jednostavno dokazati.

Eksponencijalni signali

Diskretni eksponencijalni kompleksni signal se u opštem slučaju definiše na sledeći način:

$$x[n] = Ca^n \quad (5.7)$$

gde su u opštem slučaju konstante C i a kompleksni brojevi. Kao i u slučaju kontinualnih signala, postoji nekoliko zanimljivih slučajeva. Ukoliko su i C i a realni brojevi, dobija se takozvana realna eksponencijalna funkcija (signal), ali se sada oblik ove funkcije značajno menja zavisno od toga iz koje od 4 intervala $a > 1$, $1 > a > 0$, $0 > a > -1$ i $-1 > a$, parametar a uzima vrednost. Oblici ove 4 vrste eksponencijalnih signala su prikazani na slici 5.4.



Slika 5.4: Četiri slučaja diskretni realnih eksponencijalnih signala

Primetimo da za $|a| > 1$ ovi signali neograničeno (kaže se eksponencijalno) rastu, dok za $|a| < 1$ signali opadaju. Primetimo još da za negativne vrednosti parametra a signali imaju osobinu alternacije, odnosno naizmenično iz odbirka u odbirak menjaju znak.

Sinusoidalni signali

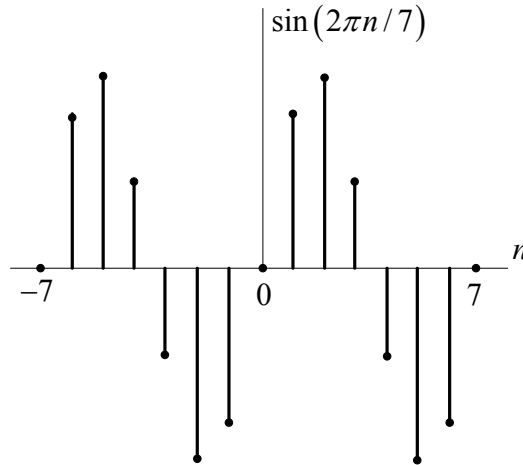
Kompleksna sinusoida se dobija iz eksponencijalnog signala ukoliko usvojimo da parametar a ima oblik: $a = e^{j\Omega_0}$, gde je kružna učestanost Ω_0 realni broj koji se izražava u radianima. Tada, pod pretpostavkom da je i parametar C kompleksan $C = |C|e^{j\phi}$, kompleksna sinusoida postaje

$$x[n] = Ce^{j\Omega_0 n} = |C|e^{j(\Omega_0 n + \phi)} = |C|\cos(\Omega_0 n + \phi) + j|C|\sin(\Omega_0 n + \phi) \quad (5.8)$$

Tada se realna sinusoida, uz oznaku $A = |C|$, može pisati kao

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi) = \operatorname{Re}\left\{A e^{j(\Omega_0 n + \phi)}\right\} = \frac{A}{2} \left(e^{j(\Omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\Omega_0 n + \phi)}\right) \quad (5.9)$$

Diskretna realna sinusoida sa parametrima $\Omega_0 = 2\pi/7$ i $\phi = -\pi/2$ je prikazana na slici 5.5.



Slika 5.5: Realna diskretna sinusoida

Po analogiji sa kontinualnim sinusoidnim signalima, logično je očekivati da i diskretna sinusoida bude periodična, odnosno da zadovolji uslov

$$x[n + N] = x[n] \quad (5.10)$$

za svako n i za neku periodu $N > 0$. Međutim, u slučaju diskretnih signala to ne mora biti tako, već periodičnost diskretne sinusoide zavisi od učestanosti Ω_0 . Specijalno, ukoliko je signal $e^{j\Omega_0 n}$ periodičan sa periodom N , možemo pisati:

