

Glava 1

Interpolacija

Osnovni problem interpolacije je egzistencija funkcije koja u tačkama x_k ima zadate vrednosti f_k . Tačke (x_k, f_k) nazivamo čvorovima interpolacije, a funkciju f interpolacionom funkcijom. Zbog jedinstvenosti polinomske funkcije, koja zadovoljava polazni uslov, najčešća intencija je da se formira funkcija polinomske tipa koja interpolira polaznu funkciju.

1.1 Interpolacija funkcije polinomima

Teorema 1. Neka je funkcija f zadata u $n + 1$ čvorova (x_k, f_k) , $k = 0, 1, \dots, n$. Tada postoji jedinstven polinom oblika

$$(1.1) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

takav da je

$$(1.2) \quad P_n(x_k) = f_k$$

Dokaz. Ako u jednokosti (1.1) zamenimo uslove (1.2) dobijamo sistem jednačina za određivanje koeficijenata a_0, a_1, \dots, a_n , koji glasi

$$\begin{aligned} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n &= f_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_1 + a_n &= f_1 \\ &\vdots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_n + a_n &= f_n \end{aligned}$$

odnosno u matičnom zapisu

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Kako je determinantna ovog sistema VANDERMONDOVA, koja ima vrednost $\prod_{i,j=0, i>j}^n (x_i - x_j) \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje, za koeficijente traženog polinoma.

1.2 LAGRANGEov interpolacioni polinom

Neka je funkcija f zadata u tačkama x_0, x_1, \dots, x_n , vrednostima f_0, f_1, \dots, f_n , pri čemu je $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $(n+1)$ puta diferencijabilna.

Posmatrajmo pomoćne funkcije:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

kao i funkciju

$$p_i(x) = \frac{1}{x - x_i} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Lako se uočava da je $p_i(x_k) = 0$ za $i \neq k$, odnosno $p_i(x_k) = 1$, za $i = k$. (Odnosno: $p_i(x_k) = \delta_{ik}$)

Funkcija

$$(1.3) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) f_i \equiv L_n(x), \text{ gde je } i = 0, 1, \dots, n$$

ima osobine da je $P_n(x_k) = f_k$, ($k = 0, 1, \dots, n$), što znači da jednakost (1.3) predstavlja interpolacioni polinom funkcije f , koji nazivamo LAGRANGEovim interpolacionim polinomom.

1.3 Opšta formula za grešku interpolacije

Postavlja se pitanje greške pri izračunavanju vrednosti funkcije u nekoj međutački x pomoću njenog interpolacionog polinoma.

Definicija 1. Greška interpolacije je definisana izrazom

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Teorema 2. Greška interpolacije funkcije f koja je $(n + 1)$ puta diferencijabilna ima oblik:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

gde je $M_{n+1} = \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$, gde je $a = \min\{x, x_0\}$, $b = \max\{x, x_n\}$.

Dokaz. Posmatrajmo pomoćnu funkciju

$$(1.4) \quad \varphi(s) = f(s) - P_n(s) - \frac{\Pi_{n+1}(s)}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

gde je $x \neq x_k$ (ako je $x = x_k$, greška je 0).

Nije teško uočiti da su x_0, x_1, \dots, x_n , kao i tačka x , nule funkcije $\varphi(s)$, jer je $f(x_k) - P_n(x_k) = 0$ i $\Pi_{n+1}(x_k) = 0$. Dakle, $\varphi(s)$ ima $(n + 2)$ nule, odakle na osnovu ROLLEove teoreme o srednjoj vrednosti zaključujemo da postoji ε za koje važi

$$(1.5) \quad \min\{x_0, x\} < \varepsilon < \max\{x_n, x\}$$

i za koje je

$$(5') \quad \varphi^{(n+1)}(\varepsilon) = 0.$$

Diferenciranjem jednakosti (4) po promenljivoj s i to $(n + 1)$ put dobijamo da je

$$(1.6) \quad \varphi^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - \frac{(n+1)!}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

jer je $P_n^{(n+1)}(s) = 0$ (polinom stepena n) i $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(s) = (n+1)!$ (polinom stepena $(n+1)$ sa vodećim koeficijentom jednakim 1).

