

## 4 Numerička integracija

### 4.1 Newton-Cotesove formule

**Opšte trapezno pravilo** sa  $n + 1$  ekvidistantnih čvorova,  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $h = x_k - x_{k-1}$ , je dato formulom:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{n-1}) + f_n) + R \quad (1)$$

gde je  $f_k = f(x_k)$ , i  $R_M$  greška trapeznog pravila koja je oblika:

$$R_M = (b - a) \frac{M_2 h^2}{12}. \quad (2)$$

**Opšte Simpsonovo pravilo** kad imamo  $2n+1$  ekvidistantnih čvorova,  $(x_0, x_1, \dots, x_{2n})$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$ , je dato formulom:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}) + R \quad (3)$$

gde je  $f_k = f(x_k)$ , i  $R_M$  greška SIMPSONOVOG pravila koja je oblika:

$$R_M = (b - a) \frac{M_4 h^4}{180}. \quad (4)$$

Ovde je  $M_k = \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|$ . Za korišćenje SIMPSONOVE formule potreban je *neparan broj čvorova*.

Ukupna greška koja nastaje prilikom određivanja integrala kvadraturnim formulama tipa (1) i (3) nastaje pod uticajem greške metode,  $R_M$ , i greške računa,  $r$ , koja je posledica zaokruživanja:

$$R = R_M + r \quad (5)$$

Greška računa, kada se računa sa  $k$  decimala, iznosi

$$r = (b - a) \frac{1}{2} 10^{-k} \quad (6)$$

pri čemu deo  $\frac{1}{2} 10^{-k}$  je posledica načina zaokruživanja.

**Rungeova ocena greške** se koristi za procenu greške metode i ima sledeći oblik:

$$R(f) = |I(f) - I_h(f)| = \frac{|I_h(f) - I_{2h}(f)|}{2^k - 1} \quad (7)$$

pri čemu je  $I(f)$  tačna vrednost integrala,  $I_{2h}(f)$  približna vrednost dobijena sa korakom  $2h$ , i  $I_h(f)$  približna vrednost dobijena sa prepolovljenim korakom  $h$ . Pri tom, za trapeznu formulu (1)  $k = 2$ , a za SIMPSONOVU formulu (3)  $k = 4$ . Podelu usitnjavamo sve dok greška  $R(f)$  nije manja od unapred zadate *greške metode*  $R_M$ .

**13.** Koristeći SIMPSONOVU formulu izračunati integral

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx$$

sa tačnošću  $R = 0.5 \cdot 10^{-4}$  pomoću RUNGEOVE ocene greške.

**Rešenje:** Ukupna greška  $R$  je zbir greške metode  $R_M$  i greške računa  $r$ , tj.

$$R = R_M + r.$$

Pošto radimo sa 5 decimala, to je greška računa, prema (6),  $r = (1 - 0)^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-5}$ , dozvoljena greška u postavci zadatka je  $R = 0.5 \cdot 10^{-4}$ , pa je prema tome, dozvoljena greška metode:

$$R_M = R - r = 0.5 \cdot 10^{-4} - 0.5 \cdot 10^{-5} = 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (8)$$

Ovo je dozvoljena greška pri aproksimaciji vrednosti integrala SIMPSONovom formulom.

Za procenu greške metode koristimo RUNGEovu ocenu greške (7). Interval po kome integralimo funkciju  $f(x) = \cos(x^2)$  je  $[0, 1]$ , pošto koristimo SIMPSONovu formulu potreban nam je neparan broj čvorova podele ovog intervala. Zato je pogodan korak po kome vršimo podelu intervala  $h = 0.1$ , u tom slučaju imamo 11 čvorova. Formiramo tabelu na sledeći način:

$x$	$y_0, y_{2n}$	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
$x_0$	$f(x_0)$		
$x_1$		$f(x_1)$	
$x_2$			$f(x_2)$
$x_3$		$f(x_3)$	
$x_4$			$f(x_4)$
$x_5$		$f(x_5)$	
$x_6$			$f(x_6)$
$x_7$		$f(x_7)$	
$x_8$			$f(x_8)$
$x_9$		$f(x_9)$	
$x_{10}$	$f(x_{10})$		
$\Sigma$	$A$	$B$	$C$