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n} \quad (5.11)$$

i shodno tome

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \quad (5.12)$$

Dakle, eksponent $\Omega_0 N$ mora biti ceo multipl od 2π , odnosno

$$\Omega_0 N = 2\pi k \quad (5.13)$$

Zaključujemo da treba da postoji celobrojno k takvo da je u važnosti relacija

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \quad (5.14)$$

Konačno, uslov da kompleksna diskretna sinusoida bude periodičan signal je da, takozvana normalizovana učestanost $\Omega_0/(2\pi)$ bude racionalan broj. Ukoliko ovaj uslov primenimo na signal $\sin(2\pi n/7)$ prikazan na slici 5.5, dobija se da je $\Omega_0/(2\pi) = 1/7 = k/N$. Dakle normalizovana učestanost jeste racionalan broj i zbog toga se na slici 5.5 i vidi periodičnost sinusoide, sa periodom $N = 7$. Opšti uslov periodičnosti $\Omega_0/(2\pi) = k/N$ govori da u jednoj periodi od N odbiraka ima k ciklusa sinusoide. Ako normalizovana učestanost nije racionalan broj, tada diskretna sinusoida nije periodična, i odbirci diskretne sinusoide se nikada neće ponoviti.

Sledeća značajna razlika između kontinualnih i diskretnih sinusoida je ta da se u slučaju diskretnih sinusoida za dve različite vrednosti kružnih učestanosti Ω_0 mogu dobiti identični odbirci

diskretnog signala, što je u kontinualnom slučaju nemoguće. Ako, na primer, posmatramo diskretnu sinusoidu sa učestanošću Ω_0 i drugu sinusoidu sa učestanošću $(\Omega_0 + 2\pi)$, tada je:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (5.15)$$

jer je $e^{j2\pi n} = 1$ za celobrojne vrednosti n . Drugim rečima, ove dve diskretne sinusoida sa učestanostima Ω_0 i $(\Omega_0 + 2\pi)$, se ne mogu razlikovati. Isti zaključak važi i za realne sinusoida, naravno pod uslovom da je razlika njihovih učestanosti jednaka celom multiplu od 2π . Kao posledica ove činjenice, kada god definišemo diskretnu sinusoidu potrebno je za učestanosti posmatrati samo interval dužine 2π , na primer $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$ ili $-\pi < \Omega_0 \leq \pi$. Ova će činjenica biti vrlo važna kada se kasnije budemo bavili diskretnom Furijeovom transformacijom.

U opštem slučaju kada su i parametar C i a kompleksni brojevi

$$C = |C|e^{j\phi}, \quad a = \rho e^{j\Omega_0}, \quad \rho > 0 \quad (5.16)$$

diskretni signal dobija formu:

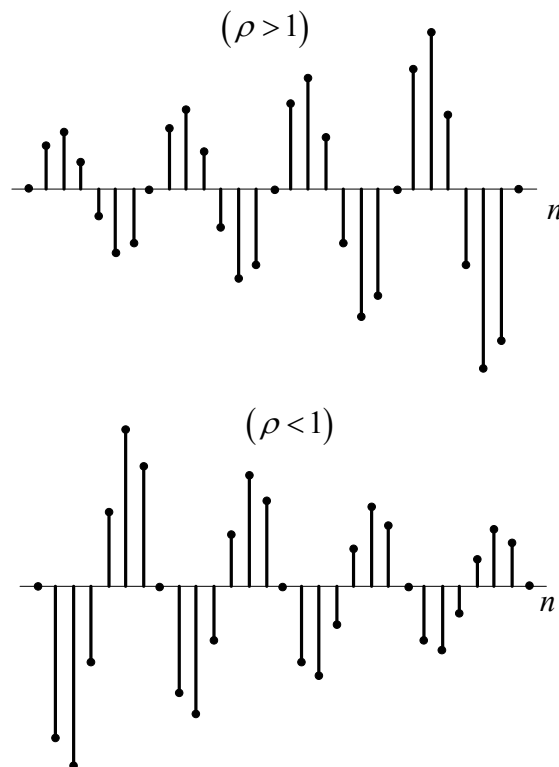
$$\begin{aligned} x[n] &= Ca^n = |C|\rho^n e^{j(\Omega_0 n + \phi)} \\ &= |C|\rho^n [\cos(\Omega_0 n + \phi) + j \sin(\Omega_0 n + \phi)] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ponovo, po analogiji sa kontinualnim signalima, dobijamo modulisane sinusoida sa anvelopom ρ^n , koja može biti prigušena ili opadajuća ako je $\rho < 1$ ili rastuća ako je $\rho > 1$.

