

Pitanje 24: Laplace-ova transformacija, osobine i inverzna Laplace-ova transformacija

U nekom od prethodnih predavanja pokazali smo da je signal $\phi(t) = e^{st}$ sopstvena funkcija svakog linearnog, vremenski nepromenljivog sistema. Koristeći konvoluciju za izračunavanje odziva sistema $y(t)$ ako se na ulaz dovede signal $x(t) = \phi(t) = e^{st}$ dobija se

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st} \end{aligned} \quad (9.1)$$

što znači da se i na izlazu sistema dobija ista forma signala, pomnožena odgovarajućim koeficijentom, sopstvenom vrednošću

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (9.2)$$

Ukoliko usvojimo da je kompleksna vrednost s čisto imaginarna $s = j\omega$, poslednja relacije nije ništa drugo nego analitička jednačina Fourier-ove transformacije. Međutim, generalno govoreći, ukoliko dozvolimo da varijabla s bude kompleksna, time pokrivamo mnogo širi spektar signala $\phi(t)$ a ne samo prostoperiodične signale. Ovakav način razmišljanja nas dovodi do pojma Laplace-ove transformacije.

Za bilo koji signal $x(t)$ definišemo njegovu Laplace-ovu transformaciju shodno relaciji (9.2) na sledeći način:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.3)$$

Pitanje konvergencije Laplace-ove transformacije se može tretirati na sličan način kao što smo analizirali konvergenciju Fourier-ove transformacije. Naime, ako kompleksnu varijablu s napišemo u formi $s = \sigma + j\omega$, relacija (9.3) postaje

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (9.4)$$

što istovremeno predstavlja dokaz da je Laplace-ova transformacija generalizacija Fourier-ove. Naime, konvergencija Laplace-ove transformacije za signal $x(t)$ se svodi na problem konvergencije Fourier-ove transformacije za signal $x(t) e^{-\sigma t}$. Na osnovu toga možemo zaključiti da, zbog uticaja člana $e^{-\sigma t}$, vrlo često Laplace-ova transformacija konvergira i onda kada taj uslov nije ispunjen za Fourier-ovu transformaciju.

Primer 9.1: Posmatrajmo kauzalni signal

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad (9.5)$$

U predavanju broj 7. smo pokazali da Fourier-ova transformacija ovog signala postoji za $a > 0$ i ona je iznosila

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{a + j\omega} ; a > 0 \quad (9.6)$$

Ako potražimo Laplace-ovu transformaciju ovog istog signala dobićemo:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt \quad (9.7)$$

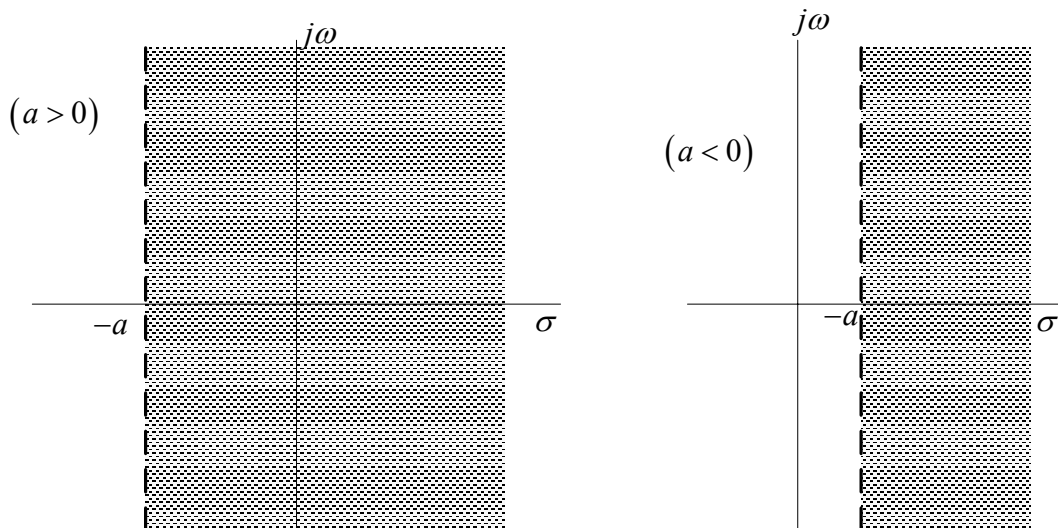
što predstavlja Fourier-ovu transformaciju za signal $e^{-(\sigma+a)t} u(t)$. Otuda Laplace-ova transformacija konvergira ukoliko je $\sigma + a > 0$. Drugim rečima, za bilo koju vrednost parametra a , Laplace-ova transformacija konvergira za vrednosti $\sigma > -a$ i glasi:

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma > -a \quad (9.8)$$

ili ekvivalentno tome

$$X(s) = \frac{1}{s + a}; \quad \text{Re}\{s\} > -a \quad (9.9)$$

Oblast kompleksne promenljive s za koju Laplace-ova transformacija konvergira se naziva *oblašću konvergencije* (u engleskoj literaturi se ona obično označava sa *ROC* od prvih slova reči *Region Of Convergence*) i kako je promenljiva s kompleksna sa svojim realnim i imaginarnim delom, ta oblast se uobičajeno predstavlja kao geometrijsko mesto tačaka u ravni. Za primer signala datog jednačinom (9.5) oblast konvergencije je prikazana na slici 9.1.



