

Pitanje 28: Diskretna Fourier-ova transformacija

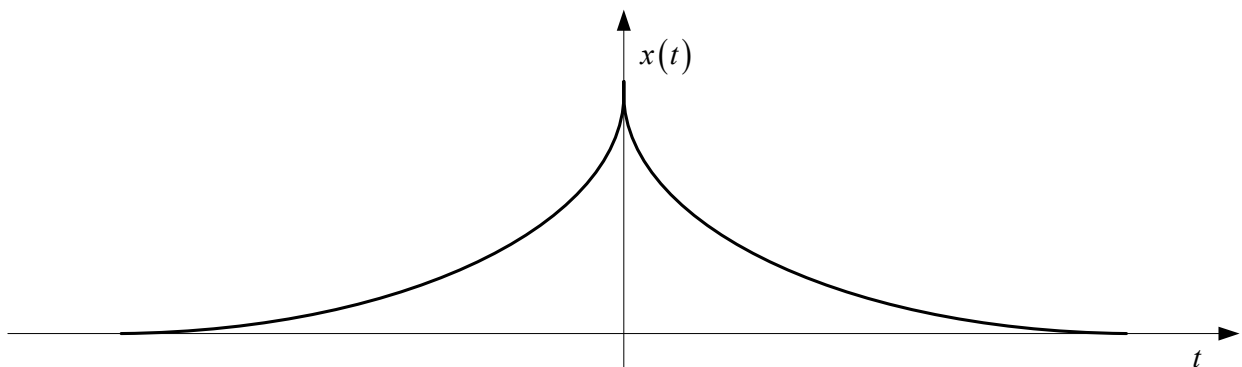
Videli smo u prethodnim predavanjima u kojoj meri je frekvencijska analiza signala korisna sa aspekta analize i filtracije signala. Pri tome je ključni rezultat sadržan u Fourier-ovoj transformaciji prilagođen isključivo kontinualnim signalima. Otuda se postavlja pitanje, da li je moguće sličnu ili odgovarajuću transformaciju razviti i za diskretne signale, i na taj način ovakvu transformaciju prilagoditi računarima koji su u stanju da operišu samo sa diskretnim nizom brojeva. Sa takvom namerom nastala je transformacija koja se naziva *Diskretna Fourier-ova Transformacija*, i koja se u literaturi često označava kao DFT. Ovu ćemo transformaciju izložiti u nekoliko koraka, polazeći od dobro poznate Fourier-ove transformacije koja je razvijena za kontinualne signale.

Dakle, pretpostavimo da nam je na raspolaganju jedan kontinualni signal $x(t)$ definisan za svako $t \in \mathbb{R}$, i da smo alatom koji nam je dobro poznat, dakle primenom analitičke relacije Fourier-ove transformacije, odredili njegov Fourier-ov transformacioni par $X(j\omega)$. Dalje pretpostavimo da je signal $x(t)$ realni signal, što nije neko veliko ograničenje, s obzirom da se u tehnici uglavnom i bavimo realnim signalima, te otuda znamo da će moduo funkcije $X(j\omega)$ biti parna funkcija učestanosti ω , a argument neparna funkcija:

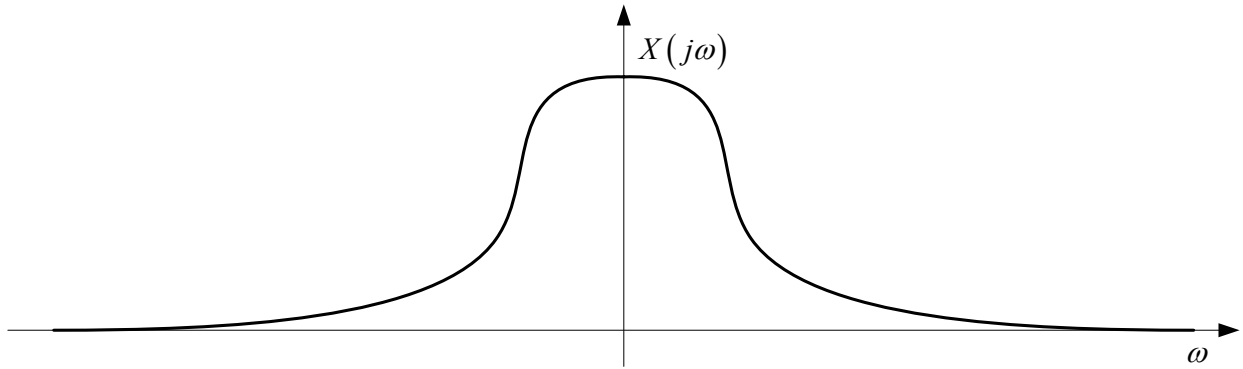
$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad (11.1)$$

$$\arg\{X(j\omega)\} = -\arg\{X(-j\omega)\} \quad (11.2)$$

Na slici 11.1 je prikazan kontinualni signal $x(t)$ a na slici 11.2 je prikazana njegova Fourier-ova transformacija. U opštem slučaju bi slika 11.2 trebalo da sadrži dva grafika (i amplitudu i fazu Fourier-ove transformacije), međutim pošto smo po slici 11.1 pretpostavili da je signal $x(t)$ paran, njegova fazna karakteristika je konstantna i jednaka nuli, pa je i ne crtamo. Sa druge strane, ova činjenica nije bitna sa stanovišta transformacije koju želimo da izvedemo, pa će dobijeni rezultat važiti i za signale proizvoljne fazne karakteristike.