Ovde je  $f(x) = \cos(x^2)$  podintegralna funkcija, a brojevi  $A, B$  i  $C$  predstavljaju sume brojeva u odgovarajućoj koloni, tj.  $A$  je suma vrednosti podintegralne funkcije u prvom i poslednjem čvoru,  $B$  je suma vrednosti u neparnim čvorovima, i  $C$  je suma vrednosti u parnim čvorovima izuzev prvog i poslednjeg. Na ovaj način dobijamo pregledno vrednosti koje u formuli (3) množimo sa odgovarajućim faktorom (koji smo zapisali u zaglavlju tabele u zagradama!) i sabiramo.

Za vrednosti koje dobijamo pri rešavanju ovog zadatka, pri koraku  $h = 0.1$ , tabela će izgledati na sledeći način:

$x$	$y_0, y_{2n}$	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
0	1		
0.1		0.99950	
0.2			0.99920
0.3		0.99595	
0.4			0.98723
0.5		0.96891	
0.6			0.93590
0.7		0.88233	
0.8			0.80210
0.9		0.68950	
1.0	0.54030		
$\Sigma$	1.54030	4.53664	3.72443

Trigonometrijske funkcije izračunavamo u radijanima. Sada je aproksimacija integrala po SIMPSONovoj formuli (3) po koraku  $h = 0.1$ :

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{3}[1.54030 + 4 * 4.53664 + 2 * 3.72443]$$

$$I_{0.1} = 0.90452 \quad (9)$$

Da bismo iskoristili RUNGEovu ocenu greške (7), prepolovićemo korak podele intervala po kom vršimo integraciju,  $h = 0.05$ . Sada imamo novu podelu, sa 21 čvorom, pri čemu su svi čvorovi prethodne podele sa korakom  $h = 0.1$ , osim prvog i poslednjeg, sada parni čvorovi u novoj podeli sa korakom  $h = 0.05$ . Nećemo pisati celu tabelu za novu podelu, već samo vrednosti podintegralne funkcije u novim čvorovima, koji su sada neparni, i njihova suma se množi sa faktorom 4 u SIMPSONovoj formuli (3).

$x$	$y_{2k-1}(*4)$
0.05	1.0000
0.15	0.99995
0.25	0.99805
0.35	0.99251
0.45	0.97957
0.55	0.95460
0.65	0.91207
0.75	0.84592
0.85	0.75015
0.95	0.61965
$\Sigma$	9.05247

Sada je aproksimacija integrala po SIMPSONovoj formuli (3) po koraku  $h = 0.05$ :

$$I_{0.05} = \frac{0.05}{3}[1.54030 + 4 * 9.05247 + 2 * (4.53664 + 3.72443)]$$

$$I_{0.05} = 0.90454 \quad (10)$$

RUNGEova ocena greške je:

$$R(f) = \frac{|I_{0.05} - I_{0.1}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.90454 - 0.90452|}{15} = 1.3 \cdot 10^{-6} < 4.5 \cdot 10^{-5}$$

gde je  $4.5 \cdot 10^{-5}$  dozvoljena greška metode.

Dakle, postignuta je tražena tačnost. Vrednost integrala aproksimiramo vrednošću  $I_{0.05}$  koja ima veću tačnost.

$$\mathbf{I} \approx I_{0.05} = 0.90454.$$

□

#### 14. Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

SIMPSONovom kvadraturnom formulom sa greškom manjom od  $10^{-4}$ , koristeći egzaktnu ocenu greške.

