

5 Sistemi linearnih jednačina

Rešavamo sistem sa n jednačina i n nepoznatih:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

Ovaj sistem možemo da zapišemo u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

pri čemu je \mathbf{A} matrica dimenzije $n \times n$ čiji su elementi koeficijenti $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ vektor nepoznatih i $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ slobodan vektor.

5.1 Gausov metod eliminacije sa izborom glavnog elementa

Elementarnim transformacijama nad vektorima matrice \mathbf{A} dobićemo trougaonu matricu koja je njoj ekvivalentna i iz takvog oblika jednostavno dobijamo rešenje sistema jednačina.

19. Gausovom metodom sa izborom glavnog elementa (pivot) rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 1.1161x_1 + 0.1254x_2 + 0.1397x_3 + 0.1490x_4 &= 1.5471 \\ 0.1582x_1 + 1.1675x_2 + 0.1768x_3 + 0.1871x_4 &= 1.6471 \\ 0.1968x_1 + 0.2071x_2 + 1.2168x_3 + 0.2271x_4 &= 1.7471 \\ 0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 &= 1.8471 \end{aligned} \quad (3)$$

računajući sa 5 decimala.

Rešenje: Radi lakšeg računa, formiramo tabelu čije su prve 4 kolone odgovarajuće kolone matrice \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.1161 & 0.1254 & 0.1397 & 0.1490 \\ 0.1582 & 1.1675 & 0.1768 & 0.1871 \\ 0.1968 & 0.2071 & 1.2168 & 0.2271 \\ 0.2368 & 0.2471 & 0.2568 & 1.2671 \end{pmatrix}$$

Peta kolona tabele je slobodan vektor \mathbf{b} , a poslednja kolona je za množitelj α_i koji koristimo pri formiranju trougaone matrice.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	α_i
<i>I</i>	1.1161	0.1254	0.1397	0.1490	1.5471	$-\frac{0.1490}{1.2671} = -0.11759$
<i>II</i>	0.1582	1.1675	0.1768	0.1871	1.6471	$-\frac{0.1871}{1.2671} = -0.14766$
<i>III</i>	0.1968	0.2071	1.2168	0.2271	1.7471	$-\frac{0.2271}{1.2671} = -0.17923$
<i>IV</i>	0.2368	0.2471	0.2568	1.2671	1.8471	

Najpre tražimo glavni element, tj. pivot. Pivot je maksimalan, po apsolutnoj vrednosti, koeficijent $|a_{ij}|, i, j = 1, \dots, n$. Sada je to koeficijent $a_{44} = 1.2671$. Množitelj $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, biramo tako da se koeficijenti u koloni u kojoj se nalazi pivot anuliraju:

$$\alpha_i = -\frac{a_{i4}}{a_{44}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sada transformišemo jednačine I, II, III na sledeći način:

$$\begin{aligned} I' &= \alpha_1 \cdot IV + I = -0.11759 \cdot IV + I \\ II' &= \alpha_2 \cdot IV + II = -0.14766 \cdot IV + II \\ III' &= \alpha_3 \cdot IV + III = -0.17923 \cdot IV + III \end{aligned}$$

Koeficijenti ovih novih jednačina se dobijaju na sledeći način:

$$a'_{ij} = \alpha_i \cdot a_{4i} + a_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Iste transformacije vršimo i na slobodnoj koloni \mathbf{b} :

$$b'_i = \alpha_i \cdot b_4 + b_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	α_i
I'	1.08825	0.09634	0.10950	0	1.32990	$-\frac{0.10950}{1.17077} = -0.09353$
II'	0.12323	1.13101	0.13888	0	1.37436	$-\frac{0.13888}{1.17077} = -0.11862$
III'	0.15436	0.16281	1.17077	0	1.41604	

