

Sistemi linearnih jednačina

Pretpostavimo da je potrebno rešiti sistem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

pri čemu je $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$, $j = \overline{1, \dots, n}$. Nastavljanjem postupka, polazni sistem svodimo na:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

Ako je matrica A regularna ($\det A \neq 0$), tada su svi $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, ($i = \overline{1, \dots, n}$), te je rešenje prethodnog sistema dato sa:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_j = \frac{1}{a_{jj}^{(j)}} \left(b_j^{(j)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} x_k \right), \quad j = \overline{1, \dots, n-1}$$

Mana izloženog GAUSSovog metoda eliminacije je što za izuzetno male $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$ dolazi do deljenja malim brojem, te su greške koje nastaju veoma velike. Zbog toga, imamo modifikaciju navedene metode, ali sada sa izborom glavnog elementa – *Pivota*.

4.2 GAUSSov metod eliminacije sa izborom glavnog elementa - Pivota

Postupak se sastoji u sledećem:

Pre transformacije polaznog sistema, tražimo $\max\{|a_{ij}|, i, j = \overline{1, \dots, n}\}$. Neka je to element $a_{i_p j_p}$, dakle u i_p -toj vrsti i j_p -toj koloni. Taj element nazivamo **Pivotom**. Množenjem i_p -te vrste sa $-\frac{a_{ij_p}}{a_{i_p j_p}}$, gde $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_p\}$ i dodavanjem ostalim vrstama elementi u j_p koloni u transformisanom sistemu postaju 0.

U novodobijenom sistemu od $n-1$ jednačine sa $n-1$ nepoznatom, bez nepoznate x_{j_p} ponavljamo postupak. Postupak se ponavlja sve dok ne ostane jednačina u kojoj se pojavljuje samo jedna promenljiva.

4.3 LU dekompozicija

Ideja LU dekompozicije je da se u sistemu $AX = B$, matrica A predstavi kao proizvod dve matrice oblika:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu dobijamo da se polazni sistem svodi na $(LU)X = B$, odnosno $L(UX) = B$, pri čemu označavajući $Y \equiv UX$, polazni sistem svodimo na dva trougaona sistema:

$$UX = Y, \quad LY = B$$

pri čemu prvo određujemo kolona matricu Y , a zatim kolona matricu X . Izvedimo takozvani CROUTov (**Krautov**) algoritam za LU dekompoziciju. Izjednačavanjem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dobijamo sistem jednačina:

I korak: $l_{11} = a_{11}$, $l_{21} = a_{21}, \dots, l_{n1} = a_{n1}$ (množenjem vrsta matrice L sa I kolonom matrice U).

II korak: $d_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$, $d_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \dots, d_{1n} = \frac{a_{1n}}{l_{11}}$ (množenjem I vrste matrice L sa kolonom matrice U)

III korak: $l_{22} = a_{22} - l_{21}d_{12}, \dots, l_{n2} = a_{n2} - l_{n1}d_{12}$ (množenjem vrsta matrice L sa II kolonom matrice U).

Dakle,

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_{kj}, \quad d_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}d_{kj} \right)$$

Napomena: Kako je $A = LU$ sledi

$$\det A = \det L \cdot \underbrace{\det U}_1 = \det L = l_{11} \cdots l_{nn}$$

4.4 Iterativne metode rešavanja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 &= b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n + c_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n + c_n \end{aligned}$$
$$(4.2) \quad X = BX + C$$

4.5 JACOBYev metod

$$(4.3) \quad X(k+1) = B \cdot X(k) + C, \quad X(k) = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Naravno postavlja se pitanje konvergencije ovako formiranog iterativnog procesa.