Slika 11.1: Realni kontinualni signal



Slika 11.2: Spektar signala $x(t)$

U želji da dobijene rezultate prilagodimo računarskoj obradi signala, neophodno je signal $x(t)$ diskretizovati, sa pogodno izabranom periodom diskretizacije (odabiranja) T . Kako je već objašnjeno u prethodnim predavanjima, model diskretizacije je najjednostavnije sprovesti tako što ćemo originalni signal $x(t)$ pomnožiti se beskonačnom, periodičnom povorkom Dirakovih impulsa koji su ekvidistantni sa periodom ponavljanja T . Ako sa $p(t)$ označimo ovu povorku odbiraka, $P(j\omega)$ će biti odgovarajuća Fourier-ova transformacije, pri čemu je:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (11.3)$$

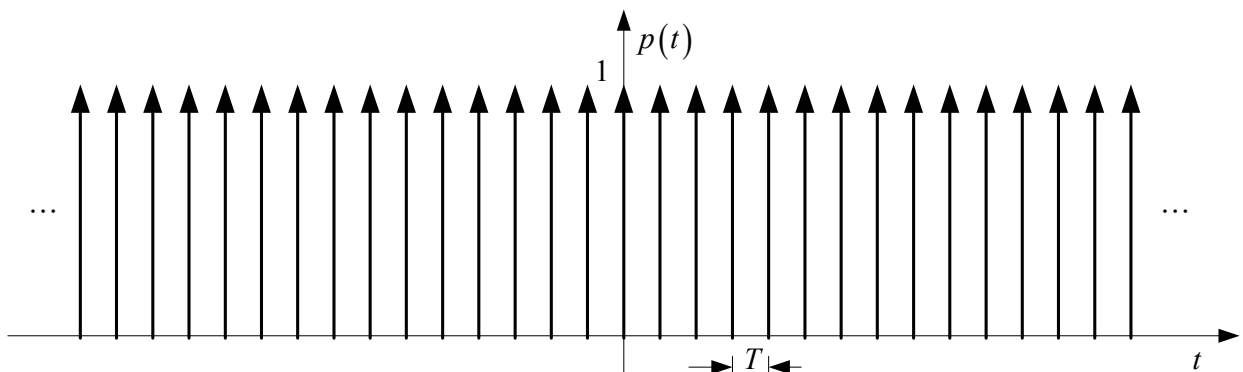
U pitanju je periodičan signal, pa se može predstaviti Fourier-ovim redom:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \quad (11.4)$$

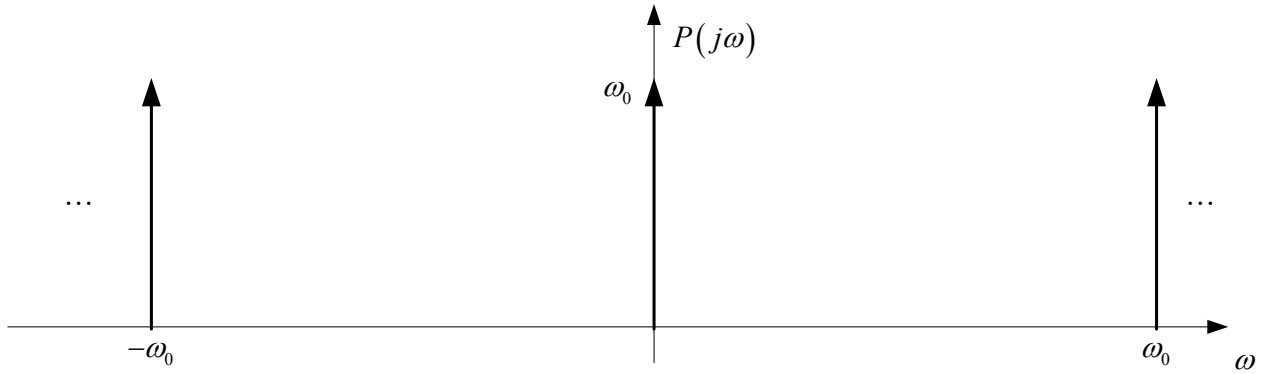
Otuda je Fourier-ova transformacija ovog periodičnog signala:

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (11.5)$$

Oblik povorke impulsa $p(t)$ i odgovarajućeg spektra $P(j\omega)$ su prikazani na slici 11.3 i 11.4.



Slika 11.3: Periodična povorka Dirakovih impulsa



Slika 11.4: Spektar periodične povorke Dirakovih impulsa

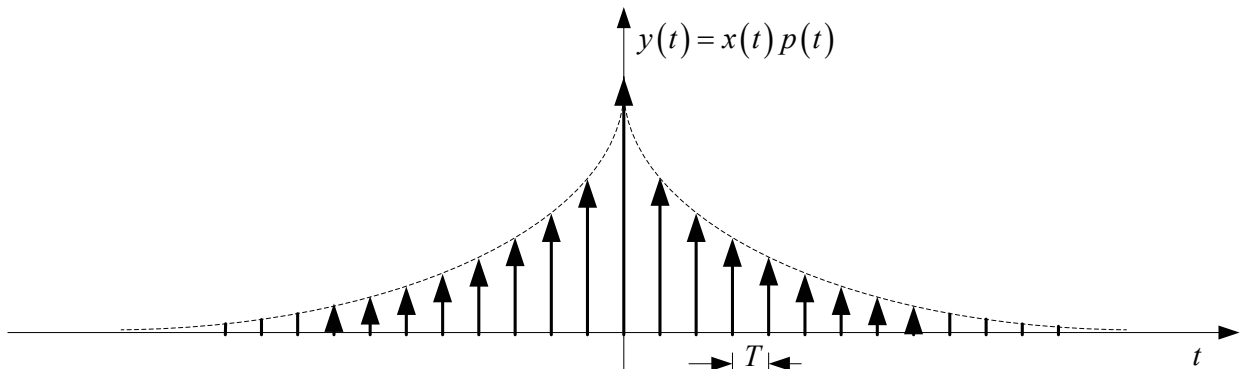
Kao rezultat odabiranja dobili smo signal $y(t)$:

$$y(t) = x(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \quad (11.6)$$

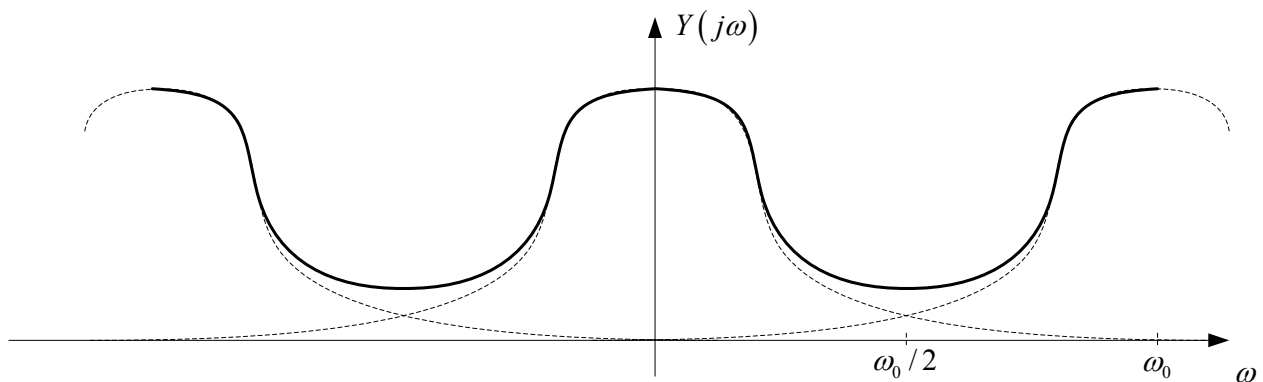
Spektar signala $y(t)$ je moguće odrediti na osnovu osobine Fourier-ove transformacije koja kaže da ako se dva signala množe u vremenskom domenu, tada njihovi transformacioni parovi ulaze u konvoluciju:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) \delta(\omega - k\omega_0 - \lambda) d\lambda = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_0)) \end{aligned} \quad (11.7)$$