Jednačinu (tj. odgovarajuću vrstu matrice) u kojoj se nalazi pivot ne transformišemo, i iz nje više ne biramo pivot. Dalje ponavljamo postupak sa transformisanim jednačinama I', II', III' . Biramo pivot među koeficijentima ove tri jednačine. Sada je to $|a'_{34}| = 1.17077$, pa jednačinu III' ne transformišemo dalje. Transformišemo jednačine I' i II' :

$$\begin{aligned} I'' &= -0.09353 \cdot III' + I' \\ II'' &= -0.11862 \cdot III' + II' \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	α_i
I''	1.07381	0.08111	0	0	1.19746	$-\frac{0.08111}{1.11170} = -0.09353$
II''	0.10492	1.11170	0	0	1.20639	

Napokon, u poslednjem krugu pivot je $|a''_{22}| = 1.11170$ i sad je početna jednačina I transformisana u jednačinu I''' :

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	α_i
I'''	1.06616	0	0	0	1.10944	

Na ovaj način, početna matrica \mathbf{A} je transformisana u sličnu matricu \mathbf{C} koja je trougaona i njene vrste su koeficijenti jednačina iz kojih smo birali pivot, i to redom, I''', II'', III' i IV .

$$\begin{aligned} I''' &: 1.06616x_1 &= 1.10944 \\ II'' &: 0.10492x_1 + 1.11170x_2 &= 1.20639 \\ III' &: 0.15436x_1 + 0.16281x_2 + 1.17077x_3 &= 1.74710 \\ IV &: 0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 &= 1.8471 \end{aligned}$$

Oдавde se direktno dobijaju rešenja za nepoznate x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \frac{1.10944}{1.06616} = \mathbf{1.04059} \\ \mathbf{x}_2 &= \frac{1}{1.11170} [1.20639 - 0.10492x_1] = \mathbf{0.98697} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{1.17077} [1.41604 - 0.15436x_1 - 0.16281x_2] = \mathbf{0.93505}$$

$$\mathbf{x}_4 = \frac{1}{1.2671} [1.8471 - 0.2368x_1 - 0.2471x_2 - 0.2568x_3] = \mathbf{0.88129}$$

□

20. Odrediti inverznu matricu matrice \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

računajući sa 5 decimala.

Rešenje: Tražimo matricu \mathbf{A}^{-1} za koju je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, gde je \mathbf{I} jedinična matrica dimenzije 4×4 . Matrica \mathbf{A} može da se, elementarnim transformacijama nad vrstama, svede na matricu \mathbf{D} koja u svakoj vrsti i koloni ima po jedan nenula element.

Neka je matrica \mathbf{B} dobijena istim tim transformacijama nad matricom \mathbf{I} (transformacije kojima je matrica \mathbf{D} dobijena iz matrice \mathbf{A} .) Dakle,

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{D}, \quad \mathbf{I} \sim \mathbf{B}$$

Kako je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, zbog odgovarajućih sličnosti matrica, i s obzirom da su \mathbf{D} i \mathbf{B} dobijene istim transformacijama nad \mathbf{A} i \mathbf{I} , važiće:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Zbog toga što je \mathbf{D} matrica koja u svakoj vrsti i koloni ima po jedan nenula element, matricu \mathbf{D}^{-1} je lako odrediti.

Za dobijanje matrica \mathbf{D} i \mathbf{B} korišćemo Gausov metod za eliminaciju sa glavnim elementom, sa određenim modifikacijama. Sada ćemo svaki put da transformišemo sve vrste matrice \mathbf{A} , uz pravilo: *Ako smo pivot birali iz neke vrste, tu vrstu više ne uzimamo za izbor pivota.* Transformacije koje obavljamo nad vrstama matrice \mathbf{A} istovremeno obavljamo i nad odgovarajućim vrstama jedinične matrice \mathbf{I} . Množitelje za odgovarajuće vrste formiramo na isti način kao u predhodnom zadatku, kako bismo u koloni u kojoj se nalazi pivot dobili nule u ostalim vrstama. Formiramo tabelu:

x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	α_i
3	1	-1	2	1	0	0	0	$-\frac{1}{-5} = 0.2$
-5	1	3	-4	0	1	0	0	$-\frac{1}{-5} = 0.2$
2	0	1	-1	0	0	1	0	$-\frac{0}{-5} = 0.2$
1	-5	3	-3	0	0	0	1	
3.2	0	-0.4	1.4	1	0	0	0.2	0.66667
-4.8	0	3.6	-4.6	0	1	0	0.2	
2	0	1	-1	0	0	1	0	0.41667
1	-5	3	-3	0	0	0	1	0.20833
0	0	2.00001	-1.66668	1	0.66667	0	0.33333	-0.57143
-4.8	0	3.6	-4.6	0	1	0	0.2	-1.57714
0	0	2.50001	-2.91668	0	0.41667	1	0.08333	
0	-5	3.74999	-3.95832	0	0.20833	0	1.04167	-1.35713
0	0	0.57153	0	1	0.42857	-0.57143	0.28571	
-4.8	0	-0.34287	0	0	0.34285	-1.57714	0.06858	0.59992
0	0	2.50001	-2.91668	0	0.41667	1	0.08333	-4.37424
0	-5	0.35715	0	0	-0.35715	-1.35713	0.92858	-0.62490
0	0	0.57153	0	1	0.42857	-0.57143	0.28571	
-4.8	0	0	0	0.59992	0.59996	-1.91995	0.23998	
0	0	0	-2.91668	-4.37424	-1.45780	3.49957	-1.16643	
0	-5	0	0	-0.62490	-0.62496	-1.00004	0.75003	

Sada smo dobili matrice:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.57153 & 0 \\ -4.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.91668 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0.42857 & -0.57143 & 0.28571 \\ 0.59992 & 0.59996 & -1.91995 & 0.23998 \\ -4.37424 & -1.45780 & 3.49957 & -1.16643 \\ -0.62490 & -0.62496 & -1.00004 & 0.75003 \end{pmatrix}$$

Inverzna matrica matrice \mathbf{D} je:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 \\ 1/0.57153 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2.91668 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.20833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 1.74969 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.39286 & 0 \end{pmatrix}$$

Konačno, inverzna matrica matrice \mathbf{A} je:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.12498 & -0.12499 & 0.39998 & -0.05 \\ 0.12498 & 0.12498 & 0.20001 & -0.15001 \\ 1.74969 & 0.74986 & -0.99982 & 0.49990 \\ 1.49973 & 0.49981 & -1.19985 & 0.39992 \end{pmatrix}$$

□

5.2 LU dekompozicija

Rešavamo sistem (2). Predstavimo matricu \mathbf{A} kao proizvod donjetrougaone matrice \mathbf{L} i gornjetrougaone matrice \mathbf{U} koja na glavnoj dijagonali ima jedinice:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & d_{2n} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elementi matrica \mathbf{L} i \mathbf{U} se dobijaju pomoću sledećih formula (Krautov algoritam):

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_{kj} \quad (4)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}d_{kj} \right) \quad (5)$$

Sada sistem (2) postaje:

$$(\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Sada rešavamo 2 sistema jednačina, pri čemu uvodimo novi vektor nepoznatih \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Ova dva sistema se jednostavno rešavaju pošto su matrice \mathbf{L} i \mathbf{U} trougaone.

Determinanta. Kako je

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

pri čemu su \mathbf{L} i \mathbf{U} trougaone i matrica \mathbf{U} ima na glavnoj dijagonali jedinice, to je:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = \det \mathbf{L} \cdot 1 = l_{11} \dots l_{nn}$$

21. Metodom LU dekompozicije rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned} \quad (6)$$

računajući sa 6 decimala.

