

## 3 Interpolacija

### 3.1 Lagrangeov interpolacioni polinom

LAGRANGEov interpolacioni polinom  $P_n(x)$  sa  $(n + 1)$  čvorova je oblika:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} y_k \quad (1)$$

pri čemu je  $y_k = f(x_k)$

Greška interpolacije funkcije  $f(x)$  LAGRANGEovim interpolacionim polinomom  $P_n(x)$  data je sa:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|,$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Možemo da uvedemo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1}(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \\ \Pi'_{n+1}(x_k) &= (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \\ D_k &= (x - x_k) \Pi'_{n+1}(x_k) \end{aligned}$$

Konstuišemo sledeću šemu:

$$\begin{array}{cccc|c} (x - x_0) & (x_0 - x_1) & \dots & (x_0 - x_n) & D_0 \\ (x_1 - x_0) & (x - x_1) & \dots & (x_1 - x_n) & D_1 \\ & \dots & & & \vdots \\ (x_n - x_0) & (x_n - x_1) & \dots & (x - x_n) & D_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline \Pi_{n+1}(x) - \text{proizvod elem. na dijagonali} \end{array}$$

Koristeći gornje oznake sada je LAGRANGEov polinom dat na sledeći način:

$$P_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{D_k}. \quad (2)$$

**1.** Konstruisati interpolacioni polinom  $P_2(x)$  za funkciju  $f(x) = \sqrt{x}$  ako su čvorovi interpolacije  $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$ . Izračunati  $P_2(115)$  i oceniti grešku  $|\sqrt{115} - P_2(115)|$ .

**Rešenje:** Funkcija  $f(x) = \sqrt{x}$  je data u čvorovima  $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$  sledećom tabelom:

$x$	100	121	144
$f(x)$	10	11	12

LAGRANGEov interpolacioni polinom za funkciju  $f(x) = \sqrt{x}$  je oblika:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 + \\ &\quad + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12 \\ &= -\frac{2}{21252}x^2 + \frac{1454}{21252}x + \frac{87120}{21252} \\ &= 10.722755 \\ P_2(115) &= 10.722755. \end{aligned}$$

Odgovarajući izvodi funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$  su:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}$$

Maksimum apsolutne vrednosti trećeg izvoda funkcije je

$$M_3 = \max_{[100,144]} |f'''(x)| = \frac{3}{8 \cdot 100^{5/2}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$$

Greška interpolacije u tački 115 je:

$$|R_2(115)| \leq \frac{3/8 \cdot 10^{-5}}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| \leq 1.63 \cdot 10^{-3}$$

Uzimajući u obzir postignutu tačnost,

$$\begin{aligned} P_2(115) &= 10.723 \\ \sqrt{115} &= 10.723805\dots \end{aligned}$$

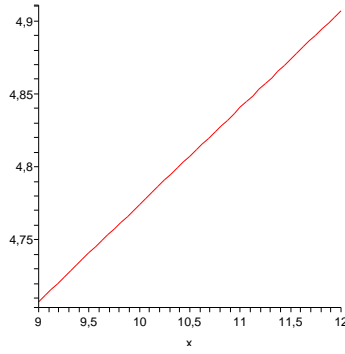
MAPLE:

```
> restart;
> points1 := [[100,10],[121,11],[144,12]]:
> polycurve := CurveFitting[PolynomialInterpolation](points1, x, form=Lagrange);
                    5                      11
polycurve := ---- (x - 121) (x - 144) - ---- (x - 100) (x - 144)
                    462                      483

                    3
+ ---- (x - 100) (x - 121)
                    253

> plot(polycurve, x=9..12);

> CurveFitting[evalf](PolynomialInterpolation)(points, 115, form=Lagrange);
                    10.72275551
> evalf(sqrt(115));
                    10.72380529
```



Slika 1: Izlaz funkcije plot u MAPLE-u.