Time takođe dobijamo poznati rezultat koji smo nazvali *aliasing* efektom, da nakon odabiranja signala u vremenskom domenu, kao posledicu dobijamo periodično ponavljanje spektra, sa perioddom ponavljanja $\omega_0 = 2\pi/T$. Signal $y(t)$ i njegov spektar $Y(j\omega)$ su prikazani na slikama 11.5 i 11.6.



Slika 11.5: Signal $y(t)$ dobijen nakon odabiranja signala $x(t)$

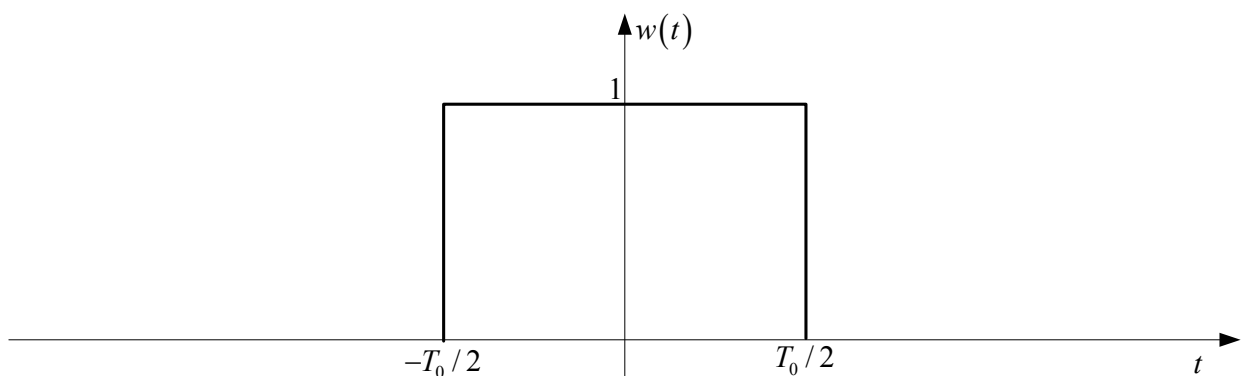


Slika 11.6: Spektar signala $y(t)$

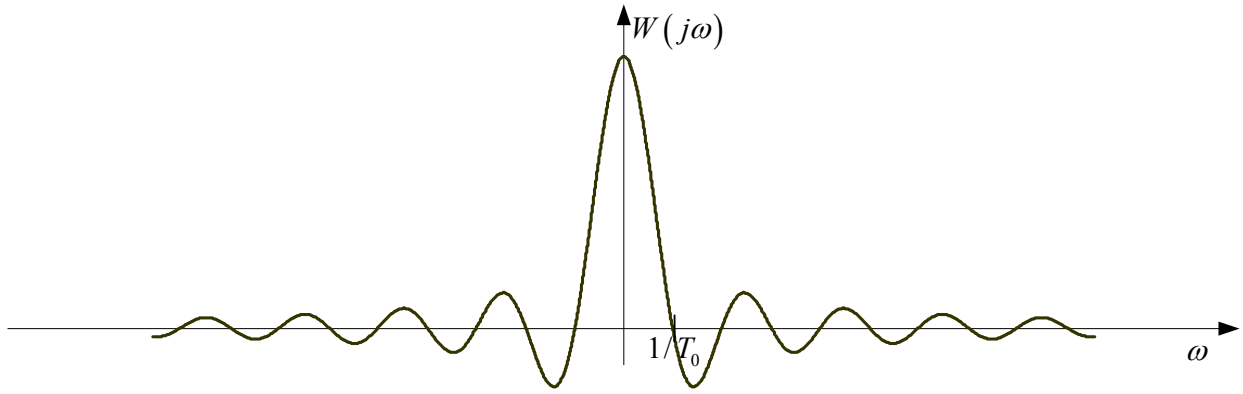
Naš cilj da prilagodimo Fourier-ovu transformaciju računarskoj obradi je samo delimično završen. Sada signal $y(t)$ predstavlja povorku odbiraka, i s obzirom da on ima vrednosti različite od nule samo u trenucima koji su celi umnošci periode odabiranja T , njega je lako memorisati u računaru. Međutim, problem je taj da ovih odbiraka ima beskonačno mnogo, što znači da nam je potrebna beskonačno velika računarska memorija. Taj problem se rešava tako što ćemo zadržati samo N odbiraka signala $y(t)$. Najjednostavniji način da modeliramo ovaj postupak jeste da signal $y(t)$ pomnožimo signalom $w(t)$ koji se u literaturi naziva *pravougaonom prozorskom funkcijom*. Ovaj signal je prikazan na slici 11.7. Širina pravougaonog prozora je jednaka $T_o = NT$ tako da se zaista od beskonačno mnogo odbiraka signala y čuva samo njih N . Potrebno je odrediti i spektar signala $w(t)$:

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{2 \sin(\omega T_0 / 2)}{\omega} = T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) \quad (11.8)$$

Spektar prozorske funkcije $w(t)$ prikazan je na slici 11.8.