Slika 9.1: Oblast konvergencije za uslov $\text{Re}\{s\} > -a$

Kao i u slučaju Fourier-ove transformacije, i Laplace-ova transformacija signala $X(s)$ u najvećem broju slučajeva se može napisati kao racionalna funkcija kompleksne promenljive s :

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad s \in \text{ROC} \quad (9.10)$$

gde oznaka $s \in \text{ROC}$ znači da relacija važi pod uslovom da je kompleksna promenljiva s iz oblasti konvergencije Laplace-ove transformacije. Pri tome podrazumevamo da je stepen polinoma B jednak M (uobičajeno se piše $\deg\{B(s)\} = M$) a stepen polinoma A je jednak N , tj. $\deg\{A(s)\} = N$. Laplace-ova transformacija $X(s)$ signala $x(t)$ se uvek može napisati u formi (9.10) ukoliko je signal $x(t)$ neka linearna kombinacija eksponencijalnih signala (realnih ili kompleksnih). Specijalno, ako je signal $h(t)$ impulsni odziv nekog sistema, Laplace-ova

transformacija $H(s)$ će biti u formi (9.10) ako sistem može opisati linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima. M nula polinoma $B(s)$ se nazivaju nulama Laplace-ove transformacije, dok se N nula polinoma $A(s)$ nazivaju polovima Laplace-ove transformacije. Očigledno je da polovi racionalne funkcije $B(s)/A(s)$ sigurno ne pripadaju oblasti konvergencije, jer kada kompleksna promenljiva s uzme vrednost jednog od polova, tada količnik $B(s)/A(s)$ teži beskonačnosti. Shodno tome, strogo govoreći pomoću pozicije nula i polova mi možemo definisati racionalnu funkciju $B(s)/A(s)$, ali ako želimo da u potpunosti opišemo Laplace-ovu transformaciju $X(s)$ neophodno je definisati i oblast konvergencije. Zbog toga se često Laplaceova transformacija, kao što će to biti prikazano u sledećem primeru, opisuje grafički gde se pozicije nula i polova opisuju znakom 'o', pozicije polova znakom 'x' a oblast konvergencije se osenči kao u prethodnom primeru.

Primer 9.2: Neka je dat kauzalni signal

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(t); \quad a \neq b \quad (9.11)$$

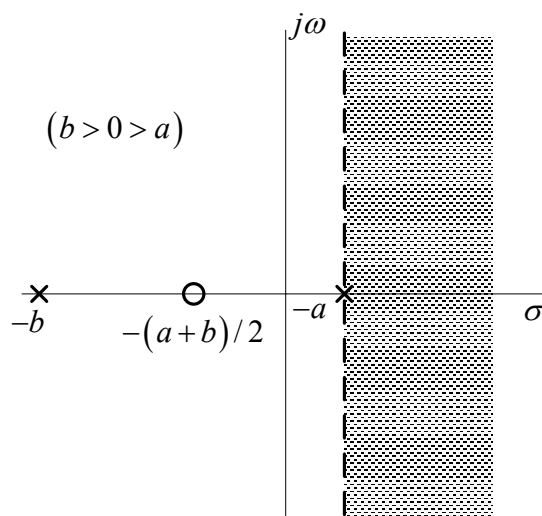
Njemu odgovarajuća Laplace-ova transformacija glasi

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+b)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > \max(-a, -b) \end{aligned} \quad (9.12)$$

ili, sabiranjem parcijalnih razlomaka

$$X(s) = \frac{2\left(s + \frac{a+b}{2}\right)}{(s+a)(s+b)}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > \max(-a, -b) \quad (9.13)$$

Kompletna informacija o Laplace-ovoj transformaciji $X(s)$, koja sadrži prikaz pozicije nula i polova kao i oblast konvergencije je data na slici 9.2.



Slika 9.2: Spektar nula i polova i oblast konvergencije signala $x(t) = (e^{-at} + e^{-bt})u(t)$

Istini za volju, jedini podatak o signalu $x(t)$ koji nije prikazan na slici 9.2. jeste multiplikativna konstanta, jer bi slika izgledala identično i za svaki signal $kx(t)$, $k \neq 0$.

Studentima se savetuje, da radi vežbe, potraže Laplace-ove transformacije sledećih signala

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t), \quad x(t) = \delta(t), \quad x(t) = \delta(t - t_0), \\ x(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2), \quad x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$$

i da ih, analogno prethodnom primeru, predstavite u kompleksnoj s ravni.

Inverzna Laplace-ova transformacija

Inverzna Laplace-ova transformacija treba da nam ponudi postupak kojim ćemo od Laplace-ove transformacije $X(s)$ generisati vremenski signal $x(t)$. Najjednostavniji postupak je da podemo od činjenice da je Laplace-ova transformacija signala $x(t)$ zapravo Fourier-ova transformacija signala $x(t)e^{-\sigma t}$, pa shodno tome možemo iskoristiti analitičku i sintetičku relaciju Fourier-ove transformacije. Ako je analitička relacija:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (9.14)$$

shodno njoj možemo sintetičku relaciju napisati na sledeći način:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9.15)$$

Množeći obe strane poslednje jednakosti sa $e^{\sigma t}$, dobija se

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (9.16)$$

ili uvodeći smene $s = \sigma + j\omega$, $ds = jd\omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (9.17)$$

Relacija (9.17) se obično naziva inverznom Laplace-ovom transformacijom, i zajedno sa relacijom (9.3) definiše takozvane Laplace-ove transformacione parove. Činjenica da funkcije $x(t)$ i $X(s)$ zadovoljavaju ove dve relacije (9.3) i (9.17) se često u literaturi označava jednom od sledećih notacija:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}, \quad x(t) \leftrightarrow X(s) \quad (9.18)$$

Relacija (9.17) nam kaže da se signal $x(t)$ može rekonstruisati na osnovu njegovog Laplace-ovog transformacionog para, međutim, sračunati ovaj integral je vrlo često ozbiljan posao i podrazumeva takozvanu konturnu integraciju koja se izučava u teoriji funkcija kompleksnih varijabli. Ono što ćemo ovde napomenuti jeste da ukoliko funkcija $X(s)$ postoji, tada se integral (9.17) mora računati po pravoj $\sigma = \text{const}$. Ta prava mora pripadati oblasti konvergencije funkcije $X(s)$, što znači da oblast konvergencije mora biti takva da u njoj postoji pojas konačne širine i beskonačne dužine: $\sigma_1 < \text{Re}\{s\} < \sigma_2$.