Realni deo ovog signala je:

$$\text{Re}\{Ca^n\} = |C|\rho^n \cos(\Omega_0 n + \phi) \quad (5.18)$$

i dva različita slučaja ovog signala su prikazana na slici 5.6.



Slika 5.6: Eksponencijalno rastuća i opadajuća diskretna sinusoida

Pitanje 6: Modifikacije nezavisne promenljive n u diskretnim signalima

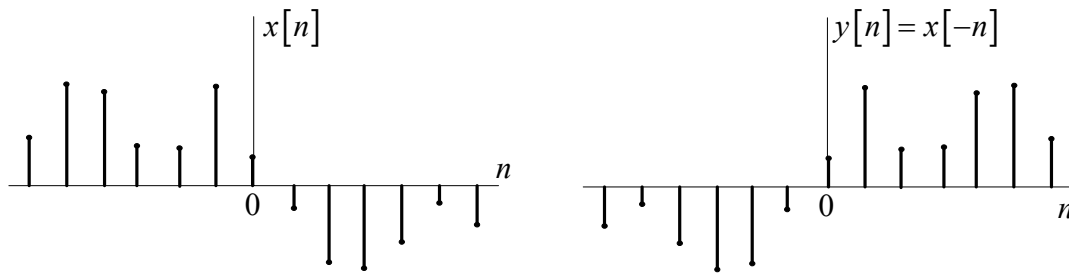
Kao i u slučaju kontinualnih vremenskih signala, mnoge značajne operacije nad signalima se mogu dobiti jednostavnom modifikacijom nezavisne vremenske promenljive n . Ponovo, elementarne transformacije u slučaju diskretnih signala su pomeranje u vremenu, $x[n - n_0]$, inverzija vremena $x[-n]$ i skaliranje u vremenu $x[an]$, koje se najčešće kombinuju.

Inverzija vremena

Ako definišemo diskretni signal $y[n]$ na osnovu signala $x[n]$ na sledeći način:

$$y[n] = x[-n] \quad (6.1)$$

jasno je da tada odbirci jednog i drugog signala zadovoljavaju relacije $x[0] = y[0]$; $x[1] = y[-1]$; $x[2] = y[-2]$ i tako dalje. Drugim rečima, ponovo se signali x i y odnose kao likovi u ogledalu, u odnosu na oordinatu. Primer takvih signala dat je na slici 6.1.



Slika 6.1: Ilustracija inverzije vremena

Skaliranje vremena

Po analogiji sa kontinualnim signalima, diskretni signal definisan sledećom relacijom:

$$y[n] = x[2n] \quad (6.2)$$

je ubrazan u odnosu na signal $x[n]$ dva puta, ali postoji značajna razlika. Primitimo da je $y[0] = x[0]$, $y[1] = x[2]$, $y[2] = x[4]$ i tako dalje. Drugim rečima, u signalu $y[n]$ se ne pojavljuju neparni odbirci signala x , $x[1], x[3], x[5] \dots$. Ovakva pojava se naziva *decimacijom signala* x . Naravno, ukoliko želimo da zadržimo samo neparne odbirke signala x , definišaćemo signal w na sledeći način:

$$w[n] = x[2n + 1] \quad (6.3)$$

i tada će biti $w[0] = x[1]$, $w[1] = x[3]$, $w[2] = x[5]$...