### 3.2 Newtonov interpolacioni polinom

Neka je funkcija  $f(x)$  zadana čvorovima interpolacije  $(x_k, y_k)$ , pri čemu je  $y_k = f(x_k)$ . Definišemo konačne razlike prvog reda:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad (3)$$

Konačne razlike višeg reda definišemo rekursivno:

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \quad (4)$$

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k) \quad (5)$$

Neka su pri tom čvorovi ekvidistantni, tj.  $x_{k+1} - x_k = h$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ .

I NEWTONov interpolacioni polinom (za interpolaciju unapred) je oblika:

$$N_n^I(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u-1)\dots(u-n+1),$$

pri čemu je  $u = \frac{x-x_0}{h}$ . Greška interpolacije funkcije  $f(x)$  I NEWTONovim interpolacionim polinomom  $N_I(x)$  data je sa:

$$R_n^I \leq \frac{|\Delta^{n+1}y|}{(n+1)!}|u(u-1)\dots(u-n)|.$$

Za  $\Delta^{n+1}y$  se uzima maksimalna vrednost po svim apsolutnim vrednostima konačne razlike  $n+1$ -og reda u odgovarajućim čvorovima,  $\max_k |\Delta^{n+1}y_k|$ .

II NEWTONov interpolacioni polinom (za interpolaciju unazad) je oblika:

$$N_n^{II}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}v(v+1)\dots(v+n-1),$$

pri čemu je  $v = \frac{x-x_n}{h}$ .

Greška interpolacije funkcije  $f(x)$  II NEWTONovim interpolacionim polinomom  $N_{II}(x)$  data je sa:

$$R_n^{II} \leq \frac{|\Delta^{n+1}y|}{(n+1)!}|v(v+1)\dots(v+n)|$$

Ekstrapolacija se vrši kad tražimo procenu vrednosti funkcije  $f(x)$  u tački  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} < x_0$  ili  $\bar{x} > x_n$ . Ove procene greške ne važe za ekstrapolaciju. Greška ekstrapolacije je veća od greške interpolacije.

I NEWTONov interpolacioni polinom je pogodan za interpolaciju čvorova koji se nalaze u prvoj polovini intervala  $[x_0, x_n]$  i za ekstrapolaciju tačaka  $\bar{x} < x_0$ . II NEWTONov interpolacioni polinom je pogodan za interpolaciju čvorova koji se nalaze u drugoj polovini intervala  $[x_0, x_n]$  i za ekstrapolaciju tačaka  $\bar{x} > x_n$ .

2. Tablicom je zadana funkcija  $f(x)$  :

$x$	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$f(x)$	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

Koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, izračunati  $f(18)$ ,  $f(53)$ ,  $f(12)$ .

**Rešenje:** Popunimo tablicu vrednostima konačnih razlika koje računamo iz odgovarajućih formula (4) i (5).

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
15	0.2588	0.0832	-0.0026	-0.0006	0
20	0.3420	0.0806	-0.0032	-0.0006	0
25	0.4226	0.0774	-0.0038	-0.0006	0.0001
30	0.5000	0.0736	-0.0044	-0.0005	0
35	0.5736	0.0692	-0.0049	-0.0005	0.0002
40	0.6428	0.0643	-0.0054	-0.0003	
45	0.7071	0.0589	-0.0057		
50	0.7660	0.0532			
55	0.8192				

Za izračunavanje vrednosti  $f(18)$  koristimo I NEWTONov interpolacioni polinom pošto se tačka 18 nalazi u prvoj polovini intervala  $[15, 55]$ .

$$N_3^I(x) = 0.2588 + 0.0832u - 0.0026 \frac{u(u-1)}{2} - 0.0006 \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \quad (6)$$

pri čemu je  $u = \frac{x-x_0}{h}$ ,  $h = 5$ ,  $x_0 = 15$ ,  $x = 18$ , pa je  $u = \frac{18-15}{5} = 0.6$ .