Osobine Laplace-ove transformacije

Slično kao i kod Fourier-ove transformacije, jednostavno se izvode sledeće osobine:

linearnost

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s) \quad (9.19)$$

pri čemu treba voditi računa da se oblast konvergencije ovako dobijene linearne kombinacije signala dobija kao presek pojedinačnih oblasti konvergencija.

pomeranje u vremenu

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad (9.20)$$

modulacija

$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0) \quad (9.21)$$

skaliranje

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (9.22)$$

diferenciranje i integraljenje

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \quad (9.23)$$

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad (9.24)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad (9.25)$$

konvolucija signala

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) X_2(s) \quad (9.26)$$

gde opet treba naglasiti da je oblast konvergencije konvolucije dva signala, jednaka preseku pojedinih oblasti konvergencije za svaki od signala ponaosob koji ulaze u konvoluciju.

Na osnovu navedenih osobina, ili primenom definicionog izraza kojim se sračunava Laplace-ova transformacija (9.3), lako se dolazi do sledeće table Laplace-ovih transformacija za često korišćene signale:

Signal $x(t)$	Laplace-ova transformacija $X(s)$	Oblast konvergencije
$\delta(t)$	1	Svako s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -a$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$

Tabela Laplace-ovih transformacija često korišćenih signala

Zanimljivo je, na osnovu date table, prepoznati da postoje različiti signali koji imaju istu Laplace-ovu transformaciju, i jedino se razlikuju po oblasti konvergencije. Takav primer signala je $u(t)$ i $-u(-t)$. Njihova Laplace-ova transformacija je ista i iznosi $1/s$, a razlikuju se po oblasti konvergencije. I uopšteno govoreći, važi pravilo koje se lako može dokazati da ako su signali kauzalni ili postoji t_0 takvo da je $x(t) = 0$ za $t < t_0$, oblast konvergencije ima formu $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$, dok u suprotnom, ako su signali antikauzalni ili postoji t_0 takvo da je $x(t) = 0$ za $t > t_0$, tada oblast konvergencije Laplace-ove transformacije za takav signal ima formu $\operatorname{Re}\{s\} < \sigma_0$.

Pitanje 25: Funkcija prenosa sistema i jednostrana Laplace-ova transformacija

Laplace-ova transformacija $H(s)$ impulsnog odziva kontinualnog sistema $h(t)$, data je relacijom

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (9.27)$$

i uobičajeno se naziva *funkcijom prenosa* LTI sistema. Funkcija prenosa je, očigledno, generalizacija frekvencijskog odziva $H(j\omega)$ za specijalan slučaj $s = j\omega$. Kako impulсни odziv $h(t)$ u potpunosti karakteriše sistem, i funkcija prenosa $H(s)$ je način da se jednoznačno opiše sistem, s obzirom da se primenom inverzne Laplace-ove transformacije impulсни odziv $h(t)$ može rekonstruisati iz funkcije $H(s)$. Sa druge strane, znajući da se odziv sistema $y(t)$ može dobiti kao

konvolucija proizvoljne pobude $x(t)$ i impulsnog odziva $h(t)$, tada je Laplace-ova transformacija signala na izlazu $Y(s)$ jednaka proizvodu funkcije prenosa $H(s)$ i Laplace-ove transformacije pobudnog signala:

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (9.28)$$

pri čemu je oblast konvergencije funkcije $Y(s)$ jednaka preseku oblasti konvergencije funkcija na desnoj strani u poslednjoj relaciji.

Primer 9.3: Ako je LTI sistem definisan svojim impulsnim odzivom

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \quad (9.29)$$

za antikauzalni signal na ulazu

$$x(t) = e^{-t}u(-t) \quad (9.30)$$

lako ćemo sračunati odziv sistema primenjujući relaciju (9.28). Znajući da je funkcija prenosa sistema

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t}dt = \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad (9.31)$$

i da je Laplace-ova transformacija ulaznog signala

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t}e^{-st}dt = -\frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} < -1 \quad (9.32)$$

zaključujemo da je Laplace-ova transformacija izlaznog signala

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1 \quad (9.33)$$

Kauzalni i antikauzalni sistemi

Kako je impulsni odziv kauzalnog LTI sistema kauzalni signal, tada je njegova oblast konvergencije u obliku $\text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$, desno od položaja svih polova. U suprotnom, za sistem sa antikauzalnim impulsnim odzivom, oblast konvergencije je u obliku $\text{Re}\{s\} < \sigma_{\max}$, levo od položaja polova funkcije prenosa. Međutim, to ne znači da je sistem čija funkcija prenosa ima oblik konvergencije $\text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$ kauzalan, već samo da je njegov impulsni odziv ograničen sa leve strane. Slično tome, ako je oblast konvergencije funkcije prenosa u obliku $\text{Re}\{s\} < \sigma_{\max}$, to ne znači da je on antikauzalan već samo da mu je impulsni odziv ograničen sa desne strane. Međutim, može se pokazati, da ako se funkcija prenosa sistema $H(s)$ može predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = b_N + \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{s + s_k} \quad (9.34)$$

bez dodatnih članova $e^{s_k t}$ koji potiču od vremenskih kašnjenja, tada konvergencija tipa $\text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$ uvek ukazuje na kauzalni sistem a konvergencija oblika $\text{Re}\{s\} < \sigma_{\max}$ označava antikauzalni sistem. Tako je, na primer, sistem funkcije prenosa $H(s) = 1/(s+1)$ sa oblašću