Rešenje:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formiramo tabelu:

3	1	-1	2	6
-5	1	3	-4	-12
2	0	1	-1	1
1	5	3	3	3
3 1	0.333333	-0.333333	0.666667	2
-5	2.666665 1	0.500001	-0.250000	-0.75
2	-0.666666	2.000000 1	-1.250000	-1.75
1	5.333333	6.000000	2.500000 1	3

U gornjem delu tabele upisujemo matricu \mathbf{A} i vektor \mathbf{b} . U donjem delu upisujemo matrice \mathbf{L} i \mathbf{U} (jedinice na dijagonali pripadaju matricu \mathbf{U} kao i gornji trougao, donji trougao su elementi matrice \mathbf{L}). U donjem delu tabele, ispod vektora \mathbf{b} , upisujemo vrednosti vektora \mathbf{y} koje dobijamo rešavajući jednačinu

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Najpre odredimo elemente matrica \mathbf{L} i \mathbf{U} . To radimo naizmenično i popunjavamo tablicu:

$$I. \quad l_{11} = a_{11} \quad l_{21} = a_{21} \quad l_{31} = a_{31} \quad l_{41} = a_{41}$$

$$II. \quad d_{ii} = 1$$

$$III. \quad d_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = 0.333333 \quad d_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = -0.333333 \quad d_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = 0.666667$$

$$IV. \quad l_{22} = a_{22} - l_{21}d_{12} = 2.666665 \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}d_{12} = -0.666666 \quad l_{42} = a_{42} - l_{41}d_{12} = 5.333333$$

$$V. \quad d_{23} = \frac{1}{l_{22}} (a_{23} - l_{21}d_{13}) = 0.500001 \quad d_{24} = \frac{1}{l_{22}} (a_{24} - l_{21}d_{14}) = -0.250000$$

$$VI. \quad l_{33} = a_{33} - l_{31}d_{13} - l_{32}d_{23} = 2.000000$$

$$l_{43} = a_{43} - l_{41}d_{13} - l_{42}d_{23} = 6.000000$$

$$VII. \quad d_{34} = \frac{1}{l_{33}} (a_{34} - l_{31}d_{14} - l_{32}d_{24}) = -1.250000$$

$$VIII. \quad l_{44} = a_{44} - l_{41}d_{14} - l_{42}d_{24} - l_{43}d_{34} = 2.500000$$

Kada smo našli matrice \mathbf{L} i \mathbf{U} možemo da rešimo sistem (pošto je \mathbf{L} trougaona matrica):

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$3y_1 = 2 \quad \Rightarrow y_1 = 2$$

$$-5y_1 + 2.666665y_2 = -12 \quad \Rightarrow y_2 = -0.75$$

$$2y_1 - 0.666666y_2 + 2.000000y_3 = 1 \quad \Rightarrow y_3 = -1.75$$

$$y_1 + 5.333333y_2 + 6.000000y_3 + 2.500000y_4 = 3 \quad \Rightarrow y_4 = 3$$

Vrednosti vektora \mathbf{y} upisujemo u tablicu u koloni ispod vektora \mathbf{b} .

Sada rešavamo sistem (opet je \mathbf{U} trougaona matrica):

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$x_4 = 3$$

$$x_3 = -1.75 + 1.25x_4 = 2$$

$$x_2 = -0.75 + 0.25x_4 - 0.500001x_3 = 1.000002$$

$$x_1 = 2 - 0.333333x_2 + 0.333333x_3 - 0.666667x_4 = 0.999999$$

Dobili smo rešenje:

$$\mathbf{x} = (0.999999, -1.000002, 2, 3).$$

Tačno rešenje je:

$$(1, -1, 2, 3).$$

□

5.3 Iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina

22. Iterativnim postupkom rešiti sistem

$$\begin{aligned} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.10x_3 &= 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 &= 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 &= 1.398 \end{aligned} \quad (7)$$

dok se rešenje ne poklopi na 4 decimale.