**Rešenje:** Ukupna greška koja je dozvoljena u postavci zadatka iznosi  $R = 10^{-4}$ , a greška računa, pošto radimo na četiri decimale je, prema (6),  $r = \frac{1-0}{2}10^{-4} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ . Sada je maksimalna dozvoljena greška metode, prema (5),

$$R_M = 10^{-4} - 0.5 \cdot 10^{-4} = 0.5 \cdot 10^{-4}. \quad (11)$$

Iskoristimo egzaktnu ocenu greške SIMPSONove formule (4), kako bismo našli korak podele intervala integracije  $h$  koji nam obezbeđuje da greška metode bude u granicama dozvoljenog.

$$R_M = (b-a) \frac{M_4 h^4}{180}$$

$$M_4 = \max_{x \in [0,1]} |f^{IV}(x)|$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$M_4 = \max_{[0,1]} \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| = 24$$

Sada imamo  $M_4$ , i to možemo da ubacimo u (4), tada je, zbog (11),

$$R_M = \frac{24}{180} h^4 \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h^4 \leq \frac{180}{48} \cdot 10^{-4}.$$

Dobijamo da je korak koji nam obezbeđuje dozvoljenu grešku metode

$$h \leq 0.139.$$

Uzmimo za korak  $h$  podele intervala po kome vršimo integraciju  $h = 0.1$ . Ovaj korak nam obezbeđuje neparan broj čvorova 11. Formiramo tablicu slično kao u predhodnom zadatku:

$x$	$y_0, y_{2n}$	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
0	1		
0.1		0.9091	
0.2			0.8333
0.3		0.7692	
0.4			0.7143
0.5		0.6667	
0.6			0.6250
0.7		0.5882	
0.8			0.5556
0.9		0.5263	
1.0	0.5000		
$\Sigma$	1.5000	3.4595	2.7282

Iz ovako formirane tabele možemo lako da formiramo SIMPSONovu formulu po koraku 0.1:

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{3} [1.5000 + 4 * 3.4595 + 2 * 2.7282]$$

Približna vrednost integrala je izračunata sa traženom tačnošću, pošto smo na taj način odabrali korak  $h$ .

$$\mathbf{I} \approx I_{0.1} = 0.6931.$$

□

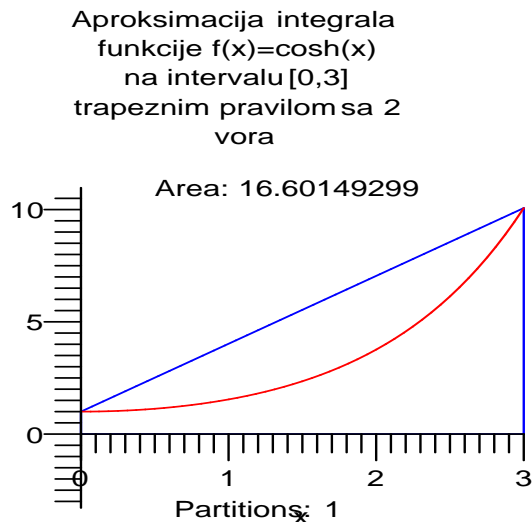
15. Dat je integral  $I = \int_0^3 \cosh(x) dx$ .

a) U MAPLEu nacrtati grafike aproksimacije integrala  $I$  trapeznim pravilom sa 2, 3 i 5 čvorova i SIMPSONovim pravilom sa 3 i 5 čvorova.

b) Koliko puta je potrebno izračunati vrednost funkcije  $f(x) = \cosh(x)$  prilikom aproksimacije integrala  $I$  trapeznim i SIMPSONovim pravilom sa tačnošću  $10^{-6}$ ?

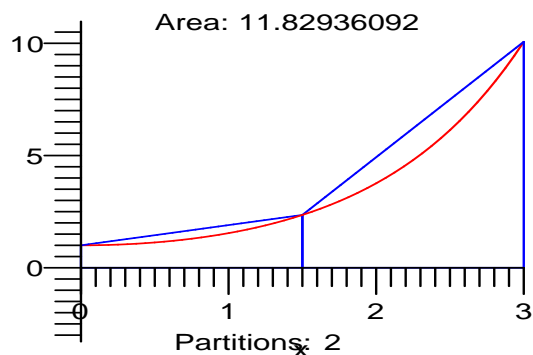
Rešenje: a)

```
> with(Student[Calculus1]):  
> ApproximateInt(cosh(x), 0..3, output=plot, partition=1,  
> method=trapezoid, title="Aproksimacija integrala \n  
> funkcije f(x)=cosh(x) \n na intervalu [0,3] \n  
> trapeznim pravilom sa 2 čvora");
```



```
— f(x)  
> ApproximateInt(cosh(x), 0..3,  
> output=plot, partition=2, method=trapezoid, title="Aproksimacija  
> integrala \n funkcije f(x)=cosh(x) \n na  
> intervalu [0,3] \n trapeznim pravilom sa 3  
> čvora");
```