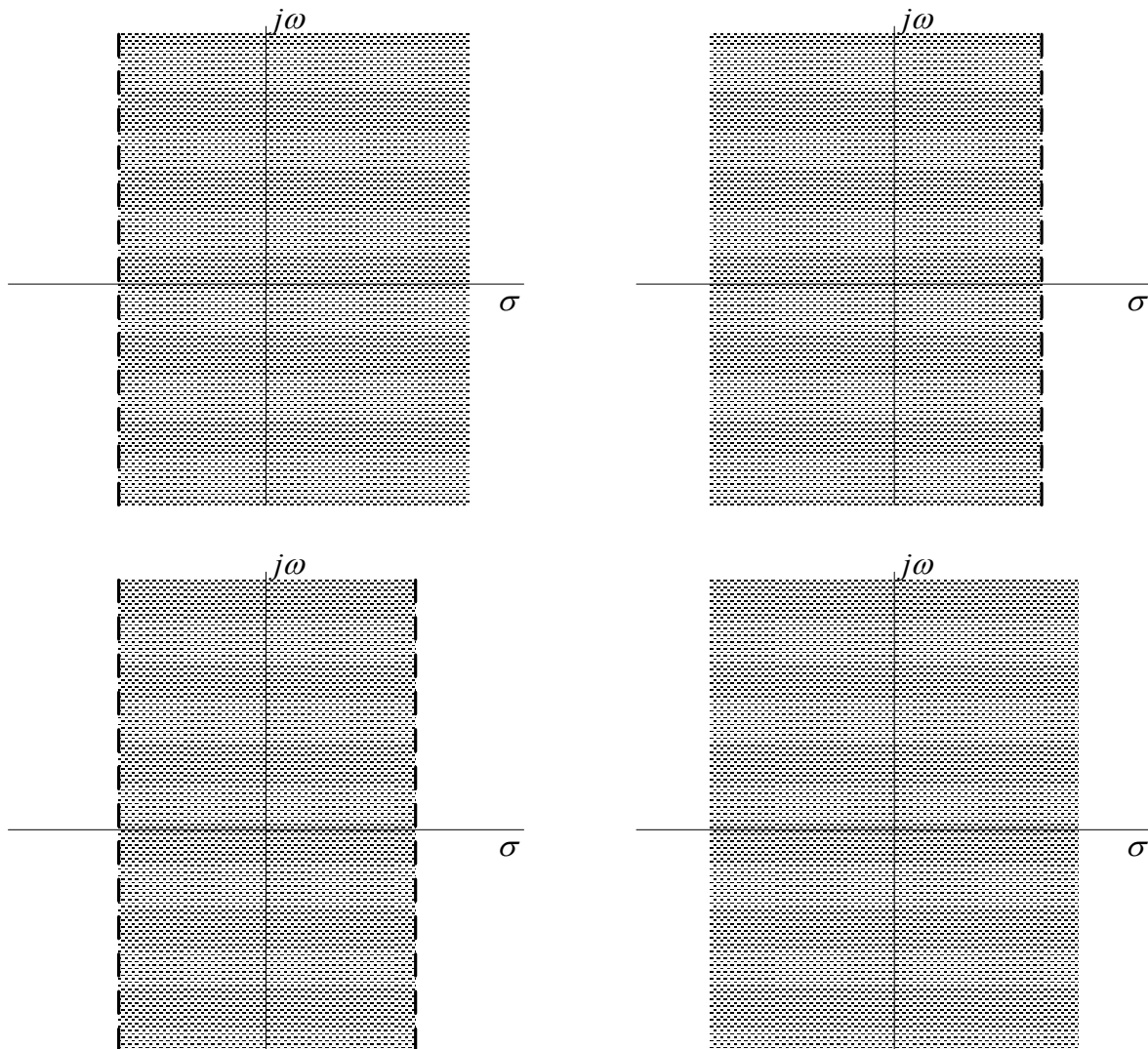
konvergencije $\text{Re}\{s\} > -1$ kauzalan, dok sistem sa funkcijom prenosa $H(s) = e^s / (s+1)$ i istom oblašću konvergencije nije kauzalan.

Stabilnost sistema

Prilikom analize BIBO stabilnosti kontinualnih LTI sistema došli smo do potrebnog i dovoljnog uslova koji treba da zadovolji impulsni odziv sistema

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (9.35)$$

da bi sistem bio BIBO stabilan. Međutim, ovaj uslov je identičan Dirichlet-ovom uslovu koji treba da zadovolji neperiodičan signal da bi njegova Fourier-ova transformacija konvergirala (osim za ograničen skup specijalnih signala). To znači da je uslov stabilnosti identičan Dirichlet-ovom uslovu konvergencije. Ovaj se uslov može preformulisati u svetlu Laplace-ove transformacije: *Potreban i dovoljan uslov da sistem bude BIBO stabilan jeste da prava $s = j\omega$ pripada oblasti konvergencije funkcije prenosa sistema.* U kontekstu ovakve definicije postoje četiri različite mogućnosti za oblast konvergencije koje zadovoljavaju navedeni uslov. Ove četiri mogućnosti su prikazane na slici 9.3.



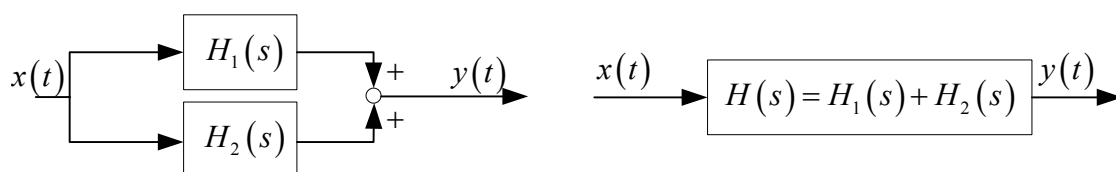
Slika 9.3: Moguće oblasti konvergencije stabilnih sistema

Slučaj u gornjem levom uglu odgovara sistemu koji je stabilan i čiji je impulsni odziv ograničen sa leve strane, gornja desna oblast konvergencije odgovara sistemu koji je stabilan i čiji je impulsni odziv ograničen sa desne strane, donja leva oblast konvergencije odgovara stabilnom sistemu čiji je impulsni odziv neograničen sa obe strane, dok oblast konvergencije u donjem desnom uglu odgovara sistemu čiji je impulsni odziv ograničenog trajanja. Ono što je za nas zanimljivo, jeste da *kauzalni, stabilni sistemi moraju imati oblast konvergencije kakva je prikazana na gornjoj levoj slici*, odnosno mora postojati neko negativno σ_{\max} takvo da je oblast konvergencije $\text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$.