Dakle, približna vrednost funkcije  $f(x)$  u tački 18 je

$$f(18) \approx N_3^I(18) = 0.3090.$$

Greška je procenjena sledećim izrazom:

$$R_3^I \leq \frac{|\Delta^4 y|}{4!} |u(u-1)(u-2)(u-3)| = \frac{0.0002}{24} 0.6 \cdot 0.4 \cdot 1.4 \cdot 2.4 = 6.7 \cdot 10^{-6}$$

MAPLE:

```
> points :=
  [[15,0.2588],[20,0.3420],[25,0.4226],[30,0.5000],[35,0.5736],
  [40,0.6428],[45,0.7071],[50,0.7660],[55,0.8192]]:
> CurveFitting[PolynomialInterpolation](points, 18, form=Newton);
0.3089845746
```

Računanje vrednosti  $f(12)$  vršimo ekstrapolacijom pomoću I NEWTONovog interpolacionog polinoma. Sada je  $x = 12$ , pa je  $u = \frac{12-15}{5} = -0.6$ .

Iz jednačine (6) dobija se da je približna vrednost  $f(x)$  u tački 12

$$f(12) \approx N_3^I(12) = 0.2079.$$

Pošto se radi o ekstrapolaciji, greška računa je veća nego pri interpolaciji i formula procene greške I NEWTONovim interpolacionim polinomom ne važi.

Za približno izračunavanje vrednosti  $f(53)$  koristimo II NEWTONov interpolacioni polinom:

$$N_3^{II}(x) = 0.8192 + 0.0532v - 0.0057 \frac{v(v+1)}{2} - 0.0003 \frac{v(v+1)(v+2)}{6}$$

pri čemu je  $v = \frac{x-x_8}{h}$ ,  $h = 5$ ,  $x_8 = 55$ ,  $x = 53$ , pa je  $v = \frac{53-55}{5} = -0.4$ .

$$f(53) \approx N_3^{II}(53) = 0.7986.$$

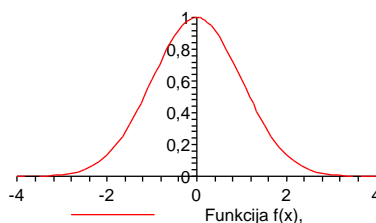
Grešku procenjujemo izrazom:

$$R_3^{II} \leq \frac{|\Delta^4 y|}{4!} |v(v+1)(v+2)(v+3)| = \frac{0.0002}{24} 0.4 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 2.6 = 8.3 \cdot 10^{-6}.$$

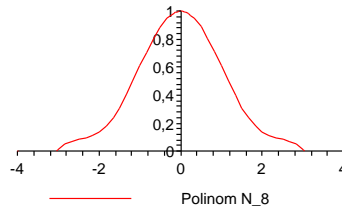
**3.** U MAPLEu nacrtati grafik funkcije  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  na intervalu  $[-4, 4]$ . Nacrtati grafike NEWTONovih interpolacionih polinoma stepena 8 u čvorovima na intervalu  $[-4, 4]$  sa korakom 1 i stepena 3 na intervalu  $[-4, -1]$  sa korakom 1. Izračunati vrednosti funkcije i oba NEWTONova interpolaciona polinoma u tački  $-2.5$ . Komentarisati dobijene rezultate.