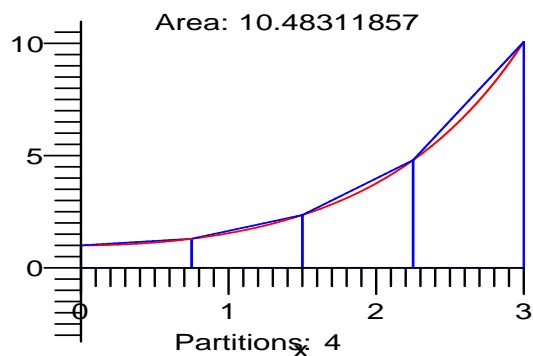
Aproksimacija integrala  
funkcije  $f(x)=\cosh(x)$   
na intervalu  $[0,3]$   
trapeznim pravilom sa 3  
vora



—  $f(x)$

```
> ApproximateInt(cosh(x), 0..3,
> output=plot, partition=4, method=trapezoid, title="Aproksimacija
> integrala \n funkcije f(x)=cosh(x) \n na
> intervalu [0,3] \n trapeznim pravilom sa 5
> čvorova");
```

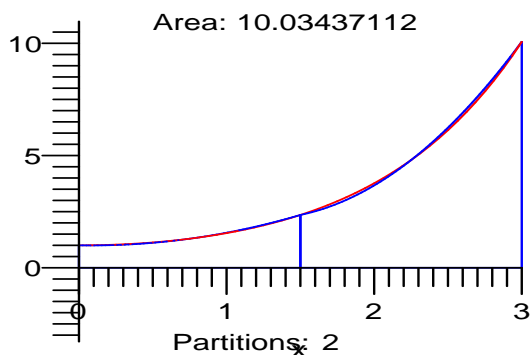
Aproksimacija integrala  
funkcije  $f(x)=\cosh(x)$   
na intervalu  $[0,3]$   
trapeznim pravilom sa 5  
vorova



—  $f(x)$

```
> ApproximateInt(cosh(x), 0..3,
> output=plot, partition=2, method=simpson, title="Aproksimacija
> integrala \n funkcije f(x)=cosh(x) \n na
> intervalu [0,3] \n Simpsonovim pravilom sa 3
> čvora");
```

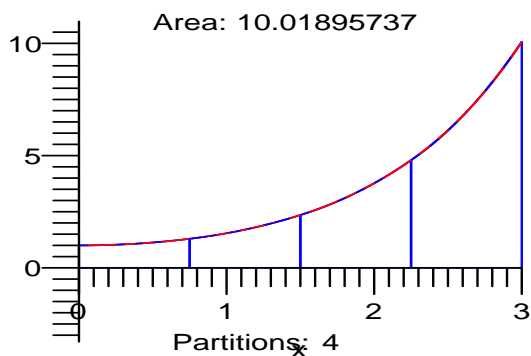
Aproksimacija integrala  
funkcije  $f(x)=\cosh(x)$   
na intervalu  $[0,3]$   
Simpsonovim pravilom sa 3  
vora



— f(x)

```
> ApproximateInt(cosh(x), 0..3,
> output=plot, partition=4, method=simpson, title="Aproksimacija
> integrala \n funkcije f(x)=cosh(x) \n na
> intervalu [0,3] \n Simpsonovim pravilom sa 5
> čvorova");
```

Aproksimacija integrala  
funkcije  $f(x)=\cosh(x)$   
na intervalu  $[0,3]$   
Simpsonovim pravilom sa 5  
vorova



— f(x)

Izračunavanje tačne vrednosti integrala I u MAPLEu:

```
> evalf(int(cosh(x), x=0..3));
10.01787493
>
```

b) Zahtevana tačnost je  $R = 10^{-6}$ . Greška računa je  $r = \frac{3-0}{2} * 10^{-7}$ , pa je greška metode  $R_M = R - r = 8.5 * 10^{-7}$ .