Slika 11.7: Pravougaona prozorska funkcija $w(t)$



Slika 11.8: Spektar pravougaone prozorske funkcije dužine T_0

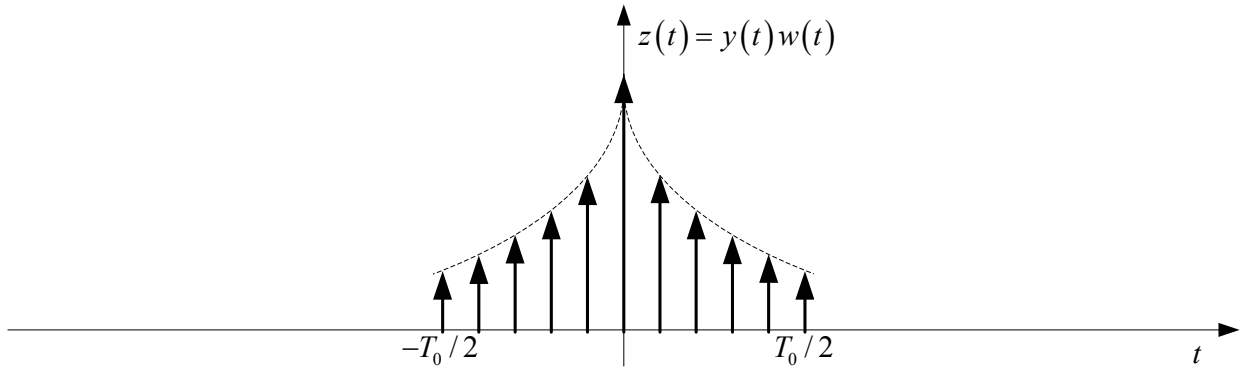
Sada se kao rezultat primene prozorske funkcije, umesto signala $y(t)$ dobio signal $z(t)$:

$$z(t) = y(t)w(t) \quad (11.9)$$

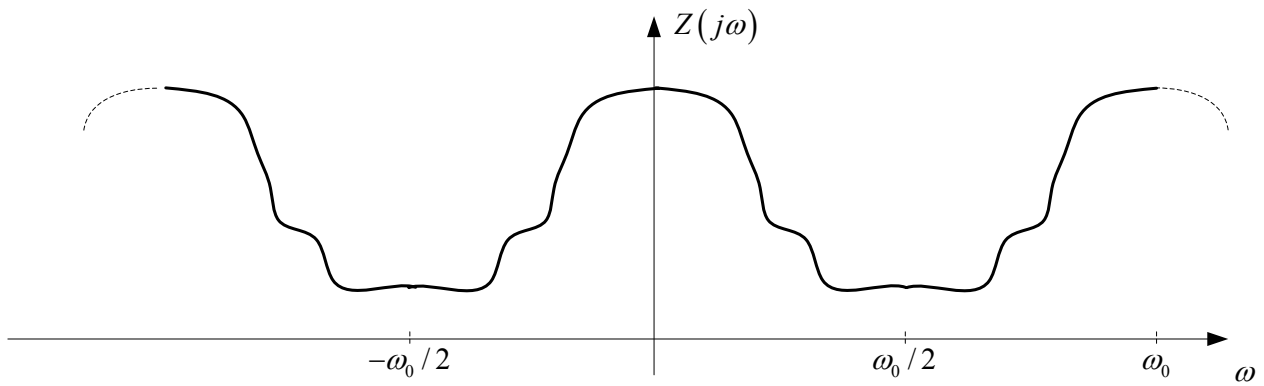
koji ima dve dobre osobine: može se upamtiti kao povorka odbiraka i tih odbiraka ima konačno mnogo. Sa druge strane, spektar signala $z(t)$ se sada dobija kao konvolucija spektara signala $y(t)$ i $w(t)$:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\lambda) T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \lambda)T_0}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\lambda - k\omega_0)) T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \lambda)T_0}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\lambda - k\omega_0)) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \lambda)T_0}{2}\right) d\lambda \end{aligned} \quad (11.10)$$

Poslednji izraz nije jednostavno sračunati za proizvoljnu funkciju $X(j\omega)$, međutim, možemo dati sledeće tumačenje. Funkcija $\operatorname{sinc}(\omega T_0 / 2)$ sa povećanjem parametra T_0 odnosno sa povećanjem $N = T_0 / T$, sve više i više liči na Dirakov impuls. Dakle, u graničnom slučaju kada bi $T_0 \rightarrow \infty$, spektar signala $z(t)$ bi bio identičan spektru signala $y(t)$, međutim, zbog konačnog parametra N , funkcija $\operatorname{sinc}(\omega T_0 / 2)$ ima 'repove' zbog kojih će spektar $Z(j\omega)$ da liči na spektar $Y(j\omega)$ ali će se primetiti mala razlika u obliku talasanja. Ova talasanja se u literaturi nazivaju '*rippling*' i treba zapamtiti da je njihov efekat utoliko manji ukoliko je prozorska funkcija šira. Oblik signala $z(t)$ i njegovog spektra dat je na slikama 11.9 i 11.10.



Slika 11.9: Signal $z(t)$ nakon primene prozorske funkcije



Slika 11.10: Spektar signala $z(t)$ sa pojavom *rippling*-a

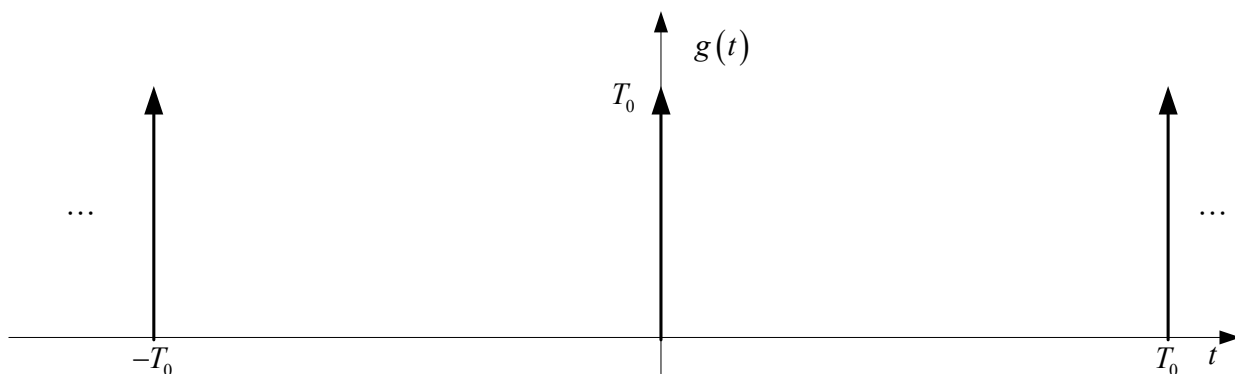
Time smo obezbedili da signal $z(t)$ u vremenskom domenu bude potpuno prilagođen primeni računara, međutim, ne zaboravimo da je spektar signala $Z(j\omega)$ još uvek kontinualna funkcija učestanosti. U želji da i ovu funkciju učinimo diskretnom, možemo je pomnožiti, u frekvencijskom domenu sa periodičnom povorkom Dirakovih impulsa. Pri tome, opšte prihvaćena ideja je da ukoliko imamo N odbiraka signala u vremenskom domenu, da sačuvamo i N odbiraka spektra u frekvencijskom domenu. Zbog toga ova povorka impulsa u diskretnom domenu treba da bude na ekvidistantnom frekvencijskom odstojanju od $\omega_0 / N = 2\pi / (TN) = 2\pi / T_0$. Zato uvedimo signal $g(t)$, čiji je spektar dat sledećom relacijom:

$$G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 / N) \quad (11.11)$$

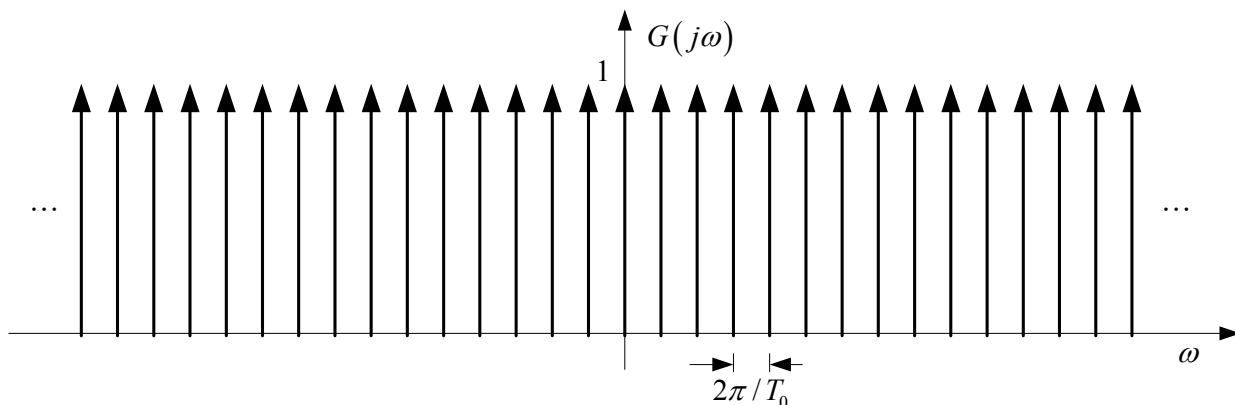
Primenom inverzne Fourier-ove transformacije, ili još lakše po analogiji sa signalom $p(t)$ i njegovim spektrom $P(j\omega)$, lako dolazimo do zaključka da će i signal $g(t)$ biti periodična povorka Dirakovih impulsa sa periodom ponavljanja $2\pi / (\omega_0 / N) = NT = T_0$:

$$g(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (11.12)$$

Vremenski oblik signala $g(t)$ i njegovog spektra dati su na slikama 11.11 i 11.12.



Slika 11.11: Vremenski oblik signala $g(t)$



Slika 11.12: Spektar signala $g(t)$

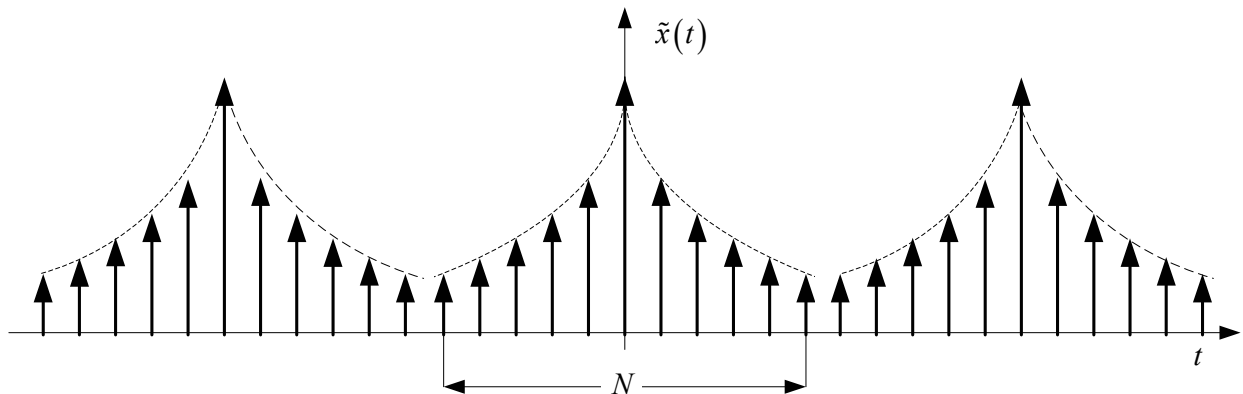
Množenjem signala $G(j\omega)$ i $Z(j\omega)$ u frekvencijskom domenu, jasno je kakav će biti spektar novodobijenog signala $\tilde{x}(t)$, $\tilde{X}(j\omega)$:

$$\tilde{X}(j\omega) = \begin{cases} Z(j\omega); & \omega = k\omega_0 / N \\ 0; & \text{inače} \end{cases} = Z(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 / N) \quad (11.13)$$