Rešenje: Zadatak ćemo rešiti Jakobijevom i Gaus-Zajdelovom metodom. Najpre proverimo uslov konvergencije iterativnog procesa (uslovi su isti za obe metode.) Dovoljno je da bude ispunjen jedan od uslova:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad (\forall j) \quad (8)$$

ili

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad (\forall i) \quad (9)$$

Pritom su a_{ij} odgovarajući koeficijenti uz nepoznate x_i . Dakle, dijagonalni element a_{ii} mora biti, po apsolutnoj vrednosti, veći od sume ostalih elemenata po apsolutnoj vrednosti u istoj vrsti ili koloni. Posmatrajmo koeficijente uz x_i po vrstama:

$$\begin{aligned} |-0.05| + |-0.10| &< |1.02| \\ |-0.11| + |-0.05| &< |1.03| \\ |-0.11| + |-0.12| &< |1.04| \end{aligned}$$

Dakle, za sistem jednačina (7) Jakobijeva i Gaus-Zajdelova iterativna metoda će konvergirati. Napišimo sistem (7) na drugačiji način:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{0.795}{1.02} + \frac{0.05}{1.02}x_2 + \frac{0.1}{1.02}x_3 \\ &= \\ x_2 &= \frac{0.849}{1.03} + \frac{0.11}{1.03}x_1 + \frac{0.05}{1.03}x_3 \\ &= \\ x_3 &= \frac{1.398}{1.04} + \frac{0.11}{1.04}x_1 + \frac{0.12}{1.04}x_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Iz oblika (10) ćemo formirati iterativni proces za obe metode.

Jakobijeva iterativna metoda: Iterativni proces formiramo iz (10) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{0.795}{1.02} + \frac{0.05}{1.02}x_2^{(k)} + \frac{0.1}{1.02}x_3^{(k)} \\
&= \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{0.849}{1.03} + \frac{0.11}{1.03}x_1^{(k)} + \frac{0.05}{1.03}x_3^{(k)} \\
&= \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1.398}{1.04} + \frac{0.11}{1.04}x_1^{(k)} + \frac{0.12}{1.04}x_2^{(k)}
\end{aligned} \tag{11}$$

Početne vrednosti $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ biramo proizvoljno, možemo uzeti vrednosti slobodne kolone iz jednačine (7), ili (10). Koristićemo vrednosti slobodne kolone iz jednačine (7). Formiramo tabelu iteracije:

k	x_1	x_2	x_3
0	0.795	0.849	1.398
1	0.9581	0.9770	1.5263
2	0.9769	1.0007	1.5583
3	0.9812	1.0042	1.5630
4	0.9819	1.0049	1.5639
5	0.9820	1.0050	1.5640
6	0.9820	1.0051	1.5641
7	0.9820	1.0051	1.5641

Jakobijevom metodom smo, posle 7 iteracija, dobili rešenje sistema (7)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0.9820} \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{1.0051} \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{1.5641}
\end{aligned}$$

Gaus-Zajdelova iterativna metoda: Iterativni proces formiramo iz (10) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{0.795}{1.02} + \frac{0.05}{1.02}x_2^{(k)} + \frac{0.1}{1.02}x_3^{(k)} \\
&= \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{0.849}{1.03} + \frac{0.11}{1.03}x_1^{(k+1)} + \frac{0.05}{1.03}x_3^{(k)} \\
&= \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1.398}{1.04} + \frac{0.11}{1.04}x_1^{(k+1)} + \frac{0.12}{1.04}x_2^{(k+1)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Za razliku od Jakobijeve metode, sada u jednoj iteraciji koristimo dobijene podatke u istoj iteraciji. Naime, za izračunavanje vrednosti $x_1^{(k+1)}$ koristimo poslednje izračunate vrednosti, a to su iz predhodne iteracije, $x_2^{(k)}$ i $x_3^{(k)}$. Za izračunavanje $x_2^{(k+1)}$ koristimo upravo izračunatu $x_1^{(k+1)}$, i iz predhodne iteracije $x_3^{(k)}$. Za $x_3^{(k+1)}$ koristimo u ovoj iteraciji izračunate $x_1^{(k+1)}$ i $x_2^{(k+1)}$.