Da bismo odredili koliko puta je potrebno izračunati vrednost funkcije  $f(x) = \cosh(x)$  prilikom aproksimacije integrala  $I$  trapeznim i SIMPSONovim pravilom sa tačnošću  $10^{-6}$  potrebno je da odredimo maksimalan korak  $h$  koji obezbeđuje traženu tačnost iz egzaktna ocene greške za odgovarajuće pravilo. Broj čvorova kojima vršimo podelu intervala integracije  $[0, 3]$  je  $n = \frac{b-a}{h}$  i u svakom čvoru imamo po jedno izračunavanje podintegralne funkcije. Za to su nam potrebni izvodi podintegralne funkcije  $f(x)$  drugog i četvrtog reda

$$f''(x) = (\cosh(x))'' = \cosh(x), \quad f^{IV}(x) = (\cosh(x))^{IV} = \cosh(x)$$

i maksimalne vrednosti ovih izvoda na intervalu  $[0, 3]$ . Funkcija  $\cosh(x)$  je rastuća za  $x \geq 0$  pa je  $M_2 = M_4 = \cosh(3) = 10.067662$ .

Za trapezno pravilo, iz (2) imamo da važi

$$\frac{3}{12} * 10.067662 * h^2 \leq R_M = 8.5 * 10^{-7} \implies h \leq 0.00058.$$

Dakle, da bismo postigli tačnost od  $10^{-6}$  trapeznim pravilom treba da bude korak  $h = 0.0005$ . U tom slučaju je broj čvorova u kojima računamo vrednost podintegralne funkcije je  $n = \frac{3}{0.0005} = 6000$ .

U slučaju SIMPSONovog pravila imamo

$$\frac{3}{180} * 10.067662 * h^4 \leq R_M = 8.5 * 10^{-7} \implies h \leq 0.047.$$

Broj čvorova u kojima računamo vrednost funkcije  $\cosh(x)$  je  $n = \frac{3}{0.04} = 75$ , što je 80 puta manje izračunavanja nego u slučaju korišćenja trapeznog pravila.

## 4.2 Izvođenje formula za numeričku integraciju

Formule oblika

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (12)$$

se nazivaju kvadraturene formule,  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ,  $h = x_k - x_{k-1}$ . Koeficijente  $A_i$  određujemo tako da formula bude tačna za polinome što višeg stepena. Zamenom funkcije  $f(x)$  redom sa  $1, x, x^2, \dots, x^n$  dobijamo koeficijente  $A_0, A_1, \dots, A_n$ . Greška formule integracije je tada

$$R(f) \leq \int_a^b \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| dx. \quad (13)$$

Ako se pokaže da je formula (12) tačna i za  $x^{n+1}, \dots, x^{n+k}$ , a ne važi za  $x^{n+k+1}$ , tada je greška reda  $n+k+1$  i oblika je:

$$R(f) \leq \int_a^b \frac{M_{n+k+1}}{(n+k+1)!} |(x-x_0)^{k+1}(x-x_1)\dots(x-x_n)| dx. \quad (14)$$

**16.** Izvesti formulu za numeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x)dx = Af(0) + Bf\left(\frac{2h}{3}\right) + R(f) \quad (15)$$

tako da bude tačna za polinome što većeg stepena i proceniti grešku integracije  $R(f)$ .

**Rešenje:** Formula (15) treba da bude tačna za polinome što višeg stepena. Odredimo koeficijente  $A$  i  $B$  tako da formula bude tačna za  $f(x) = 1$  i  $f(x) = x$ . (Treba da odredimo



2 nepoznate, pa nam trebaju dve jednačine.) Kako formula (15) treba da bude tačna za  $f(x) = 1$  greška integracije  $R(f)$  će biti 0 u tom slučaju. Slično će biti kada umesto  $f(x)$  u formuli (15) stavimo  $x$ . Sada je:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 : \quad A + B &= h \\ f(x) = x : \quad \frac{h^2}{2} &= \frac{2h}{3}B \Rightarrow \boxed{B = \frac{3}{4}h} \\ A = h - B &\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}h} \end{aligned}$$

