

4 Numeričko diferenciranje

7. Funkcija $f(x)$ je zadana tabelom:

| | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| $f(x)$ | 2.1272 | 1.5167 | 1.7044 | 3.3285 | 5.0229 | 7.2814 |

Koristeći konačne razlike, zaključno sa trećim redom, odrediti tačku x^* minimuma funkcije $f(x)$ i odrediti vrednost minimuma $f(x^*)$.

Rešenje: Najpre popunimo tablicu konačnim razlikama:

| x | y | Δy | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|-----|--------|------------|--------------|--------------|
| -2 | 2.1272 | -0.6085 | 0.7942 | 0.6442 |
| 0 | 1.5187 | 0.1857 | 1.4384 | -1.3681 |
| 2 | 1.7044 | 1.6241 | 0.0703 | 0.4938 |
| 4 | 3.3285 | 1.6944 | 0.5641 | |
| 6 | 5.0229 | 2.2585 | | |
| 8 | 7.2814 | | | |

Prema vrednostima za $y_k = f(x_k)$ vidimo da funkcija dostiže minimalnu vrednost u intervalu $[-2, 2]$, tj. u okolini tačke 0. Pošto je Δf po apsolutnoj vrednosti u intervalu $[0, 2]$ manje nego u intervalu $[-2, 0]$ verovatnije je da se minimum nalazi u intervalu $[0, 2]$ (ali nije obavezno tako.) Zato ćemo formirati I Njutnov interpolacioni polinom uzimajući tačku 0 za početnu:

$$N_I(x) = y_1 + \Delta y_1 u + \frac{\Delta^2 y_1}{2!} u(u-1) + \frac{\Delta^3 y_1}{3!} u(u-1)(u-2)$$

Neophodan uslov da funkcija ima minimum u tački x jeste da vrednost prvog izvoda u toj tački bude 0. **Prvi izvod I Njutnovog interpolacionog polinoma** u ovom slučaju je:

$$N'_I(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_1 + \frac{\Delta^2 y_1}{2!} (2u-1) + \frac{\Delta^3 y_1}{3!} (3u^2 - 6u + 2) \right] \quad (1)$$

Dovoljno je da izjednačimo izraz u zagradi sa 0 i zamenimo poznate vrednosti iz tablice:

$$0.1857 + \frac{1.4384}{2} (2u-1) + \frac{-1.3681}{6} (3u^2 - 6u + 2) = 0 \quad (2)$$

$$-0.6840u^2 + 2.8065u - 0.9895 = 0 \quad (3)$$

Formiramo iterativni proces iz (3) po lineranom članu:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{0.9895}{2.8065} + \frac{0.6840}{2.8065} u_n^2 \\ u_{n+1} &= 0.3526 + 0.2437 u_n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Početna vrednost u iterativnom postupku je $u_0 = 0$. Iz (4) dobijamo niz iteracija:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0 \\
u_1 &= 0.3526 \\
u_2 &= 0.3829 \\
u_3 &= 0.3883 \\
u_4 &= 0.3893 \\
u_5 &= 0.3895 \\
u_6 &= 0.3896 \\
u_7 &= 0.3896
\end{aligned}$$

Dobili smo $u = u_7 = 0.3896$. Sada je $u = \frac{x-x_1}{h} = \frac{x-0}{2}$, pošto je početna tačka od koje smo formirali Njutnov interpolacioni polinom $x_1 = 0$. Dakle, funkcija $f(x)$ dostiže minimalnu vrednost u tački $x = 2 \cdot u + 0 = 2 \cdot 0.3896 + 0$, tj.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{0.7792}.$$

Odredimo minimum funkcije $f(x)$. Funkcija je zadata tabelom, pa ćemo koristiti I Njutnov interpolacioni polinom sa početnom tačkom x_0 .

$$N_I(x) = 2.1272 - 0.6085u + \frac{0.7942}{2!}u(u-1) + \frac{0.6442}{3!}u(u-1)(u-2)$$

gde je $u = \frac{x^*-x_0}{h} = \frac{0.7792-(-2)}{2} = 1.3896$. Sada je:

$$f(x^*) \approx N_I(x^*) = 1.4611$$

□

4.1 Izvođenje formula za numeričko diferenciranje

Greška numeričkog diferenciranja R je zbir dve greške, greška metode R_M i greška računa r , koja nastaje kao posledica zaokruživanja.

$$R = R_M + r. \quad (5)$$

Greška računa r jeste maksimalna greška sa kojom je zadata vrednost funkcije f .