Zamenom s sa ε iz (6) dobijamo, zbog (5') da je

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

Kako je $|f^{(n+1)}(\varepsilon)| \leq M_{n+1}$ tvrđenje je dokazano.

Napomena: Postavlja se pitanje da li tačka x u kojoj izračunavamo vrednost funkcije mora biti na intervalu $[x_0, x_n]$. Odgovor je „NE”. Ako je tačka unutar intervala reč je o interpolaciji, a ako je tačka van intervala reč je o ekstrapolaciji. U slučaju interpolacije jednakost (1.5) postaje $x_0 < \varepsilon < x_n$. Udaljavanjem tačke x od intervala povećava se greška računanja vrednosti funkcije.

1.4 Konačne razlike funkcije

Definišimo konačne razlike prvog reda (funkcija je zadata čvorovima (x_k, f_k)):

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

Konačne razlike višeg reda definišemo induktivno:

$$\begin{aligned} \text{II reda: } \Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III reda: } \Delta^3 f_i &= \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\ &= f_{i+3} - f_{i+2} - 2f_{i+2} + 2f_{i+1} + f_{i+1} - f_i \\ &= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \end{aligned}$$

...

$$n\text{-tog reda: } \Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i)$$

Osobine konačnih razlika:

$$1) \Delta(f_k - f_j) = \Delta f_k - \Delta f_j$$

$$2) \Delta(C \cdot f_k) = C \cdot \Delta f_k$$

Definisane konačne razlike neki autori nazivaju i konačnim razlikama unapred. Konačne razlike unazad, u iznaci $\nabla^k f_j$ mogu se definisati pomoću navedenih, sa $\nabla^k f_j = \Delta^k f_{j-k}$, te je u pitanju samo druga notacija.

1.5 NEWTONOVI interpolacionu polinomi

Neka je funkcija f zadana čvorovima (x_k, f_k) koji su ekvidistantni, tj. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \dots, n-1$.

I NEWTONov interpolacioni polinom je polinom oblika:

$$(1.7) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

gde su a_0, a_1, \dots, a_n koeficijenti koje treba odrediti. Kako mora važiti $P_n(x_k) = f_k$. Uzimajući da je $x = x_0$ dobijamo da je $a_0 = f_0 = \frac{\Delta^0 f_0}{0!h^0}$. Nastavljajući postupak za $x = x_1$ imamo da je $a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$ odakle zbog $x_1 - x_0 = h$ dobijamo da je $a_1 = \frac{f_1 - f_0}{h}$, odnosno $a_1 = \frac{\Delta^1 f_0}{1!h^1}$. Slično za $x = x_2$ nalazimo da je $f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{h}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$ odakle imajući u vidu da je $x_2 - x_0 = 2h$ i $x_2 - x_1 = h$ dobijamo da je $a_2 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$. Indukcijom dobijamo da je:

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Dakle, I NEWTONov interpolacioni polinom ima oblik:

$$(1.8) \quad N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

odnosno, uvodeći smenu $\frac{x-x_0}{h} = u$, imamo da je:

$$N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}u(u-1) \dots (u-n+1).$$

Napomena: $N_I(x)$ je dobro primeniti u slučaju kada se tačka x nalazi u prvoj polovini intervala $[x_0, x_n]$.

II NEWTONov interpolacioni polinom je oblika:

$$(1.9) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n) \dots (x - x_1),$$

gde su a_0, a_1, \dots, a_n koeficijenti koje treba odrediti. Uzimajući da je $x = x_n$ dobijamo da je $a_0 = f_n$, zatim za $x = x_{n-1}$ nalazimo da je $a_1 = \frac{\Delta f_{n-1}}{1!h^1}$. Za $x = x_{n-2}$ dobijamo da je $a_2 = \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!h^2}$. Indukcijom zaključujemo da je $a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$.

Dakle,

$$N_{II}(x) = f_n + \frac{\Delta^1 f_{n-1}}{1!h^1}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_n) \dots (x - x_1),$$

odnosno uzimajući smenu $v = \frac{x-x_n}{h}$ dobijamo da je:

$$N_{II}(x) = f_n + \frac{\Delta^1 f_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!}v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}v(v+1) \dots (v+n-1).$$

Postavlja se pitanje greške kod NEWTONovih interpolacionih polinoma? Greška je ista kao kod uopštene interpolacije. Ako nije poznat analitički oblik funkcije tada izraz $f^{(n+1)}(\xi)$ treba zameniti sa $\frac{\Delta^{n+1}(\xi)}{h^{n+1}}$, gde je $\Delta^{n+1}(\xi)$ maksimalna vrednost, po apsolutnoj vrednosti, konačne razlike $(n+1)$ reda.