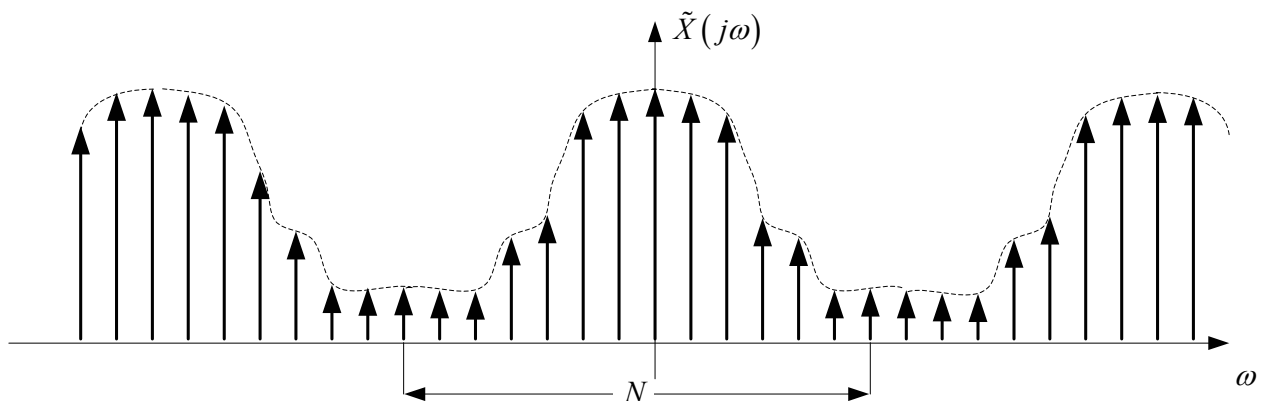
Međutim, zanimljivo je šta se dobija u vremenskom domenu nakon množenja signala u frekvencijskom domenu, drugim rečima zanima nas oblik novodobijenog signala $\tilde{x}(t)$. Poznato nam je da, ukoliko se signali množe u frekvencijskom domenu, da u vremenskom domenu oni ulaze u konvoluciju. Drugim rečima signal $\tilde{x}(t)$ se može napisati kao konvolucija signala $z(t)$ i $g(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= z(t) * g(t) = z(t) * T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t) * \delta(t - kT_0) \\ &= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t - kT_0) \end{aligned} \quad (11.14)$$

što znači da će signal $\tilde{x}(t)$ postati periodičan sa periodom ponavljanja T_0 , pri čemu će u osnovnom vremenskom području $t \in [-T_0/2, T_0/2]$ vrednost signala $z(t)$ i $\tilde{x}(t)$ biti identični, ako se izuzme multiplikativna konstanta T_0 . Signal $\tilde{x}(t)$ i njegov spektar $\tilde{X}(j\omega)$ su prikazani na slikama 11.13 i 11.14.



Slika 11.13: Vremenski oblik signala $\tilde{x}(t)$



Slika 11.14: Spektar signala $\tilde{x}(t)$

Transformacioni par $\tilde{x}(t)$ i $\tilde{X}(j\omega)$ je u potpunosti prihvatljiv sa stanovišta računarske obrade jer su i signal u vremenu i njegov frekvencijski spektar predstavljeni kao povorka odbiraka, dakle po svojoj prirodi su diskretni, a sa druge strane takvih odbiraka ima konačno, u našem slučaju N . Ovako dobijeni transformacioni par definiše *diskretnu Fourier-ovu transformaciju* (u literaturi označavanu kao DFT). Osnovne osobine diskretne Fourier-ove transformacije su navedene kroz sledeće stavove:

1. Dobijeni signal $\tilde{x}(t)$ u sebi sadrži N odbiraka signala $x(t)$ i pri tome je periodičan sa periodom N . Dakle, ako želimo da nad nekim kontinualnim signalom primenimo diskretnu Fourier-ovu transformaciju, potrebno je da izvršimo odabiranje u ekvidistantnim vremenskim trenucima sa periodom odabiranja T , i da na taj način formiramo diskretnu sekvencu, koju ćemo da označimo sa

$$x[kT], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.15)$$

Često se umesto oznake $x[kT]$ koristi oznaka $x[k]$ podrazumevajući da je argument vremenske funkcije vremenski trenutak jednak celom multiplu periode odabiranja T .

2. Diskretna Fourier-ova transformacija primenjena na sekvenci $x[kT]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ će nam kao rezultat generisati N odbiraka spektra signala $\tilde{X}(k\omega_0/N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, koje ćemo ubuduće, zbog njihove diskretne prirode označavati kao

$$X[k\Delta\omega j], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad \Delta\omega = \omega_0 / N \quad (11.16)$$

I u ovom slučaju se često umesto oznake $X[k\Delta\omega j]$ koristi oznaka $X[k]$, podrazumevajući da je argument spektra ceo multipl učestanosti $\Delta\omega = \omega_0 / N$.

3. Na osnovu opisanog postupka kojim smo došli do transformacionog para koji definiše diskretnu Fourier-ovu transformaciju, moguće je uspostaviti vezu između frekvencijskih odbiraka (11.16) i odbiraka signala (11.15):

$$X[n\Delta\omega j] = \sum_{k=0}^{N-1} x[kT] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.17)$$

Relacija (11.17) definiše takozvanu analitičku relaciju diskretne Fourier-ove transformacije

4. Sintetička relacija diskretne Fourier-ove transformacije nam daje postupak kojim se na osnovu odbiraka spektra može rekonstruisati n odbiraka signala u vremenskom domenu:

$$x[kT] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n\Delta\omega j] e^{j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.18)$$

5. Bez obzira što smo u izvođenju diskretne Fourier-ove transformacije krenuli od kontinualnog signala $x(t)$, DFT podrazumeva da nam je na raspolaganju samo N odbiraka početnog kontinualnog signala, i nadalje se podrazumeva da se ovi odbirci periodično ponavljaju, i samim tim sintetička relacija (11.18) ne može da rekonstruiše iz signala ništa drugo od tih početnih N odbiraka.

6. Analitička relacija (11.17) može da generiše samo N odbiraka spektra signala i pri tome će se oni razlikovati od odbiraka početnog spektra $X(j\omega)$ usled uticaja *aliasing* efekta i *rippling-a*. Pri tome, s obzirom da je spektar realnog signala takav da mu je amplituda parna a faza neparna funkcija učestanosti, od dobijenih N odbiraka, dovoljno je uzeti u obzir samo polovinu njih.

Ove osobine diskretne Fourier-ove transformacije ćemo ilustrovati na sledećem primeru.