8. Neka je funkcija $f(x) \in \mathbf{C}^2[a, b]$ čije su poznate vrednosti u ekvidistantnim čvorovima

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Dokazati da je

$$f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}). \quad (6)$$

Rešenje: Koristimo Tejlorov razvoj funkcije u okolini tačke x_k .

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h) = f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{k+1} - x_k)^2$$

Odavde direktno sledi

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \\ f'(x_k) &= \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h \\ f'(x_k) &= \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h \end{aligned}$$

□

9. Neka je funkcija $f(x) \in \mathbf{C}^3[a, b]$ čije su poznate vrednosti u ekvidistantnim čvorovima

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Dokazati da je

$$f' \left(x_k + \frac{h}{2} \right) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f'''(\xi)}{24}h^2, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}). \quad (7)$$

Rešenje: Uvedimo smenu:

$$\bar{x} = x_k + \frac{h}{2}.$$

Odavde je direktno:

$$x_k = \bar{x} - \frac{h}{2} \quad x_{k+1} = \bar{x} + \frac{h}{2}.$$

Primenjujemo Tejlorov razvoj funkcije u okolini tačke \bar{x} do trećeg stepena.

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f \left(\bar{x} - \frac{h}{2} \right) = f(\bar{x}) - \frac{f'(\bar{x})}{1!} \frac{h}{2} + \frac{f''(\bar{x})}{2!} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{f'''(\xi_1)}{3!} \left(\frac{h}{2} \right)^3, \quad \xi_1 \in [x_k, \bar{x}] \quad (8) \\ f(x_{k+1}) &= f \left(\bar{x} + \frac{h}{2} \right) = f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})}{1!} \frac{h}{2} + \frac{f''(\bar{x})}{2!} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!} \left(\frac{h}{2} \right)^3, \quad \xi_2 \in [\bar{x}, x_{k+1}] \quad (9) \end{aligned}$$

Oduzmimo (9) – (8) i, posle skraćivanja i deljenja sa h , dobija se:

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{48} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \quad (10)$$

Pošto funkcija $f(x)$ ima neprekidan treći izvod, to postoji tačka $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$ takva da je:

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$$

Konačno je

$$f' \left(x_k + \frac{h}{2} \right) = \frac{\Delta f(x_k)}{h} - \frac{f'''(\xi)}{24}h^2, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}).$$

□

Napomena 1.: U prethodnom zadatku Tejlorov red razvijamo do trećeg reda pošto se članovi drugog reda skraćuju.

Napomena 2.: Posmatrajmo formule (6) i (7). Prvi sabirak u obe formule predstavlja aproksimaciju $f'(x_k)$, tj. $f'(x_k + h/2)$, a drugi sabirak grešku formule diferenciranja (greška metode). Primetimo da je prvi izvod u obe tačke, x_k i $x_k + h/2$, aproksimiran istim izrazom, ali su greške približnih vrednosti koje se dobijaju tim aproksimacijama različite.

Napomena 3. Za korak h kažemo da je *optimalan korak interpolacije* (ili maksimalan korak interpolacije) ako funkcija ukupne greške $R(h)$ ima minimum u h .