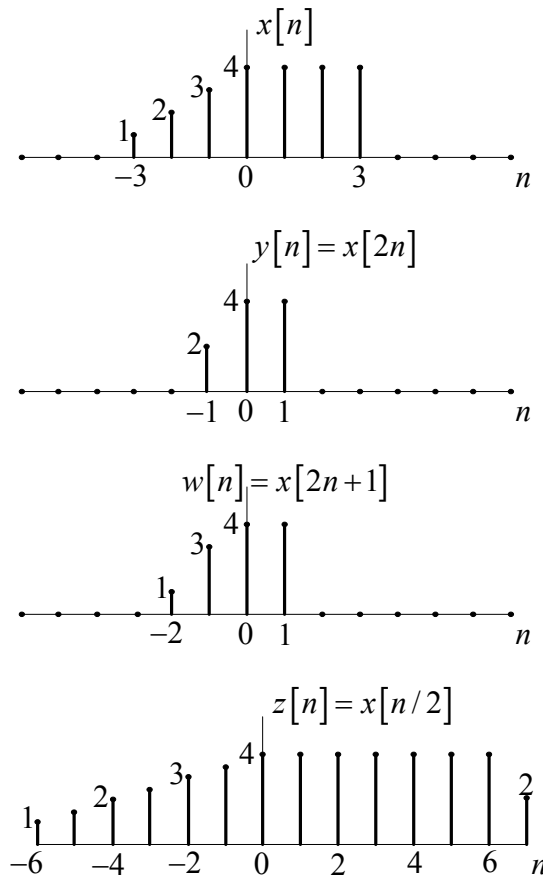
Usporavanje signala (skaliranje vremena koeficijentom koji je manji od 1) unosi još više različitosti u odnosu na kontinualne signale. Pretpostavimo da je signal z definisan kao:

$$z[n] = x[n/2] \quad (6.4)$$

Tada signal $z[n]$ nije definisan za neparne vrednosti argumenta n . U želji da signal ipak ima odbirke za svako n treba pristupiti postupku interpolacije koja se obično vrši metodom jednostavne linearne interpolacije:

$$z[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{ako je } n \text{ parno} \\ \frac{x[(n-1)/2] + x[(n+1)/2]}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparno} \end{cases} \quad (6.4)$$

Primer ovakvih signala je prikazan na slici 6.2.



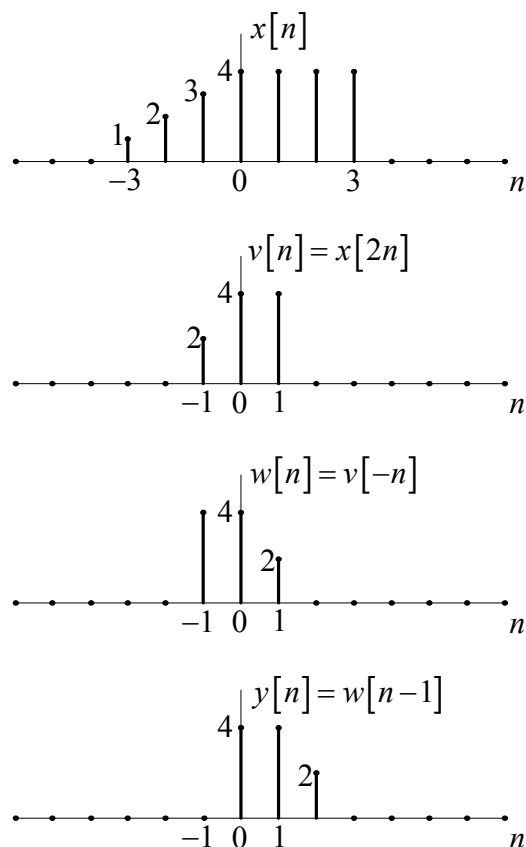
Slika 6.2: Ilustracija postupka decimacije i interpolacije

Postupci decimacije i interpolacije su vrlo komplikovani postupci, i na ovom jednostavnom primeru je samo ilustrovan njihov učinak.