1.6 Tablice konačnih razlika i greške u njima

Pretpostavljamo da je tabeliran polinom n -tog stepena. Tada konačne razlike reda $n+1, n+2, \dots$ moraju biti 0, jer bi u suprotnom polinom n -tog stepena mogao da se aproksimira polinomom većeg stepena od n , što je nemoguće.

Zadatak: Polinom $p_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p_3(x)$	-20	-5	1	1	4	15	40	85	156

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, odrediti taj podatak i odrediti polinom $p_3(x)$.

Rešenje: Konačne razlike funkcije predstavljene su u sledećoj tablici

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-9	3	6
-2	-5	6	-6	9	-4
-1	$0 \leftarrow 1$	$1 \leftarrow 0$	$2 \leftarrow 3$	$6 \leftarrow 5$	1
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Pretpostavljamo da je tablica za $x = 0$ i $x = 1$ tačna jer je $\Delta^4 p_3 = 0$. Na dobijene nule utiču vrednosti $p_3(x)$ u tačkama 0, 1, 2, 3, 4 i 5 te pretpostavljamo da su one tačne.

Prva vrednost funkcije koja utiče na dobijenu jedinicu u poslednjoj koloni je vrednost u tački $x = -1$ i pretpostavljamo da je ona netačna. Ispravljajući unazad tablicu dobijamo da je $p_3(-1) = 0$. Tako ispravljeno dobijamo da je

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-10	6	0
-2	-5	5	-4	6	0
-1	0	1	2	6	0
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Formirajmo NEWTONov interpolacioni polinom

$$\begin{aligned}
 N_I(x) &= -20 + 15(x+3) - 5(x+3)(x+2) + (x+3)(x+2)(x+1) \\
 &= -20 + 15x + 45 - 5x^2 - 25x - 30 + x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
 &= x^3 + x^2 + 1 \equiv p_3(x)
 \end{aligned}$$

1.7 Pitanje inverzne interpolacije

Postavlja se pitanje određivanja originala, ako je poznata vrednost funkcije. Suština je da se iz interpolacionog polinoma izvede iterativni proces koji konvergira.

Zadatak: Funkcija $y = f(x)$ data je tablicom. Odrediti x za koje je $f(x) = 2$.

Rešenje:

k	x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.65	1.91554	0.20146	0.02119	0.00216
1	0.75	2.11700	0.22265	0.02335	0.00253
2	0.85	2.33965	0.24606	0.02588	0.00272
3	0.95	2.58571	0.27194	0.02860	
4	1.05	2.85765	0.30054		
5	1.15	3.15819			

Kako $2 \in [1.91554, 2.11700] \Rightarrow x \in [0.65, 0.75]$ te ćemo uzeti I NEWTONov interpolacioni polinom za $h = 1$ i $u = \frac{x-0.65}{0.1}$,

$$N_I(x) = 1.91554 + \frac{0.20146}{1!}u + \frac{0.02119}{2!}u(u-1) + \frac{0.00216}{3!}u(u-1)(u-2) = 2$$

Formirajmo iterativni proces:

$$u = \frac{1}{0.20146} \left[2 - 1.91554 - \frac{0.02119}{2}u(u-1) - \frac{0.00216}{6}u(u-1)(u-2) \right]$$

odnosno $u = 4.96376[0.08446 - 0.00106u(u-1) - 0.0036u(u-1)(u-2)]$. Polazeći od $u_0 = 0$ dobijamo niz iteracija $u_1 = 0.41924$, $u_2 = 0.43136$, $u_3 = 0.43146$ i $u_4 = 0.43146 = u \Rightarrow x = 0.1u + 0.65 \Rightarrow x = 0.69315$

Napomena: Ovo je praktično tablica funkcije $f(x) = e^x$, dok je vrednost izraza $\ln 2$.