**Rešenje:**

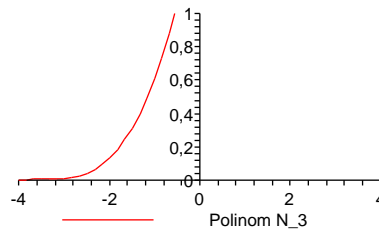
```
> plot( exp(-(x^2)/2), x= -4..4, 0..1);
>
```



```
> pointx9 := [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]:
> pointy9 := [0.0003, 0.0111, 0.1353, 0.6065, 1, 0.6065, 0.1353, 0.0111, 0.0003]:
> plot(CurveFitting[PolynomialInterpolation](pointx9, pointy9, x, form=Newton),
      x=-4..4, 0..1);
```



```
> pointx4 :=[-4,-3,-2,-1]:
> pointy4 :=[0.0003,0.0111,0.1353,0.6065]:
> plot(CurveFitting[PolynomialInterpolation](pointx4,pointy4,x,form=Newton),
      x=-4..4, 0..1);
```



```
> eval(exp(-(x^2)/2),x=-2.5);
      0.04393693362
> CurveFitting[PolynomialInterpolation](pointx9,pointy9,-2.5,form=Newton);
      0.08313381956
> CurveFitting[PolynomialInterpolation](pointx4,pointy4,-2.5,form=Newton);
      0.04442500000
```

Čvorovi interpolacije koji su udaljeni od tačke u kojoj tražimo vrednost funkcije ne utiču na tačnost, a mogu i da povećaju grešku. Interpolacija polinomima treba da se vrši sa što manje čvorova interpolacije. Najčešće je dovoljno 3 – 4 čvora interpolacije koji se nalaze u blizini tačke koja je od interesa.

4. Polinom trećeg stepena  $p_3(x)$  tabeliran je na sledeći način:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-20	-5	1	1	4	15	40	85	156

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, odrediti polinom  $p_3(x)$ .

**Napomena:** Pretpostavimo da je tabeliran polinom  $n$ -tog stepena. Tada konačne razlike reda  $n+1, n+2, \dots$  moraju biti 0, jer bi u suprotnom polinom  $(n+1)$ -og stepena mogao NEWTONovim polinomom biti aproksimiran polinomom većeg stepena od  $n$ , što je nemoguće.

**Rešenje:** Popunimo datu tablicu konačnim razlikama zaključno sa četvrtim stepenom, pošto se radi o polinomu trećeg stepena, a u skladu sa napomenom.

$x$	$p_3(x)$	$\Delta p_3$	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-9	3	6
-2	-5	6	-6	9	-4
-1	1	0	3	5	1
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Prema napomeni, konačne razlike četvrtog reda treba da imaju vrednost 0, pošto je tabeliran polinom trećeg stepena. Pošto su  $\Delta^4 p_3(x_3)$  i  $\Delta^4 p_3(x_4)$  jednake 0 možemo pretpostaviti da nije bilo greške u cvorovima koji učestvuju u formiranju ove dve vrednosti. Kako je

$$\Delta^4 p_3(x_3) = p_3(x_7) - 4p_3(x_6) + 6p_3(x_5) - 4p_3(x_4) + p_3(x_3)$$

$$\Delta^4 p_3(x_4) = p_3(x_8) - 4p_3(x_7) + 6p_3(x_6) - 4p_3(x_5) + p_3(x_4)$$

to smatramo da su vrednosti polinoma u čvorovima  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  i  $x_8$  izračunati bez greške. Treba da dobijemo da je  $\Delta^4 p_3(x_2) = 0$ , pa na tom mestu pišemo 0. Pošto je

$$\Delta^4 p_3(x_2) = \Delta^3 p_3(x_3) - \Delta^3 p_3(x_2)$$

i smatramo da je  $p_3(x_3)$  tačna, iz ove relacije ispravljamo vrednost  $\Delta^3 p_3(x_2) = 6$ . Na ovaj način se vraćamo kroz tablicu ispravljajući  $\Delta^2 p_3(x_2) = 2$ ,  $\Delta p_3(x_2) = 1$  i  $p_3(x_2) = 0$ . Formiramo novu tablicu u kojoj je ispravljeno  $p_3(x_2) = 0$ .