Kombinacija pomeranja u vremenu, inverzije vremena i skaliranje čini linearne transformacije nezavisne vremenske promenljive. Međutim, zbog prirode vremenske promenljive koja u diskretnim signalima mora biti celobrojna vrednost, često ima problema sa kojima se nismo susretali kod kontinualnih signala. Ponovo, uputno je vezati se za neku pogodno izabranu vrednost nezavisne promenljive n_0 i na osnovu nje pratiti regularnost sukcesivnih modifikacija.

Primer 6.1: Na osnovu signala $x[n]$ prikazanog na slici 6.2, formirati signal $y[n] = x[2-2n]$.

Na osnovu signal $x[n]$ formirajmo prvo signal $v[n] = x[2n]$, a zatim na osnovu signala $v[n]$ formirajmo signal $w[n] = v[-n] = x[-2n]$. Ovi signali su prikazani na slici 6.3. Zatim je neophodno na osnovu signala $w[n]$ formirati signal $y[n] = w[n-1] = x[-2(n-1)] = x[2-2n]$.

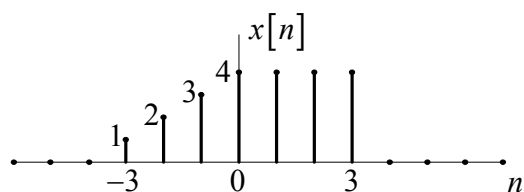


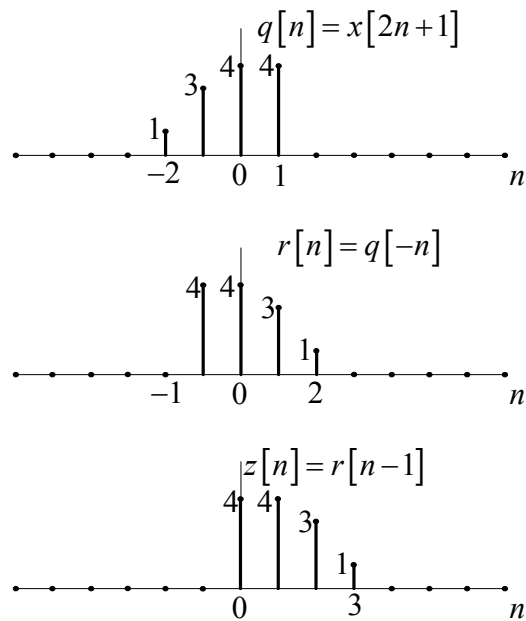
Slika 6.3: Ilustracija kombinovanih modifikacija nezavisne vremenske promenljive

U cilju provere dobijenog rezultata, možemo se vezati za $n_0 = -2$. Kako je $x[n_0] = 2$, potrebno je da $v[-1] = x[-2] = x[n_0]$ bude takođe 2. Sa grafika se vidi da je taj uslov ispunjen. Dalje mora biti $w[1] = v[-1] = x[-2] = 2$ što je takođe ispunjeno. I konačno, kako je $y[2] = x[2 - 2 * 2] = x[-2] = 2$ zaključujemo da su grafici prikazani na slici 6.3 ispravni.

Primer 6.2: Na osnovu signala iz prethodnog primera formirati signal $z[n] = x[3 - 2n]$.