Strukturni blok dijagrami sistema

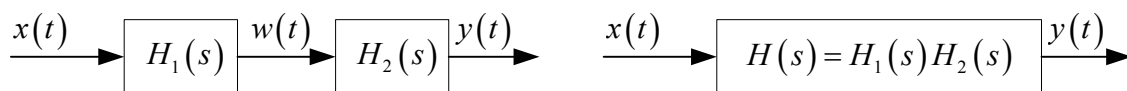
Vrlo često se složeni sistemi, koji se sastoje od velikog broja podsistema prikazuju strukturnim blok dijagramom, u kome se svaki podsystem prikazuje pravougaonikom u kome je upisana njegova funkcija prenosa, dok se linijama označava protok signala između njih. Postoje posebne tehnike kojima se, za tako složene sistema, može odrediti ekvivalentna funkcija prenosa. U ovom predmetu će biti ilustrovana najjednostavnija tehnika koja se zasniva na elementarnim transformacijama blokova. Tri najjednostavnije elementarne transformacije su:

1. Paralelna veza dva sistema (dva sistema su u paralelnoj vezi ukoliko imaju zajednički ulaz a njihovi izlazi se sabiraju u cilju formiranja zajedničkog odziva) se ekvivalentno može predstaviti jednim sistemom čija je funkcija prenosa jednaka zbiru pojedinih funkcija prenosa. Ovo pravilo je ilustrovano slikom 9.4.



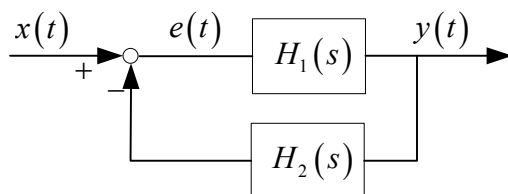
Slika 9.4: Transformacija paralelne veze dva sistema

2. Redna veza dva sistema (dva sistema su u rednoj vezi ukoliko je izlaz prvog od njih istovremeno ulaz drugog sistema) se ekvivalentno predstavlja jednim sistemom čija je funkcija prenosa jednaka proizvodu pojedinih funkcija prenosa. Ovo pravilo je ilustrovano slikom 9.5.



Slika 9.5: Transformacija redne veze dva sistema

3. Konačno, vrlo često se sreću sistemi u povratnoj sprezi kakva je prikazana na slici 9.6.



Slika 9.6: Struktura sistema sa negativnom povratnom spregom

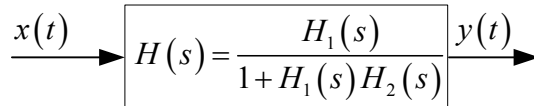
Jednostavnom algebrom:

$$Y(s) = H_1(s)E(s); E(s) = X(s) - H_2(s)Y(s) \quad (9.36)$$

dolazi se do ekvivalentne funkcije prenosa sistema

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (9.37)$$

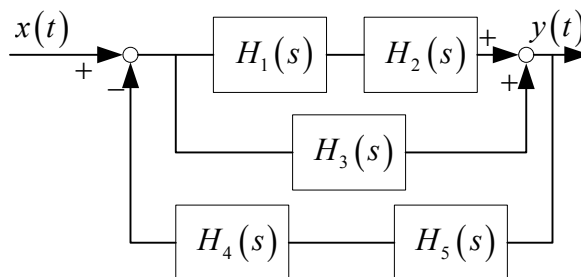
pa sistem prikazan na slici 9.6. jeste ekvivalentan sistemu sa slike 9.7.



Slika 9.7: Ekvivalentan sistem sistemu sa negativnom povratnom spregom

Korišćenjem navedenih transformacija, u velikoj meri se mogu pojednostaviti vrlo složeni sistemi i naći njihova ukupna (ekvivalentna) funkcija prenosa.

Primer 9.4: Za sistem prikazan na slici 9.8. odrediti ekvivalentnu funkciju prenosa.



Slika 9.8: Strukturni blok dijagram složenog sistema

Pojednostavljenje datog sistema se vrši u četiri koraka. U prvom koraku se redna veza blokova $H_1(s)$ i $H_2(s)$ se ekvivalentno može predstaviti jednim blokom funkcije prenosa $H_{12}(s) = H_1(s)H_2(s)$, zatim se redna veza blokova $H_4(s)$ i $H_5(s)$ zamenjuje blokom funkcije prenosa $H_{45}(s) = H_4(s)H_5(s)$. Sledeći korak je da se paralelna veza blokova $H_{12}(s)$ i $H_3(s)$ zameni blokom funkcije prenosa $H_{123}(s) = H_{12}(s) + H_3(s)$ i poslednji korak je da se primeni ekvivalentna funkcija prenosa za sistem sa povratnom spregom:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_{123}(s)}{1 + H_{123}(s)H_{45}(s)} = \frac{H_1(s)H_2(s) + H_3(s)}{1 + (H_1(s)H_2(s) + H_3(s))H_4(s)H_5(s)} \quad (9.38)$$

Unilateralna (jednostrana) Laplace-ova transformacija

Laplace-ova transformacija koja je definisana na početku ovog predavanja se vrlo često označava kao *dvostrana* ili *bilateralna* (koristi se skraćenica BLT) jer su granice integrala podintegralne funkcije u relaciji (9.3) od $-\infty$ do ∞ . Međutim, vrlo često se Laplace-ova transformacija koristi za analizu kauzalnih (dakle realnih sistema) i shodno tome kauzalnih signala. Otuda se pojavljuje potreba za uvođenjem unilateralne ili jednostrane Laplace-ove transformacije (koristi se skraćenica ULT) kauzalnog signala $x(t)$ na sledeći način:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.39)$$

