

UNIVERZITET U TUZLI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Nermin Okičić

Elementi matematičke logike

- Predavanja 2009/2010 -

Tuzla, 2010

Sadržaj

1	O matematičkim teorijama	1
1.1	Definicije	3
1.2	Aksiome	4
1.3	Teoreme i dokazi	6
1.4	Izgradnja aksiomatske teorije	10
2	O formalnim teorijama	13
2.1	Definicija formalne teorije	14
2.2	Iskazna logika kao formalna teorija	16
2.3	Predikatska logika kao formalna teorija	20
2.4	Jedan primjer formalizovane teorije	23

Poglavlje 1

O matematičkim teorijama

Izgradnja matematičkih disciplina zasniva se na nekim zajedničkim polaznim principima. Ti principi vode porijeklo još iz doba Euklidovih *Elemenata*, napisanim oko 300 godine prije nove ere. Još u to vrijeme geometrija kao disciplina je bila izložena kao aksiomatska teorija.

Prilikom izgradnje neke *aksiomatske teorije* najprije radimo sljedeće:

- Jedan broj pojmova (termina) teorije proglašavamo za osnovne pojmove ili primitivne pojmove - pojmove koji se ne definišu.
- Jedan broj tvrdjenja teorije proglašavamo za *aksiome* - tvrdjenja koja se ne dokazuju.
- Navodimo *pravila logičkog zaključivanja* - pravila koja smijemo koristiti pri dokazivanju tvrdjenja u toj teoriji.

Zašto u aksiomatskoj teoriji postoje pojmovi koji se ne definišu i tvrdjenja koja se ne dokazuju?

Definicija nekog pojma znači objašnjenje njegovog značenja korišćenjem nekih drugih pojmova. Međutim, i značenje tih drugih pojmova se određuje definicijama u kojima se pojavljuju neki novi pojmovi, ovi se opet definišu preko novih pojmova itd. Pri tome ne smijemo doći u situaciju da je, neposredno ili posredno, u definiciju bilo kog od tih pojmova uključen i sam pojam koga definišemo. Drugačije rečeno, mora se izbjeći kružno kretanje u definiciji (*circulus viciosus*). Ako želimo da izbjegnemo *circulus viciosus*, dolazimo do takozvanog *beskonačnog regresa* - beskonačne hijerarhije sve novih i novih pojmova. Npr. : Skup je kolekcija elemenata, kolekcija je familija elemenata, familija je sveukupnost elemenata, itd.

Ovaj beskonačni regres se može izbjeći samo ako se dogovorimo da neke od pojmova u datoj teoriji ne definišemo, tj. proglašavamo ih za *osnovne* ili *primitivne pojmove*.

Sličnu situaciju imamo i kod dokaza. Tvrdjenja dokazujemo polazeći od nekih drugih tvrdjenja, pa se "vrćenje u krug" i beskonačni regres u dokazima mogu izbjeći samo tako što neka tvrdjenja date teorije nećemo dokazivati - proglašavamo ih za aksiome, tvrdjenja koja se ne dokazuju.

O značenju polaznih pojmova obično postoji jasna intuitivna predstava. Mogli bi reći i da se osnovni pojmovi ne definišu eksplicitno, ali su implicitno definisani sistemom aksioma.

Što se tiče aksioma, često se može sresti mišljenje da su aksiome očigledne istine, što je poprilično netačno. Na primjer, jedna od aksioma Euklidove geometrije je i takozvani Peti postulat koji glasi: *Ako su dati prava i tačka van te prave, onda postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je datoj pravoj (nema zajedničkih tačaka sa tom pravom).*

Ova aksioma je sve do 19. vijeka smatrana za očiglednu istinu, za zakon koji važi u realnom svijetu. Međutim, u prvoj polovini 19. vijeka pojavile su se geometrije u kojima je Peti postulat zamijenjen drugačijim aksiomama.

Geometrija Lobačevskog mijenja Peti postulat sa:

Ako su data prava i tačka van te prave, onda postoje najmanje dvije prave koje prolaze kroz tu tačku i paralelne su datoj pravoj.

Naknadno se pokazuje da takvih pravih ima beskonačno mnogo.

Riemmanova sferna geometrija uvodi aksiom

Ako su dati prava i tačka van nje, onda ne postoji niti jedna prava koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je sa datom pravom.

Drugim riječima, u ovoj geometriji se svake dvije prave sijeku.

Pokazalo se da su ove geometrije logički jednako ispravne kao i Euklidova, a kasnije su pronadjene i važne primjene ovih geometrija u drugim naukama.

Nove pojmove uvodimo definicijama, polazeći od osnovnih pojmova i već definisanih pojmova. Teoriju razvijamo tvrdjenjima, odnosno *teoremama*, koja se na osnovu pravila zaključivanja dokazuju iz aksioma i iz već dokazanih teorema. U dokazivanju se ne koriste iskustva niti ubjedjenja, ma koje vrste, već isključivo logička pravila. To znači da je navedeni metod razvijanja teorije deduktivan: novi pojmovi i tvrdjenja izvode se, dedukuju, iz već usvojenih, a na osnovu logičkih zakona. Uvodjenje i upotreba navedenih pojmova i postupaka u matematici proučavaju se u okviru matem-

atičke logike. Tome su posvećena prethodna izlaganja, a sada ćemo dati pojašnjenja pojedinih pojmova, kao i primjere.