Ovakav način izračunavanje značajno ubrzava proces konvergencije. Polazimo od istih početnih vrednosti $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ kao pri računanju Jakobijevom metodom, a to su elementi slobodne kolone iz (7).

k	x_1	x_2	x_3
0	0.795	0.849	1.398
1	0.9581	0.9945	1.5603
2	0.9811	1.0048	1.5639
3	0.9820	1.0051	1.5641
4	0.9820	1.0051	1.5641

Gaus-Zajdelovom metodom smo, posle 4 iteracija, dobili rešenje sistema (7)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{0.9820} \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{1.0051} \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{1.5641} \end{aligned}$$

Postignuta tačnost je ista, ali je postignuta brža konvergencija u korist Gaus-Zajdelove metode. \square

23. Gaus-Zajdelovom metodom rešiti sistem:

$$\begin{aligned} 8.3x_1 + 7.7x_2 - 0.3x_3 &= 27.10 \\ 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 &= 16.55 \\ 3.4x_1 + 4.0x_2 + 5.7x_3 &= 27.35 \end{aligned} \tag{13}$$

računajući sa 4 decimale.

Rešenje: Ni jedan od uslova konvergencije iterativne metode (8) i (9) nije ispunjen. Transformišimo sistem jednačina (13) tako da bude ispunjen uslov (9), dakle da koeficijent a_{ii} uz nepoznatu x_i bude, po apsolutnoj vrednosti, veći od sume apsolutnih vrednosti ostalih koeficijenata $a_{ij}, j \neq i$, u istoj jednačini (tj. vrsti.)

Označimo jednačine sistema (13) redom sa I, II, III . Problem imamo sa jednačinama II i III . Transformišimo ovaj sistem na sledeći način:

$$\begin{aligned} (II) : \quad 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 &= 16.55 \quad (A) \\ (I - II) : \quad 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 &= 10.55 \quad (B) \\ (III) : \quad 3.4x_1 + 4.0x_2 + 5.7x_3 &= 27.35 \quad (C) \end{aligned} \tag{14}$$

Označimo gornje jednačine redom sa A, B, C . Sada imamo problem još sa jednačinom C , pa ćemo da je transformišmo:

$$\begin{aligned} (A) : \quad 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 &= 16.55 \\ (B) : \quad 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 &= 10.55 \\ (C - B) : \quad 1.2x_1 - 1.5x_2 + 7.2x_3 &= 16.80 \end{aligned} \tag{15}$$

Sada rešavamo sistem (15) koji je ekvivalentan sa sistemom jednačina (13). Ovaj sistem zadovoljava uslov konvergencije (9). Formiramo iterativni proces iz jednačina (15) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= & \frac{-2.2}{6.1} x_2^{(k)} & + \frac{-1.2}{6.1} x_3^{(k)} & + \frac{16.55}{6.1} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{-2.2}{5.5} x_1^{(k+1)} & & + \frac{1.5}{5.5} x_3^{(k)} & + \frac{10.55}{5.5} \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{-1.2}{7.2} x_1^{(k+1)} & + \frac{1.5}{7.2} x_2^{(k+1)} & & + \frac{16.80}{7.2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Pri računu koristimo poslednje izračunate vrednosti za x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= & -0.3606 x_2^{(k)} & - 0.1967 x_3^{(k)} & + 2.7131 \\
x_2^{(k+1)} &= -0.4000 x_1^{(k+1)} & & + 0.2727 x_3^{(k)} & + 1.9182 \\
x_3^{(k+1)} &= -0.1667 x_1^{(k+1)} & + 0.2083 x_2^{(k+1)} & & + 2.3333
\end{aligned} \tag{17}$$

Za početne vrednosti iteracije možemo uzeti slobodnu kolonu iz sistema jednačine (17), tj.

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}] = [2.7131, 1.9182, 2.3333]$$

Posle 8 iteracija, koristeći jednačine (17), dobija se rešenje:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{1.5000}, \mathbf{2.0000}, \mathbf{2.5000}]$$

□