$x$	$p_3(x)$	$\Delta p_3$	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-10	6	0
-2	-5	5	-4	6	0
-1	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>0</b>
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Sad su sve konačne razlike četvrtog reda 0, što znači da je polinom  $p_3(x)$  tačno tabeliran. Koristeći I NEWTONov interpolacioni polinom, uz  $h = 1$ , imamo:

$$\begin{aligned}
N_3^I(x) &= -20 + 15(x+3) + \frac{-10}{2!}(x+3)(x+2) + \frac{6}{3!}(x+3)(x+2)(x+1) \\
&= -20 + 15x + 45 - 5x^2 - 25x - 30 + x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
&= x^3 + x^2 + x + 1 \equiv p_3(x)
\end{aligned}$$

### 3.3 Inverzna interpolacija

Rešavamo problem tipa:

Naći tačku  $x^*$  tako da je  $f(x^*) = y^*$ , pri čemu je  $y^*$  unapred poznat broj.

Ukoliko je funkcija  $f(x)$  zadana ekvidistantnom mrežom, možemo da koristimo NEWTONov interpolacioni polinom. U suprotnom, invertujemo tablicu i koristimo LAGRANGEov interpolacioni polinom.

5. Tablicom je zadana funkcija  $f(x)$

$x$	10	20	30	40
$f(x)$	0.1763	0.3640	0.5774	0.8391

Inverznom interpolacijom izračunati  $x^*$  i  $x^{**}$  za koje važi  $f(x^*) = 0.25$  i  $f(x^{**}) = 0.8$ .

**Rešenje:** Popunimo tablicu konačnim razlikama,  $y_k = f(x_k)$ .

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	0.1763	0.1877	0.0257	0.0226
20	0.3640	0.2134	0.0483	
30	0.5774	0.2617		
40	0.8391			

Pošto je  $f(x^*) = 0.25$ , prema vrednostima za  $y_k$ , očekujemo da bude  $x^* \in [10, 20]$ , pa koristimo I NEWTONov interpolacioni polinom.

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad (7)$$

Kako je  $u = \frac{x-x_0}{h}$ ,  $h = 10$ ,  $y = 0.25$ , tražimo  $u$ . Iz (7) sledi:

$$u = \frac{y}{\Delta y_0} - \frac{y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} \quad (8)$$

$$u = \frac{0.25}{0.1877} - \frac{0.1763}{0.1877} - \frac{u(u-1)}{2} \frac{0.0257}{0.1877} - \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \frac{0.0226}{0.1877} \quad (9)$$

$$u = 0.39265 - u(u-1) \cdot 0.06846 - u(u-1)(u-2) \cdot 0.02007 \quad (10)$$

Sada formiramo iterativni proces po  $u$  na sledeći način. Za poznatu vrednost  $u_n$  sledeću iteraciju  $u_{n+1}$  računamo po formuli:

$$u_{n+1} = 0.39265 - u_n(u_n-1) \cdot 0.06846 - u_n(u_n-1)(u_n-2) \cdot 0.02007, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Može se pokazati da je ovo preslikavanje kontrakcija, pa kao takvo, po Banahovoj teoremi ima nepokretnu tačku, koja je rešenje jednačine (10). Početna vrednost  $u$  iterativnom postupku (11) je  $u_0 = 0$ . Kada zamenimo tu vrednost u desnu stranu jednačine dobićemo sledeću vrednost  $u_1$ .

$$u_1 = 0.39265 - u_0(u_0-1) \cdot 0.06846 - u_0(u_0-1)(u_0-2) \cdot 0.02007$$



Sada je  $u_1 = 0.39265$ . Ponavljamo postupak tako što na desnoj strani dobijenu vrednost za  $u_1$ .

$$u_2 = 0.39265 - u_1(u_1 - 1) \cdot 0.06846 - u_1(u_1 - 1)(u_1 - 2) \cdot 0.02007$$

Na ovaj način dobijamo sledeći niz:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 0.39265 \\ u_2 &= 0.40128 \\ u_3 &= 0.40139 \\ u_4 &= 0.40139 \end{aligned}$$

Vrednosti za  $u_3$  i  $u_4$  su iste, pa tu zaustavljamo proces, i za traženu vrednost  $u$  uzimamo  $u = u_4 = 0.40139$ . Ovu vrednost za  $u$  smo dobili za  $y = 0.25$ , pa ona odgovara vrednosti  $x^*$ . Sada je

$$x = uh + x_0 = 0.40139 \cdot 10 + 10 = 14.0139$$

tj.  **$x^* = 14.0139$** .