Uvođenje ovakve jednostrane Laplace-ove transformacije je korisno ne samo sa stanovišta analize kauzalnih sistema i kauzalnih signala već i sa stanovišta rešavanja diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima i nenultim početnim uslovima, što će biti objašnjeno u sledećem pitanju. Međutim, ovde se otvara jedno značajno pitanje: Ako su signali koje posmatramo ili sistemi koje analiziramo kauzalni, logično je da donja granica integrala u relaciji (9.39) bude nula, međutim, kako se onda tretira Dirakov impuls koji je svuda jednak nuli osim za $t = 0$, pri čemu nam je ovaj signal vrlo važan s obzirom da se preko njega definiše impulsni odziv sistema. Zbog toga se u nekoj literaturi može naći definicija Laplace-ove transformacije na sledeći način:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.40)$$

gde je donja granica integrala 0 zamenjena sa 0^- . Ovakva definicija Laplace-ove transformacije je vrlo zahvalna i sa aspekta nalaženja odziva sistema koji je u nultom trenutku imao početne uslove. Sa druge strane, ukoliko se opredelimo za rad sa isključivo kauzalnim signalima, podrazumeva se da je $x(t) = 0$ za $x < 0$, pa je i $x(0^-) = 0$ i početnu vrednost signala treba tražiti u obliku $x(0^+)$, pa se otuda vrlo često može naći i sledeća definicija unilateralne Laplace-ove transformacije:

$$X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.41)$$

Osnovni nedostatak ovakve definicije je taj što bi u tom slučaju Laplace-ova transformacija Dirakovog impulsa bila jednaka nuli, što je neprihvatljivo sa stanovišta dalje primene transformacije. Kako god bilo, svaka od ovih definicija (9.39-41) ima svojih nedostataka i svojih prednosti za pojedine primene, i mi ćemo se zbog toga držati definicije (9.39), imajući u vidu sledeću napomenu: kada je signal $x(t)$ definisan kao kauzalni signal vrednost $x(0)$ implicitno označava $x(0^+)$, dok u slučaju da primenjujemo Laplace-ovu transformaciju za izračunavanje odziva nekog sistema koji je u trenutku $t = 0$ imao u sebi akumuliranu energiju, što znači da je imao nenulte početne uslove, ili da je u pitanju Dirakov signal koji je definisan na specifičan način, ili signal $u(t)$ koji je u nuli i nije definisan, vrednost $x(0)$ implicitno treba podrazumevati kao $x(0^-)$.

Osobine dvostrane Laplace-ove transformacije koje smo izveli i naveli u dosadašnjem tekstu važe i za jednostranu Laplace-ovu transformaciju, uz par izuzetaka.

Najvažniji izuzetak jeste da ukoliko je $x(t)$ kauzalni signal i njemu odgovarajuća Laplace-ova transformacija $X(s)$, tada se jednostrana Laplace-ova transformacija signala $dx(t)/dt$ može sračunati, primenom parcijalne integracije, na sledeći način:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = sX(s) - x(0) \quad (9.42)$$

Primetimo da član $-x(0)$ nije postojao u relaciji (9.23). Slično tome se pokazuje da je Laplace-ova transformacija drugog izvoda kauzalnog signala $x(t)$ jednaka:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) \quad (9.43)$$

ili u opštem slučaju:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) \quad (9.44)$$

Druga važna razlika između unilateralne i bilateralne Laplace-ove transformacije jeste da ukoliko se funkcija prenosa sistema ili Laplace-ova transformacija napišu u formi zbira parcijalnih razlomaka, da bi se znalo o kom signalu je reč, BLT zahteva da se naznači oblast konvergencije, dok kod ULT to nije neophodno. Kako ULT operiše samo sa kauzalnim signalima i sistemima, jasno je da je oblast konvergencije oblika $\text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$. Ova činjenica ima za prednost i to da je pitanje stabilnosti sistema u svetlu unilateralne Laplace-ove transformacije mnogo jednostavnije. Naime, ako je oblast konvergencije takva da je σ_{\max} negativno, što znači da su svi polovi funkcije prenosa $H(s)$ sa negativnim realnim delom, tada je prava $s = j\omega$ obuhvaćena oblašću konvergencije, pa je samim tim sistem stabilan. U protivnom, ukoliko je σ_{\max} pozitivno, to znači da je neki od polova sa pozitivnim realnim delom, pa prava $s = j\omega$ nije obuhvaćena oblašću konvergencije i sistem je nestabilan.

Još je, kao značajnu razliku između bilateralne i unilateralne Laplace-ove transformacije, vredno napomenuti dve granične teoreme unilaterlane Laplace-ove transformacije:

Prva granična teorema:

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (9.45)$$

Druga granična teorema:

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (9.46)$$

Još je važno dati komentar da je druga granična teorema izvedena pod uslovom da imaginarna osa u s ravni pripada oblasti konvergencije signala $X(s)$. Drugim rečima, druga granična teorema se može primeniti samo pod uslovom da su svi polovi funkcije $X(s)$ sa negativnim realnim delom. U prvoj graničnoj teoremi oznaka $x(0)$ implicitno označava $x(0^+)$.

Primer 9.5: Ako posmatramo kauzalni signal $x_1(t) = 3e^{-2t}u(t)$, odgovarajuća jednostrana Laplace-ova transformacija glasi

$$X_1(s) = \frac{3}{s+2} \quad (9.47)$$

Primenom prve granične teorme dobićemo

$$x_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_1(s) = 3 \quad (9.48)$$

što je tačan rezultat. Sa druge strane, kako je jedini pol funkcije $X_1(s)$ u tački -2 koja ima negativni realni deo, možemo primeniti i drugu graničnu teoremu:

$$x_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = 0 \quad (9.49)$$

što je takođe tačan rezultat.

Međutim, ako posmatramo kauzalni signal $x_2(t) = 3e^{2t}u(t)$, odgovarajuća unilateralna Laplace-ova transformacija će biti

$$X_2(s) = \frac{3}{s-2} \quad (9.50)$$

i prva granična teorema će ponovo dati tačan rezultat

$$x_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_2(s) = 3 \quad (9.51)$$

dok bi nas primena druge granične teoreme dovela do pogrešnog zaključka:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX_2(s) = 0 \neq x_2(\infty) \quad (9.52)$$

jer funkcija $X_2(s)$ ima pol sa pozitivnim realnim delom.