10. Neka se vrednosti funkcije $f(x)$ mogu izraziti sa tačnošću ε i neka je $\max |f^{(n)}(x)| = M_n$. Naći optimalan korak h za numeričko diferenciranje po formuli:

a) $f'(x_k) \approx \frac{\Delta f_k}{h}$

b) $f'(x_k + \frac{h}{2}) \approx \frac{\Delta f_k}{h}$

c) $f''(x_k) \approx \frac{\Delta^2 f_{k-1}}{h^2} = \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2}$

Rešenje: a) U zadatku 2. smo dokazali formulu (6). (Pogledati Napomenu 2. iza Zadatka 9.) Dakle, ova aproksimacija važi. Nađimo optimalan korak h . Greška metode je (sledi iz Zadatka 9., pogledati Napomenu 2. iza zadatka 9!)

$$R_M = \left| -f''(\xi) \frac{h}{2} \right| \leq M_2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Greška računa je (sledi iz toga što su vrednosti funkcije date sa tačnošću ε , a iz Zadatka 7. je $f'(x_k) \approx \frac{\Delta f_k}{h} = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$)

$$r = \frac{2\varepsilon}{h}$$

Dakle, ukupna greška je

$$R(h) = R_M + r = M_2 \cdot \frac{h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$$

Tražimo h koje će da minimizuje grešku $R(h)$, tj.

$$R'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0$$

Sada je optimalan korak za numeričko diferenciranje ovom formulom

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{M_2}}.$$

b) Slično kao pod **a)**, a kao posledica Zadatka 9. i formule (7), imamo da je greška metode:

$$R_M = \frac{h^2 M_3}{24}$$

a greška računa

$$r = \frac{2\varepsilon}{h}$$

pa je ukupna greška:

$$R(h) = \frac{h^2 M_3}{24} + \frac{2\varepsilon}{h}.$$

Tražimo h koje će da minimizuje grešku $R(h)$, tj.

$$R'(h) = \frac{h M_3}{12} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0$$

Sada je optimalan korak za numeričko diferenciranje ovom formulom

$$\mathbf{h} = \sqrt[3]{\frac{24\varepsilon}{M_3}}.$$

c) Najpre dokažimo formulu

$$f''(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2} \quad (11)$$

Podimo od desne strane predložene formule:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2} &= \frac{1}{h^2} [f(x_k + h) - 2f(x_k) + f(x_k - h)] = \\ &= \frac{1}{h^2} [f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_k)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{4!}h^4 - \\ &\quad - 2f(x_k) + f(x_k) - \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_k)}{3!}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{4!}h^4]\end{aligned}$$

Ovde smo iskoristili razvoj funkcije u Tejlorov red u okolini tačke x_k do četvrtog reda.

$$\frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2} = f''(x_k) + \frac{h^2}{12}f^{IV}(\xi)$$

Pritom, $\xi_1 \in (x_{k-1}, x_k)$, $\xi_2 \in (x_k, x_{k+1})$. Ako funkcija $f(x)$ ima neprekidan četvrti izvod na intervalu $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, tada postoji tačka $\xi \in (x_{k-1}, x_{k+1})$ takva da važi:

$$\frac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{2} = f^{IV}(\xi).$$

Ovim smo dokazali predloženu formulu sa greškom metode:

$$R_M = \frac{h^2 M_4}{12}$$

i greškom računa

$$r = \frac{4\varepsilon}{h^2}$$

Ukupna greška je

$$R(h) = \frac{h^2 M_4}{12} + \frac{4\varepsilon}{h^2}.$$

Tražimo korak h koji minimizuje grešku:

$$R'(h) = \frac{hM_4}{12} - \frac{8\varepsilon}{h^3}.$$

Optimalan korak za numeričko diferenciranje po formuli (11) je

$$\mathbf{h} = \sqrt[4]{\frac{48\varepsilon}{M_4}}.$$

□

Napomena 4. Greška formule za numeričko diferenciranje se smanjuje sa smanjenjem koraka interpolacije h . U tom slučaju su aproksimaciju izvoda tačnije, pošto su čvorovi koje koristimo pri aproksimaciji bliži. S druge strane, vrednosti $f(x)$, $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2h)$ itd. postaju bliske za male vrednosti koraka h , pa dolazi do skraćivanja tih vrednosti u formulama za diferenciranje. U tom slučaju se povećava uticaj računске greške, pa ukupna greška raste. Zato je potrebno odrediti optimalan korak interpolacije h koji će obezbediti minimalnu grešku.