Vrednost  $y = 0.8$  se nalazi pri kraju tabele, pa ćemo za nalaženje vrednosti  $x^{**}$ , za koju važi  $f(x^{**}) = 0.8$ , koristiti II NEWTONov interpolacioni polinom:

$$y = y_3 + v\Delta y_2 + \frac{v(v+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{v(v+1)(v+2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad (12)$$

Sada je:

$$v = \frac{y}{\Delta y_2} - \frac{y_3}{\Delta y_2} - \frac{v(v+1)}{2} \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta y_2} - \frac{v(v+1)(v+2)}{6} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_2} \quad (13)$$

$$v = -0.14941 - v(v+1) \cdot 0.09228 - v(v+1)(v+2) \cdot 0.01439 \quad (14)$$

Iz (14) formiramo iterativni proces:

$$v_{n+1} = -0.14941 - v_n(v_n+1) \cdot 0.09228 - v_n(v_n+1)(v_n+2) \cdot 0.01439, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Za početnu vrednost uzimamo  $v_0 = 0$  i koristeći (15) dobijamo niz:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_1 &= -0.14941 \\ v_2 &= -0.13430 \\ v_3 &= -0.13556 \\ v_4 &= -0.13546 \\ v_5 &= -0.13546 \end{aligned}$$

Vrednosti  $v_4$  i  $v_5$  su se poklopile, pa stajemo sa iterativnim procesom. Sada je  $v = v_5 = -0.13546$ ,  $v = \frac{x-x_3}{h}$  i

$$x = vh + x_3 = -0.13546 \cdot 10 + 40 = 38.6454$$

tj.  **$x^{**} = 38.6454$** .

**6.** Naći nule funkcije:

$x$	2	2.5	3.5	4
$f(x)$	0.9093	0.5985	-0.3508	-0.7568

**Rešenje:** Tražimo tačku  $x^*$  takvu da je  $f(x^*) = 0$ , tj.  $f^{-1}(0) = x^*$ , gde je  $f^{-1}$  funkcija data sledećom tabelom:

$y$	-0.7568	-0.3508	0.5985	0.9093
$x$	4	3.5	2.5	2

Sada su čvorovi u tačkama  $y_k$  poređanim u rastućem poretku. Koristimo LAGRANGEov interpolacioni polinom (2), gde je  $y = 0$ .

$(y - y_0)$	$(y_0 - y_1)$	$(y_0 - y_2)$	$(y_0 - y_3)$	$D_0$
$(y_1 - y_0)$	$(y - y_1)$	$(y_1 - y_2)$	$(y_1 - y_3)$	$D_1$
$(y_2 - y_0)$	$(y_2 - y_1)$	$(y - y_2)$	$(y_2 - y_3)$	$D_2$
$(y_3 - y_0)$	$(y_3 - y_1)$	$(y_3 - y_2)$	$(y - y_3)$	$D_3$
				$\Pi_4(x)$
0.7568	-0.4060	-1.3553	-1.6661	-0.693815
0.4060	0.3508	-0.9493	-1.2601	0.170370
1.3553	0.9493	-0.5985	-0.3108	0.239323
1.6661	1.2601	0.3108	-0.9093	-0.593327
				0.144481

$$\begin{aligned}
 P_3(0) &= 0.144481 \left[ \frac{4}{-0.693815} + \frac{3.5}{0.170370} + \frac{2.5}{0.239323} + \frac{2}{-0.593327} \right] \\
 &= 3.157431
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x^* = 3.157431}$$