Primer 9.6: Funkcija prenosa kauzalnog LTI sistema jednaka je

$$H(s) = \frac{s}{s^2 - 1} \quad (9.53)$$

Odredimo impulsni i odskočni odziv ovog sistema i ispitajmo njegovu stabilnost. Kako je rečeno da je u pitanju kauzalni sistem možemo da operišemo sa unilateralnom Laplace-ovom transformacijom, i zbog toga nije ni data oblast konvergencije. Uostalom, sami je možemo odrediti. Kako se polovi ovog sistema određuju iz uslova da je polinom u imeniocu jednak nuli, odnosno $s^2 = 1$, zaključujemo da su polovi $s_1 = 1$ i $s_2 = -1$ pa je oblast konvergencije

$$\text{Re}\{s\} > 1 \quad (9.54)$$

i kako je $\sigma_{\max} = 1 > 0$, zaključujemo da je sistem nestabilan. Dalje, impulsni odziv možemo sračunati ili primenom inverzne Laplace-ove transformacije na navedenu funkciju prenosa, ili ako $H(s)$ napišemo u formi zbira parcijalnih razlomaka možemo prepoznati odgovarajuće sabirke:

$$H(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{0.5}{s-1} + \frac{0.5}{s+1} \quad (9.55)$$

Prvi sabirak u poslednjoj relaciji odgovara signalu $0.5e^t u(t)$ a drugi signalu $0.5e^{-t} u(t)$, pa je impulsni odziv sistema

$$h(t) = 0.5(e^t + e^{-t})u(t) \quad (9.56)$$

Slično tome, možemo odrediti odskočni odziv sistema. Znajući da je Laplace-ova transformacija jedinične odskočne funkcije $U(s) = 1/s$, Laplace-ova transformacija odskočnog odziva biće:

$$S(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{0.5}{s-1} - \frac{0.5}{s+1} \quad (9.57)$$

pa će odskočni odziv biti

$$s(t) = 0.5(e^t - e^{-t})u(t) \quad (9.58)$$

Primena unilateralne Laplace-ove transformacije za nalaženje odziva linearnih sistema i rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Unilateralna Laplace-ova transformacija se bavi kauzalnim sistemima što je krajnje primereno impulsnom odzivu linearnog, stacionarnog, kauzalnog sistema, i nalaženje odziva takvog sistema za zadatu pobudu je vrlo jednostavno primenom Laplace-ove transformacije. Postupak je ilustrovan na sledećem primeru.

Primer 9.7: Funkcija prenosa kauzalnog LTI sistema je

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \zeta \in (0,1), \quad \omega_n > 0 \quad (9.59)$$

Odredimo odskočni odziv ovakvog sistema i na osnovu odziva za različite vrednosti parametara ζ i ω_n ispitajmo njihov uticaj na odziv. Polazeći od toga da je Laplace-ova transformacija pobude $U(s) = 1/s$, lako nalazimo Laplace-ovu transformaciju odziva:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (9.60)$$

Ako ovaj izraz napišemo u formi koja je zgodna za prepoznavanje tabličnih transformacija:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} \end{aligned} \quad (9.61)$$

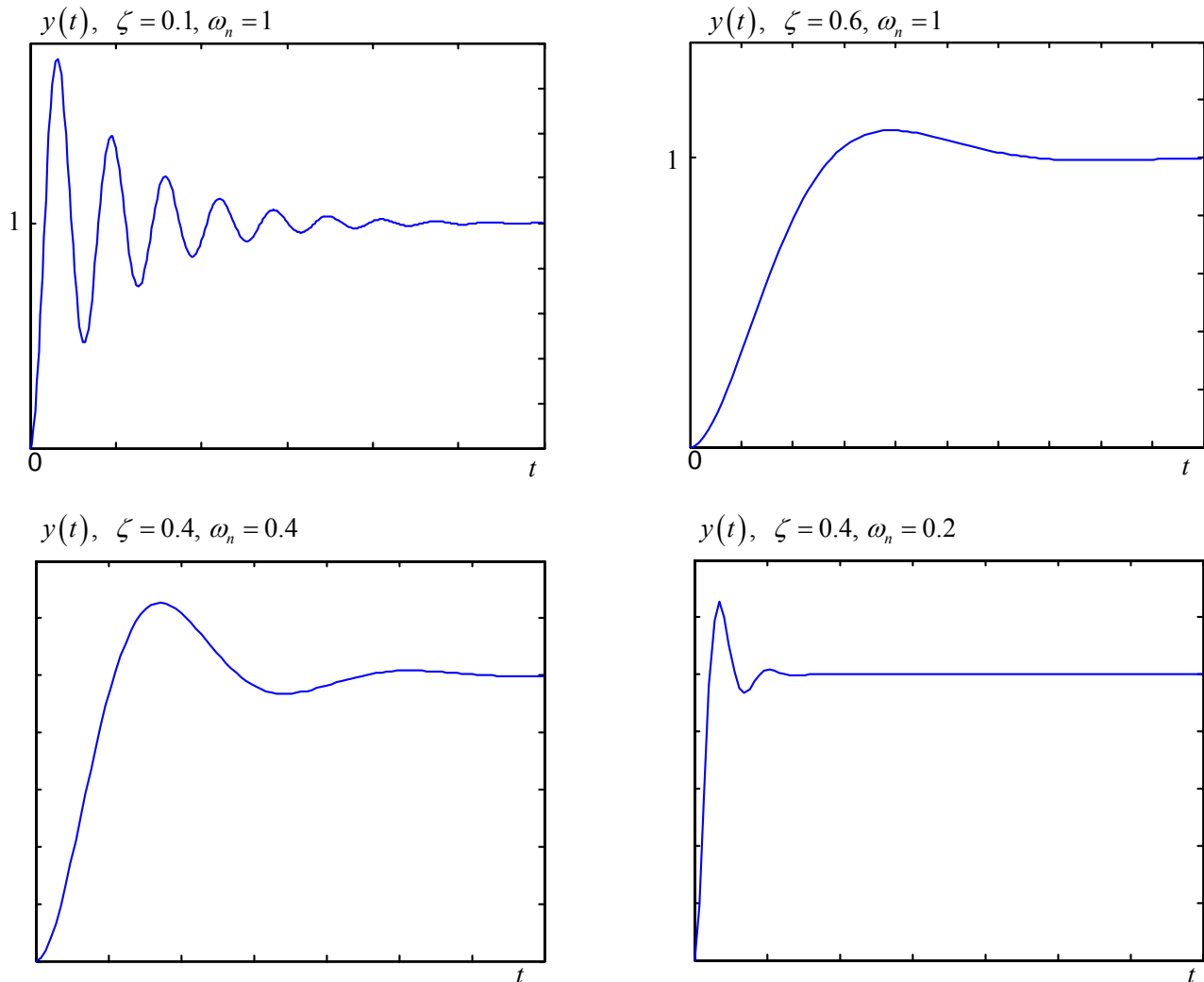
na osnovu čega se jednostavno, upoređivanjem tabličnih transformacija dolazi do izraza za odskočni odziv sistema:

$$y(t) = \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right] u(t) \quad (9.62)$$