Primer 11.1: Posmatrajmo periodični kontinualni signal

$$x(t) = \cos(2t) + 3\cos(5t) \quad (11.19)$$

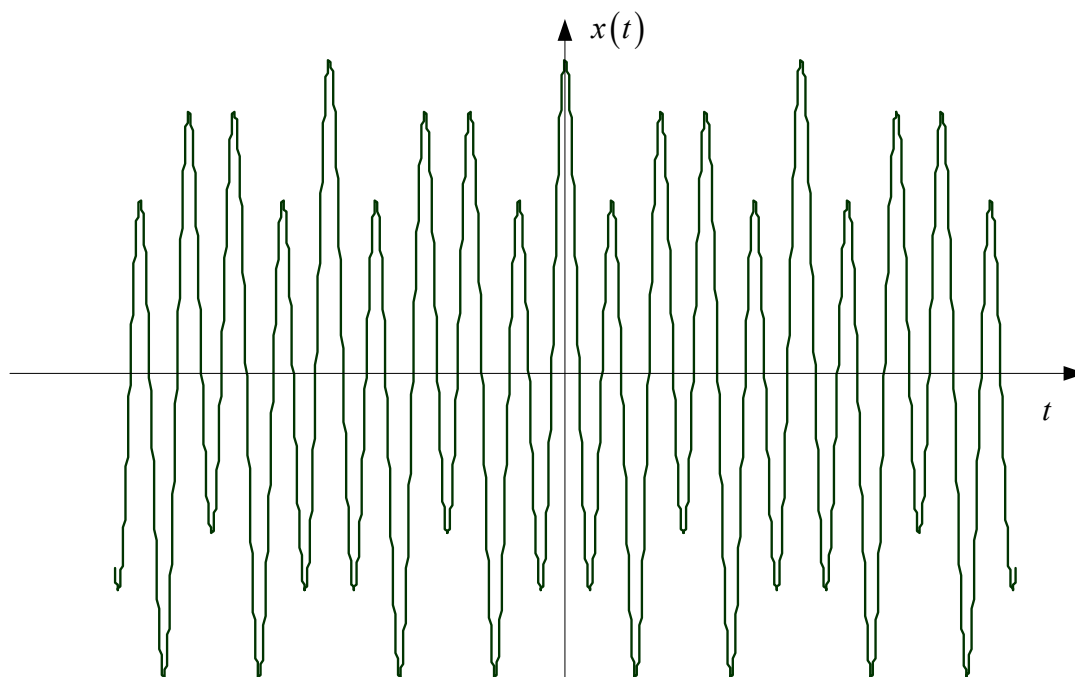
koji je definisan u vremenu za $t \in (-\infty, \infty)$. Teorijski gledano, kako se signal $x(t)$ može napisati u formi

$$x(t) = \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2} + 3 \frac{e^{5jt} + e^{-5jt}}{2} = \frac{3}{2} e^{-5jt} + \frac{1}{2} e^{-2jt} + \frac{1}{2} e^{2jt} + \frac{3}{2} e^{5jt} \quad (11.20)$$

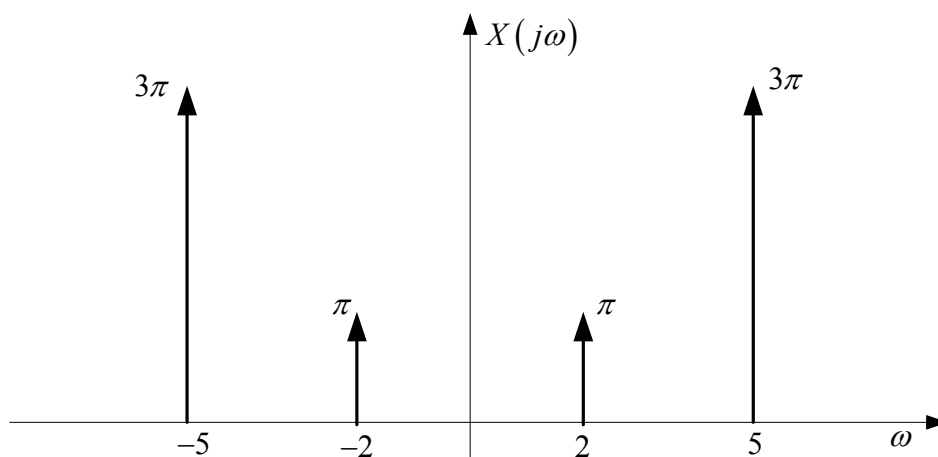
spektar ovog signala je, na osnovu relacija (7.20) i (7.21), jednak

$$X(j\omega) = 3\pi\delta(\omega + 5) + \pi\delta(\omega + 2) + \pi\delta(\omega - 2) + 3\pi\delta(\omega - 5) \quad (11.21)$$

što je i očekivan rezultat, jer je spektar periodičnih signala uvek jednak povorci Dirakovih impulsa u frekvencijskom domenu. Na slikama 11.15 i 11.16. su prikazani vremenski i spektralni oblik signala $x(t)$.



Slika 11.15: Vremenski oblik signala $x(t)$



Slika 11.16: Spektar signala $x(t)$

Naravno, prikazani grafici su nastali na osnovu analitičkog izračunavanja spektra, međutim, najčešće mi raspoložemo samo odbircima signala, i to sa konačnim brojem njih, pa nam je želja da i spektar signala sračunamo pomoću računara, dakle primenom diskretne Fourier-ove transformacije. Otuda je, kao prvi korak, neophodno izvršiti odabiranje konačnog broja odbiraka signala $x(t)$. Važno je, takođe, pravilno izabrati periodu odabiranja i ona mora biti u saglasnosti sa teoremom o odabiranju. Kako je maksimalna učestanost u signalu 5rad/s , učestanost odabiranja ω_0 mora biti bar 2 puta veća od nje. Usvojimo da je učestanost odabiranja $\omega_0 = 20\text{rad/s}$ pa je samim tim perioda odabiranja $T = 2\pi / \omega_0 = \pi / 10 = 0.314\text{s}$. Takođe, treba se opredeliti za broj odbiraka N . Ukoliko

usvojimo $N=150$, mi raspoložemo sa N odbiraka signala koji su prikazani na slici 11.17, pri čemu smo od kontinualnog signala dobili diskretni sa vrednostima odbiraka:

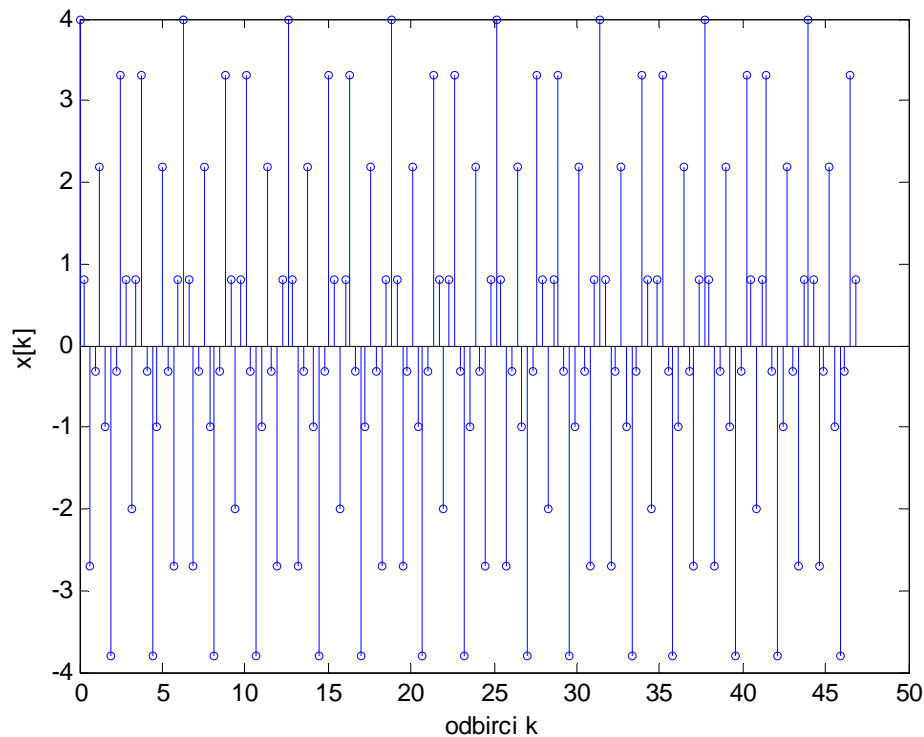
$$x[k] = x(kT) = \sin(2kT) + 3\sin(5kT), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.22)$$

Primena diskretne Fourier-ove transformacije je vrlo jednostavna primenom programskog paketa MATLAB. Sledeći kod ilustruje formiranje povorke odbiraka, izračunavanje diskretne Fourier-ove transformacijom nad povorkom odbiraka i prikaz signala $x[k]$ i odgovarajućeg spektra $X[k\Delta\omega]$:

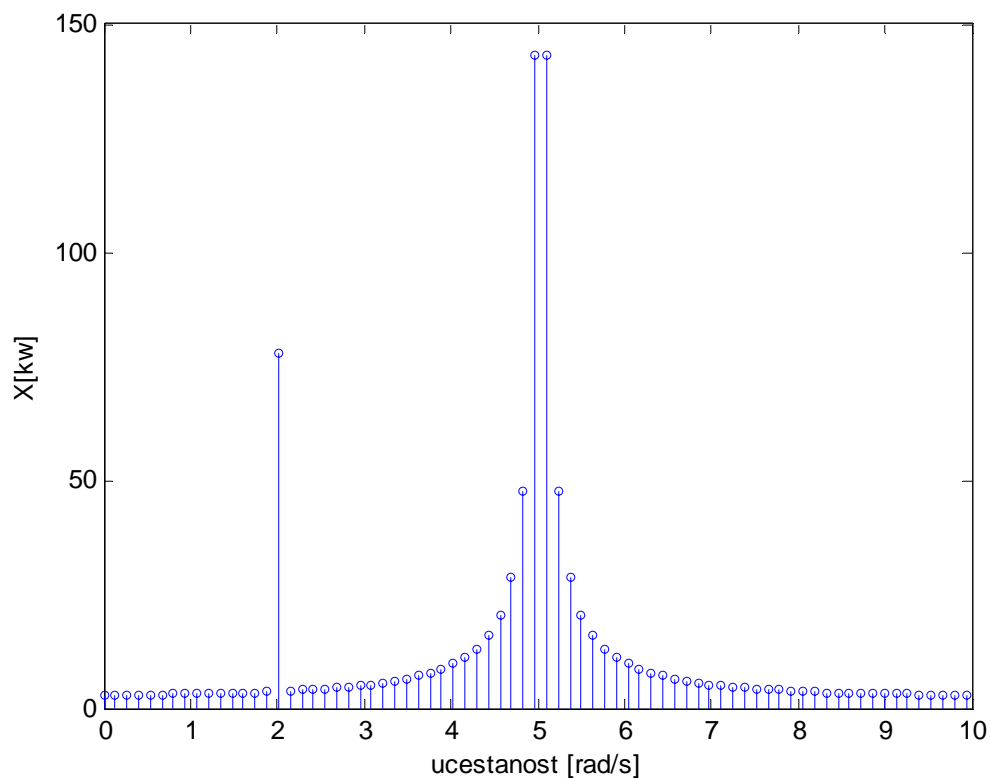
```
close all;
clear all;
N=150;
Ts=pi/10;
for i=1:N
    x(i)=cos(2*(i-1)*Ts)+3*cos(5*(i-1)*Ts);
end

figure(1);stem(0:Ts:(N-1)*Ts,x);
xlabel('odbirci k');
ylabel('x[k]');

X=fft(x,N);
figure(2);stem([0:2*pi/(Ts*(N-1)):pi/Ts],abs(X(1:N/2)));
xlabel('ucestanost [rad/s]');
ylabel('X[kw]');
```



Slika 11.17: Odbirci signala $x(t)$



Slika 11.18: Spektar signala dobijen primenom naredbe `fft`

Iako je za očekivati bilo da se u spektru dobiju dva Dirakova impulsa na učestanostima 2rad/sec i 5rad/sec, zbog efekta *rippling-a* ili takozvanog curenja spektra, umesto impulsa dobijena je 'razlivena' slika oko centralnih učestanosti 2 i 5. Još je važno reći da naredba kojom se realizuje diskretna Fourier-ova transformacija u matlabu glasi `fft` od skraćenice *Fast Fourier Transform* i da ona ima dva argumenta, pri čemu je prvi povorka odbiraka signala a drugi označava dužinu povorke. Konačno, treba reći i to da intenziteti odbiraka u spektru ne označavaju pravu vrednost amplituda pojedinih prostoperiodičnih komponenti već su proporcionalni broju odbiraka nad kojim se diskretna Fourier-ova transformacija računa. Studentima se preporučuje da ponove navedenu proceduru u Matlabu, koristeći različite periodične ili neperiodične rezultate, različite vrednosti broja odbiraka i perioda odabiranja, i da prokomentarišu dobijene rezultate.