Ovaj se primer razlikuje od prethodnog po tome što signal $z[n]$ koristi samo neparne odbirke signala x , dok je signal y iz prethodnog zadatka koristio samo parne odbirke. I ukoliko bi neko pozeleo da za rešavanje ovog zadatka iskoristi signal $w[-2n]$ iz prethodnog primera, naišao bi na problem pomeranja signala za $3/2$ odbiraka što je nemoguće (jer je $z[n] = x[3 - 2n] = x[-2(n - 3/2)] = w[n - 1.5]$). Zbog toga u cilju rešavanja ovog primera treba krenuti od pomoćnog signala $q[n] = x[2n + 1]$ koji izdvaja samo neparne odbirke signala x . Zatim, inverzijom vremena na osnovu signala q treba formirati signal $r[n] = q[-n] = x[-2n + 1]$, i konačno pomeranjem signala r za jedan odbirak u desno dolazimo do željenog signala $z[n] = x[3 - 2n] = x[-2(n - 1) + 1] = r[n - 1]$. Ovi su signali prikazani na slici 6.4.





Slika 6.4: Ilustracija kombinacija modifikacije nezavisne vremenske promenljive

Ponovo se jednostavno može proveriti ispravnost dobijenih grafika uočavanjem nekom specifičnog vremenskog trenutka. Recimo za $n_0 = -3$ znamo da je $x[n_0] = 1$. Tada mora biti $q[-2] = 1$ i $r[2] = 1$ i $z[3] = 1$, što se proverom na graficima potvrđuje.

Osobine simetrije

Po analogiji sa kontinualnim vremenskim signalima, i za diskretne vremenske signale je moguće uvesti osobine parnosti i neparnosti. Za diskretni signal $x[n]$ kažemo da je paran ako zadovoljava relaciju:

$$x[n] = x[-n] \quad (6.6)$$

dok se za signal koji zadovoljava relaciju

$$x[n] = -x[-n] \quad (6.7)$$

kaže da je neparan. Važno je to da se svaki realni diskretni signal može napisati kao zbir svog parnog i neparnog dela, gde se parni i neparni deo signala definišu shodno sledećim relacijama:

$$Ev\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \quad (6.8)$$

$$Od\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \quad (6.9)$$

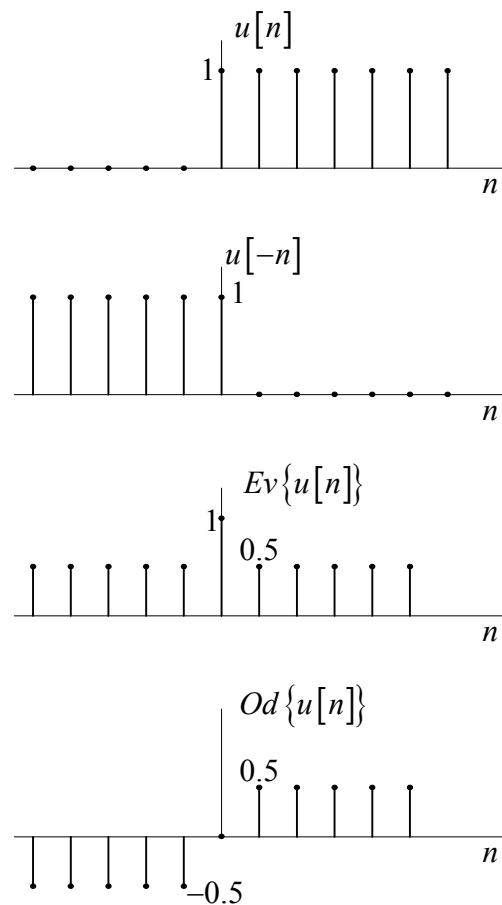
gde je sa $Ev\{\cdot\}$ označen parni a sa $Od\{\cdot\}$ neparni deo signala.

Primer 6.3: Sračunajmo parni i neparni deo jedinične diskretne odskočne funkcije.

Na osnovu relacija (6.8) i (6.9) možemo pisati:

$$\begin{aligned} Ev\{u[n]\} &= \frac{1}{2}[u[n] + u[-n]] \\ Od\{u[n]\} &= \frac{1}{2}[u[n] - u[-n]] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Na slici 6.3. su prikazani odgovarajući signali.



Slika 6.3: Parni i neparni deo jedinične diskretne odskočne funkcije