Pošto je formula (15) tačna za 1 i  $x$  biće tačna i za sve polinome prvog stepena, zbog linearnosti polinoma (Svaki polinom prvog stepena možemo da dobijemo kao linearnu kombinaciju ove dve funkcije.) Dakle, dobili smo da je formula za numeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{4}f(0) + \frac{3h}{4}f\left(\frac{2h}{3}\right) + R(f) \quad (16)$$

i tačna je za polinome nultog i prvog stepena (tada je  $R(f) = 0$ ). Proverimo kog je reda greška integracije  $R(f)$ . Prvo proveravamo da li formula (16) važi i za polinome drugog stepena (dovoljno je proveriti za  $x^2$ ). Za  $f(x) = x^2$  leva strana formule (16) je

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3},$$

dok je desna strana:

$$\frac{h}{4} \cdot 0^2 + \frac{3h}{4} \left(\frac{2h}{3}\right)^2 + R(h) = \frac{h^3}{3} + R(f).$$

Upoređujući levu i desnu stranu formule (16) za funkciju  $x^2$ , možemo da zaključimo da je  $R(f) = 0$ , pa je formula tačna i za polinome drugog stepena.

Izvršimo sada proveru formule (16) za  $f(x) = x^3$ . Sada je leva strana jednaka:

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4},$$

a desna:

$$\frac{h}{4} \cdot 0^3 + \frac{3h}{4} \left(\frac{2h}{3}\right)^3 + R(f) = \frac{2h^4}{9} + R(f).$$

Iz ove dve relacije sledi da bi formula (16) bila tačna, mora biti  $R(f) \neq 0$ . Dakle, greška integracije je trećeg reda (tačna je za polinome do drugog stepena). Prema (14) greška je oblika:

$$R(f) \leq \int_0^h \frac{M_3}{3!} |(x-0)^2(x-\frac{2h}{3})| dx = \frac{M_3 h^4}{216}.$$

□

**17.** Odrediti koeficijente  $A, B$  i  $C$  tako da kvadratura formula

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = Af(x_0) + B\Delta f(x_0) + C\Delta^2 f(x_0) + R(f) \quad (17)$$

bude tačna za polinome što višeg stepena, a zatim proceniti grešku  $R(f)$ .

**Rešenje:** Razvijmo prvo konačne razlike:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

Sada formula (17) postaje:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = [A - B + C]f(x_0) + [B - 2C]f(x_1) + Cf(x_2) + R(f) \quad (18)$$

Pošto se radi o konačnim razlikama, prvi čvor  $x_0$  je u početnoj tački intervala integracije,  $h$  je korak podele intervala integracije, pa je  $x_1 = h, x_2 = 2h$ . Zato je:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = [A - B + C]f(0) + [B - 2C]f(h) + Cf(2h) + R(f) \quad (19)$$

Odredimo koeficijente  $A, B, C$  tako da formula bude tačna za polinome do drugog stepena. Zamenimo u (19)  $f(x)$  redom sa  $1, x, x^2$ . Na taj način smo iz (19) dobili tri jednačine sa tri nepoznate:

$$f(x) = 1 : \quad \boxed{A = \frac{8h^3}{3}}$$

$$f(x) = x : \quad \boxed{B = 4h^3}$$

$$f(x) = x^2 : \quad \boxed{C = \frac{6h^3}{5}}$$

Sada formula za numeričku integraciju ima oblik:

$$\begin{aligned} \int_0^{2h} x^2 f(x) dx &= h^3 \left[ \frac{8}{3} f(0) + 4\Delta f(0) + \frac{6}{5} \Delta^2 f(0) \right] + R(f) \\ &= h^3 \left[ -\frac{2}{15} f(0) + \frac{8}{5} f(h) + \frac{6}{5} f(2h) \right] + R(f) \end{aligned} \quad (20)$$

Proverimo da li formula važi i za polinome trećeg reda: Za  $f(x) = x^3$  leva strana jednačine (20) je:

$$\frac{64}{6} h^6,$$

a desna strana:

$$h^3 \left[ \frac{8}{5} h^3 + \frac{6}{5} 8h^3 \right] = \frac{56}{5} h^6.$$

Dakle, formula ne važi za polinome trećeg stepena, pa je greška trećeg reda i važi:

$$R(f) \leq \int_0^{2h} \frac{M_3}{3!} x^2 |(x-0)(x-h)(x-2h)| dx = \frac{4M_3 h^6}{45}$$