11. Neka se vrednosti funkcije mogu odrediti sa tačnošću ε i neka je $M_n = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|$.

Naći optimalan korak za numeričko diferenciranje po formuli

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})],$$

pri čemu su čvorovi ekvidistantni.

Rešenje: Koristimo razvoj funkcije u Tejlorov red u okolini tačke x_k . Čvorovi su ekvidistantni, tj. $x_{k+1} = x_k + h$, $x_{k+2} = x_k + 2h$. Podimo od desne strane predložene formule.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} [-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})] = \\ & \frac{1}{2h} \left[-3f(x_k) + 4 \left(f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(2h) + \frac{f''(x_k)}{2!}(2h)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(2h)^3 \right) \right] \\ & = \frac{1}{2h} \left[2f'(x_k)h - \frac{2}{3}f'''(\xi)h^3 \right] = f'(x_k) - \frac{1}{3}f'''(\xi)h^2 \end{aligned}$$

gde je $\xi \in [x_k, x_{k+2}]$ neka tačka. Dakle, dokazali smo formulu:

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})] \quad (12)$$

sa greškom metode $R_M = \frac{h^2 M_3}{3}$ i greškom računa $r = \frac{8\varepsilon}{2h}$. Tražimo optimalan korak h koji minimizuje ukupnu grešku $R(h) = R_M + r$, tj.

$$R'(h) = \frac{2}{3}hM_3 - \frac{4\varepsilon}{h^2} = 0.$$

Oдавde je optimalan korak h

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}}$$

□

12. Funkcija $f(x)$ tabelirana je korakom $h > 0$ u ekvidistantnim čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . Dokazati aproksimacije:

a) $f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4]$

b) $f'(x_1) = \frac{1}{12h} [-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4]$

c) $f'(x_2) = \frac{1}{12h} [f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4]$

gde je $f_k = f(x_k)$.

Rešenje: Koristimo I Njutnov interpolacioni polinom:

| x | y | Δf | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|-------|-------|-------------|--------------------|---------------------------|----------------------------------|
| x_0 | f_0 | $f_1 - f_0$ | $f_2 - 2f_1 + f_0$ | $f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$ | $f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$ |
| x_1 | f_1 | $f_2 - f_1$ | $f_3 - 2f_2 + f_1$ | $f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$ | |
| x_2 | f_2 | $f_3 - f_2$ | $f_4 - 2f_3 + f_2$ | | |
| x_3 | f_3 | $f_4 - f_3$ | | | |
| x_4 | f_4 | | | | |

I Njutnov interpolacioni polinom je oblika:

$$N_I(x) = f_0 + (f_1 - f_0)u + \frac{1}{2!}(f_2 - 2f_1 + f_0)(u^2 - u) + \frac{1}{3!}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)(u^3 - 3u^2 + 2u) +$$

$$+\frac{1}{4!}(f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)(u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 6u)$$

pri čemu je $u = \frac{x-x_0}{h}$. Nama treba aproksimacija prvog izvoda funkcije $f(x)$, pa koristimo izvod I Njutnovog interpolacionog polinoma:

$$N'_I(x) = \frac{1}{h} \left[f_1 - f_0 + \frac{1}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)(2u - 1) + \frac{1}{6}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)(3u^2 - 6u + 2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{24}(f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)(4u^3 - 18u^2 + 22u - 6) \right]$$

a) Tražimo procenu vrednosti $f'(x_0)$, pa zamenimo u gornju jednačinu $x = x_0$. U tom slučaju je $u = \frac{x-x_0}{h} = 0$, pa za $u = 0$, posle sređivanja poslednjeg izraza, dobijamo traženi izraz pod **a)**.

b) Slično kao pod **a)**, samo je sada $x = x_1$, a $u = \frac{x_1-x_0}{h} = 1$, pošto su čvorovi ekvidistantni, tj. $x_1 - x_0 = h$.

c) Sada je $x = x_2$, a $u = 2$. □