Definicija 1. Norma matrice A je realan broj, u oznaci $\|A\|$, sa osobinama:

- (1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|a \cdot A\| = |a| \cdot \|A\|$, ($a \in \mathbf{C}, A \in \mathbf{R}$)
- (3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \Rightarrow (4') \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n$
- (5) $|a_{ij}| \leq \|A\|$
- (6) $|a_{ij}| \leq |b_{ij}| \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$

Postoji nekoliko osnovnih normi definisanih nad matricama.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Sabiramo po vrstama i uzimamo maks.}$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Sabiramo po kolonama i uzimamo maks.}$$

$$\|A\|_3 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 1. Dovoljni uslovi konvergencije iterativnog procesa.

Ako je u iterativnom procesu (4.3), bilo koja norma matrice B manja od 1, tada iterativni proces konvergira ka rešenju sistema (4.2), koje glasi $X = (I - B)^{-1} \cdot C$.

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned} X(1) &= BX(0) + C \\ X(2) &= BX(1) + C \quad \text{odnosno } X(2) = B^2X(0) + BC + C \\ &\vdots \\ X(k+1) &= BX(k) + C \end{aligned}$$

Konačno:

$$X(k+1) = (I + B + \dots + B^k)C + B^{k+1}X(0)$$

Kako je

$$(I + B + \dots + B^k)(I - B) = I - B^{k+1} \Rightarrow (I - B^{k+1})(I - B)^{-1} = I + B + \dots + B^k.$$

Dakle

$$(4.4) \quad X(k+1) = (I - B^{k+1})(I - B)^{-1}C + B^{k+1}X(0)$$

Kako je $\|B\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B\|^{k+1} = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = 0$. Puštajući da $k \rightarrow \infty$ u (4.4) dobijamo da je

$$X = (I - B)^{-1}C,$$

što znači da iterativni proces konvergira ka rešenju sistema.

Teorema 2. Potrebni i dovoljni uslovi kovergencije iterativnog procesa.

Iterativni proces definisan sa (4.3) konvergira ka rešenju akko se sve sopstvene vrednosti matrice B po apsolutnoj strogo manje od 1.

4.6 GAUSS-SIEDELOV metod

Postavlja se pitanje da li se proces konvergencije može ubrzati. To se može učiniti tako što se u okviru jednog kruga iteracije koriste već dobijeni podaci iz prethodnog reda istog ciklusa. Naime, ako matricu B napišemo kao zbir dve matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \equiv B_1 + B_2$$

tada iterativni postupak možemo formirati pomoću:

$$(4.5) \quad X(k+1) = B_1 X(k+1) + B_2 X(k) + C,$$

koji brže konvergira od prethodnog, JACOBYjevog, iterativnog postupka.

Uslovi konvergencije GAUSS-SIEDELOvog i JACOBYjevog iteracionog postupka su ekvivalentni (dokazati za Domaći zadatak) samo je matrica čije λ -vrednosti treba da budu < 1 u ovom slučaju drugačija, tj. $\det(\lambda B_1 + B_2 - \lambda I) = 0$, odnosno λ su rešenja jednačine:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \lambda b_{21} & b_{22} - \lambda & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Objašnjenje: Iz iteracionog postupka (4.5) sledi da je:

$$(I - B_1) \cdot X(k+1) = B_2 \cdot X(k) + C,$$

odnosno:

$$X(k+1) = (I - B_1)^{-1}(B_2 \cdot X(k) + C),$$

te je u ovom slučaju iteraciona matrica, koja odgovara iterativnom postupku (4.2), matrica $(I - B_1)^{-1}B_2$ i njene sopstvene vrednosti treba da budu po apsolutnoj vrednosti < 1 , odnosno, sva rešenja sledeće jednačine treba da po apsolutnoj vrednosti budu manja od 1:

$$\begin{aligned} \det \left((I - B_1)^{-1}B_2 - \lambda I \right) = 0 &\Leftrightarrow \det \overbrace{(I - B_1)^{-1}}^1 \cdot \det \left(B_2 - \lambda(I - B_1) \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \left(B_2 - \lambda(I - B_1) \right) = 0 \end{aligned}$$