U gornjoj formuli  $x^2$  potiče od oblika formule integracije (17) i figuriše i u proceni greške.  $\square$

### 4.3 Integracija nesvojstvenih integrala

Rešavamo integral oblika

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

sa tačnošću  $\varepsilon$ . Predstavimo ovaj integral u obliku:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)dx \quad (21)$$

i odredimo broj  $M > a$  takav da je

$$\left| \int_M^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad (22)$$

i sa ovako odabranim  $M$  rešavamo integral

$$\int_a^M f(x)dx$$

sa tačnošću  $\frac{1}{2}\varepsilon$ .

Ako rešavamo integral tipa  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  tada možemo da odsečemo delove  $\int_{-\infty}^{M_1} f(x)dx$  i  $\int_{M_2}^{+\infty} f(x)dx$  sa tačnošću  $\frac{\varepsilon}{4}$  pronalaženjem odgovarajućih  $M_1, M_2$ , i rešavamo integral  $\int_{M_1}^{M_2} f(x)dx$  sa tačnošću  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

**18.** Sa tačnošću  $\varepsilon = 10^{-5}$ , SIMPSONovom metodom izračunati integral

$$I = \int_1^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx. \quad (23)$$

**Rešenje:** Napišimo integral (23) u sledećem obliku:

$$I = \int_1^M \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx + \int_M^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \quad (24)$$

Odredimo broj  $M > 1$  tako da je:

$$\left| \int_M^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad (25)$$

Kako je  $|2 + \sin x| \geq 1$ , važi

$$\left| \int_M^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \int_M^{\infty} \left| \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} \right| dx \leq \int_M^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \Big|_M^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-M^2} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

Dakle, tražimo  $M$  za koje će biti zadovoljeno:

$$e^{-M^2} \leq 10^{-5} \implies M > 3.3930702$$

Uzmimo da je M=3.4. Sada je drugi sabirak iz (24) izračunat sa greškom:

$$\left| \int_{3.4}^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \frac{1}{2}e^{-3.4^2} = 4.8 \cdot 10^{-6}$$

Prvi sabirak iz (24) treba da izračunamo sa tačnošću  $5.2 \cdot 10^{-6}$ , da bi ukupna tačnost bila  $10^{-5}$ , pošto je:

$$10^{-5} - 4.8 \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{-6} - 4.8 \cdot 10^{-6} = 5.2 \cdot 10^{-6}.$$

Greška računa  $r$  pri izračunavanju prvog integrala je

$$r = (3.4 - 1) \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 1.2 \cdot 10^{-6}.$$

Zahtevana tačnost SIMPSONove metode je:

$$R_M = R - r = 5.2 \cdot 10^{-6} - 1.2 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak rešavamo primenjujući RUNGEovu ocenu greške, prvo poloveći interval  $[1, 3.4]$ , sa korakom  $h = 1.2$ .

$x$	$y_0, y_{2n}$	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
1	0.129468		
2.2		0.006194	
3.4	0.000019		
$\Sigma$	0.129487	0.006194	0

pri čemu je  $y_k = f(x_k)$ ,  $f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}$  podintegralna funkcija. Koristeći SIMPSONovu formulu (3) imamo da je:

$$I_{1.2} = \frac{1.2}{3}(0.129487 + 4 \cdot 0.006194 + 2 \cdot 0) = 0.061705$$

Uzmimo polovinu koraka  $h = 0.6$ , sada je:

$x$	$y_{2k-1}(*4)$
1.6	0.041235
2.8	0.000472
$\Sigma$	0.041707

$$I_{0.6} = \frac{0.6}{3}(0.129487 + 4 \cdot 0.041707 + 2 \cdot (0 + 0.006194)) = 0.061741$$