Poslednji izraz nam govori kolike su granične vrednosti signala: $y(0)=0$ i $y(\infty)=1$ i pod pretpostavkom zadatka $\zeta \in (0,1)$, $\omega_n > 0$, jasno je da sistem ima prigušen periodičan odziv. Uticaj parametara ζ i ω_n se može ilustrovati kroz sledeće simulacije, prikazane na slici 9.9.

Ukoliko uporedimo odzive sistema u gornjem levom i gornjem desnom uglu slike 9.9, vidi se da je parametar $\omega_n = 1$ isti, ali se razlikuju parametri ζ . Ukoliko je parametar mali (gornja leva slika) prisutan je veliki preskok u odzivu sistema i prigušenje odziva je slabo, dok se sa većim parametrom ζ prigušuje odziv sistema i automatski je i preskok manji. Otuda se parametar ζ naziva *faktorom relativnog prigušenja sistema*. Sa druge strane ako se pogledaju odzivi u donjem

levom i donjem desnom uglu, na njima je faktor $\zeta = 0.4$ isti, dok se razlikuju parametri ω_n . Za veću vrednost ovog parametra (donji desni ugao) oscilacije u prigušenom odzivu su brže, njihova frekvencija je veća i zbog toga prelazni režim kraće traje, i obrnuto za manje vrednosti ovog parametra (donja leva slika) učestanost prigušenih oscilacija je kraća, sistem je sporiji i prelazni režim duže traje. U graničnom slučaju, kada bi faktor prigušenja ζ težio nuli, odziv sistema bi postao neprigušen, sistem bi zaoscilovao baš sa učestanošću ω_n i zbog toga se ovaj parametar naziva *neprigušena prirodna učestanost sistema*.



Slika 9.9: Odskočni odzivi sistema drugog reda za četiri različite vrednosti parametara ζ i ω_n

Već je pokazano da se diferenciranje u vremenskom domenu u kompleksnom (Laplace-ovom) domenu vidi kroz množenje kompleksnom promenljivom s a da se integraljenje signala u vremenskom domenu izražava kroz deljenje kompleksnom promenljivom s u kompleksnom domenu. Ove osobine nam omogućavaju da linearne diferencijalne jednačine ne rešavamo u vremenskom domenu, već u kompleksnom domenu kao algebarske jednačine. Ovaj postupak biće ilustrovan na sledećem primeru.

Primer 9.8: Data je linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \quad (9.63)$$

gde je $x(t)$ kauzalan signal

$$x(t) = (2 + e^{-5t})u(t) \quad (9.64)$$

Kako je zadata diferencijalna jednačina drugog reda, za njeno rešavanje su nam potrebna i dva početna uslova $y(0)$ i $y'(0)$. Ukoliko signali $y(t)$ i $y'(t)$ predstavljaju neke fizičke veličine u sistemu koji je opisan diferencijalnom jednačinom (9.63), uobičajeno je jednostranu Laplace-ovu transformaciju računati po relaciji (9.40) pa se otuda podrazumeva da je $y(0) = y(0^-)$ i $y'(0) = y'(0^-)$. Postupak rešavanja se sastoji u tome da se na jednačinu (9.63) primeni unilateralna Laplace-ova transformacija:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = sX(s) - x(0) + 3X(s) \quad (9.65)$$

što postaje algebarska jednačina po nepoznatoj funkciji $Y(s)$, koja se jednostavno rešava:

$$Y(s) = \frac{y(0)s + y'(0) - 4y(0) - x(0)}{s^2 - 4s + 3} + \frac{s + 3}{s^2 - 4s + 3} X(s) \quad (9.66)$$

Znajući da je

$$X(s) = 2 + \frac{1}{s + 5} = \frac{2s + 11}{s + 5}, \quad x(0) = 3 \quad (9.67)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{y(0)s + y'(0) - 4y(0) - 3}{s^2 - 4s + 3} + \frac{s + 3}{s^2 - 4s + 3} \frac{2s + 11}{s + 5} = \\ &= \frac{(y(0)s + y'(0) - 4y(0) - 3)(s + 5) + (s + 3)(2s + 11)}{(s^2 - 4s + 3)(s + 5)} \\ &= \frac{(y(0)s + y'(0) - 4y(0) - 3)(s + 5) + (s + 3)(2s + 11)}{(s - 1)(s - 3)(s + 5)} = \\ &= \frac{a}{s - 1} + \frac{b}{s - 3} + \frac{c}{s + 5} \end{aligned} \quad (9.68)$$

na osnovu čega zaključujemo da je rešenje diferencijalne jednačine

$$y(t) = (ae^t + be^{3t} + ce^{-5t})u(t) \quad (9.69)$$

gde su nepoznati koeficijenti:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1)Y(s) = -\frac{6(y'(0) - 3y(0) - 3) + 52}{12} \\ b &= \lim_{s \rightarrow 3} (s - 3)Y(s) = \frac{15(y'(0) - y(0) - 3) + 102}{16} \\ c &= \lim_{s \rightarrow -5} (s + 5)Y(s) = -\frac{2}{48} \end{aligned} \quad (9.70)$$

Još je potrebno dati komentar da smo u relaciji (9.67) podrazumevali $x(0) = x(0^+)$ jer je u pitanju kauzalni signal $x(t)$.