RUNGEova ocena greške je, prema (7),

$$R(f) = \frac{|I_{0.6} - I_{1.2}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.061741 - 0.061705|}{15} = 2.4 \cdot 10^{-6} < 4 \cdot 10^{-6}$$

Dakle, postignuta je tražena tačnost, i približna vrednost integrala je

$$\mathbf{I} \approx 0.061741.$$

□

**19.** Sa tačnošću  $\varepsilon = 10^{-2}$  izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

**Rešenje:** Ovo je nesvojstveni integral, pošto je:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Uvedimo smenu  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , pa imamo:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \cos(t^2) dt$$

Ovo više nije nesvojstveni integral. Sada rešavamo integral

$$\int_0^1 \cos(t^2) dt$$

npr. trapeznom formulom (1) sa tačnošću  $\varepsilon$  koristeći egzaktnu formulu za ocenu greške (2). Ukupna dozvoljena greška je  $R = 10^{-2}$ , a greška računa je

$$r = (b - a) \cdot \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.5 \cdot 10^{-2},$$

pa je dozvoljena greška metode

$$R_M = R - r = 0.5 \cdot 10^{-2}.$$

Egzaktna formula za ocenu greške (2) je

$$R_M = \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$$

Podintegralna funkcija  $f(t)$  je  $\cos(t^2)$  i njen drugi izvod je:

$$f''(t) = -2 \sin(t^2) - 4t^2 \cos(t^2)$$

Nama treba  $M_2$ , tj. maksimum apsolutne vrednosti drugog izvoda podintegralne funkcije  $f(t)$ . Međutim, nije neophodno da znamo tačnu vrednost u kojoj ova funkcija dostiže maksimum na intervalu integracije  $[0, 1]$ , dovoljno je da je ograničimo sa gornje strane, i da tu vrednost koristimo u oceni greške:

$$|f''(t)| = |-2 \sin(t^2) - 4t^2 \cos(t^2)| \leq 6$$

Sada je greška metode:

$$R_M \leq \frac{1}{12} \cdot 6 h^2 = 0.5 h^2 < 0.5 \cdot 10^{-2}$$

Dakle, korak  $h$  koji obezbeđuje traženu tačnost je  $h < 0.1$ . Odaberimo da je  $h = 0.1$ . Popunimo tabelu koja će pojednostaviti račun trapeznom formulom (1):

$t$	$y_0, y_n$	$y_2, \dots, y_{n-1}(*2)$
0	1	
0.1		0.99995
0.2		0.99920
0.3		0.99595
0.4		0.98723
0.5		0.96891
0.6		0.93590
0.7		0.88233
0.8		0.80210
0.9		0.68950
1.0	0.54030	
$\Sigma$	1.54030	8.26107

Vrednosti  $y_k = f(t_k)$ ,  $f(t) = \cos(t^2)$  računamo u radijanima. Sada je, prema (1):

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 * \int_0^1 \cos(t^2) dt = 2 * \frac{0.1}{2} (y_0 + y_{10} + 2(y_1 + \dots + y_9)) = 1.80624$$

S obzirom na zadatu tačnost, približna vrednost integrala je:

$$\mathbf{I} \approx 1.81$$

□

**20.** SIMPSONovom kvadraturnom formulom sa tačnošću  $2 \cdot 10^{-4}$  rešiti integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad (27)$$

**Rešenje:** Podintegralna funkcija  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  ima mogući singularitet u tački  $x = 0$ .

Međutim, kako je:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = 0$$

Dakle,  $x = 0$  nije pravi singularitet, pa možemo da računamo integral (27) SIMPSONovom formulom sa tačnošću  $\varepsilon$ , pri čemu je  $f(0) = 0$ .

Koristeći RUNGEovu ocenu greške, za korak  $h = 0.1$  dobijemo

$$I_{0.1} = 0.61797,$$

a za prepolovljen korak  $h = 0.05$  je

$$I_{0.05} = 0.61963$$

Sada je, prema RUNGEovoj oceni greške:

$$R(f) = \frac{|I_{0.05} - I_{0.1}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.61963 - 0.61797|}{15} = 1.1 \cdot 10^{-4} < 2 \cdot 10^{-4}$$

Dakle:

$$\mathbf{I} = 0.61963$$

□