1.1 Definicije

Nove pojmove, kako smo već spomenuli, uvodimo pomoću rečenica koje nazivamo *definicije*. Definicijom se dakle uvodi jedan novi termin (simbol) koji je doveden u vezu sa već uvedenim ili polazno uzetim simbolima. Definicija se sastoji iz dva dijela: termin koji definišemo naziva se *definiendum*, a dio kojim se on definiše nazivamo *definiens*.

Primjer 1.1. Posmatrajmo slijedeće definicije:

- Romb je paralelogram sa jednakim stranicama.
- Dvije prave su mimoilazne ako ne pripadaju istoj ravni.
- Paran broj je cijeli broj koji je djeljiv sa 2.

U prvoj definiciji definiendum je "romb", a definiens je "paralelogram" sa jednakim stranicama; u drugoj definiciji definiendum je "mimoilazne prave", a definiens "prave koje ne pripadaju istoj ravni". \diamond

Kada pravimo definiciju, pri izboru novog simbola (novog imena) imamo veliku slobodu; naime novo ime može biti ma koji pojam prethodno neupotrijebljen. Na primjer:

Broj n je lijep ako je n^2 djeljiv sa 5.

Broj n je dobar ako je n^2 djeljiv sa 5.

U ovim definicijama između definiensa i definienduma stoji "ako" umjesto "ako i samo ako". Ovo se opravdava samo stilskim razlozima, međutim treba istaći da je jedino pravilna upotreba izraza "ako i samo ako".

Ispravna definicija je *otklonjiva* i *nekreativna*. Prvo svojstvo znači da umjesto svake rečenice (formule) u kojoj se javlja novi pojam, može da se formuliše druga rečenica istog smisla, u kojoj se taj pojam ne javlja. Osobina nekreativnosti znači da ispravna definicija ne omogućava dokaz tvrdjenja koje se bez nje ne bi moglo dokazati. Definicije koje su otklonjive i nekreativne nazivamo *korektnima*, u

1.2. Aksiome

suprotnom one su *nekorektne*. Primjer nekorektne definicije bi mogao biti:

U skupu cijelih brojeva definišemo operaciju "*" na sljedeći način:

$$n * m = x \text{ ako i samo ako } x > 10 .$$

Naravno da je ovo nekorektno jer $2 * 3 = 11$ i $2 * 3 = 12$ bi dovelo do toga da je $11=12$.

Čest oblik definicija je logička ekvivalencija, tj. rečenica oblika

$$A \text{ ako i samo ako } B \quad \text{ili kao formula} \quad A \stackrel{def}{\iff} B.$$

Ovdje su rečenice A i B formule koje redom sadrže definiendum i definiens.

Nove pojmove uvodimo i putem jednakosti, koristeći posebne oznake:

$$p \stackrel{def}{=} q \quad \text{ili, sa istim značenjem} \quad p := q.$$

Ovde su p i q izrazi koji redom sadrže definiendum i definiens. Smisao ovakvih rečenica je: " p je zamjena za q ".

Primjer 1.2. Primjeri definicija prema gornjim oznakama mogu biti:

- p dijeli q ako i samo ako postoji $r \in \mathbb{N}$, takav da je $pr = q$.
- $p|q \stackrel{def}{\iff} (\exists r \in \mathbb{N}) pr = q$.
- $a = \max A \stackrel{def}{\iff} a \in A \wedge (\forall x \in A) x \leq a$.
- $\binom{n}{k} \stackrel{def}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $n \in \mathbb{N}_0, \quad n! \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & ; \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 & ; \quad n = 0 \end{cases}$

◇

1.2 Aksiome

U formiranju neke teorije, nakon što se daju osnovni, primitivni pojmovi, navode se osnovne tvrdnje o datim primitivnim pojmovima, koje smatramo istinitim. U matematici i logici, to su načela za

koja se, bez dokazivanja, smatra da su istinita. Te tvrdnje koje ne dokazujemo nazivamo aksiomama.

Po Aristotelu, nauka mora biti okarakterisana ne samo istinitošću rečenica koje je čine, nego i njihovom uređjenošću. Euklid u svojim "Elementima" aksiomatizira Geometriju, gdje pod "opštim načelima" navodi 23 definicije, 5 postulata i 5 "opštih ideja". Npr. "opšta ideja" je

Cjelina je veća od svakog svog dijela.

Spinoza¹ u svom djelu "Ethica more geometrico demonstrata", zadaje grandiozni filozofski sistem u aksiomatskom obliku. Jedna od aksioma jeste

Sve što jest, jest u sebi ili u drugome.

Aksiomatski način razmišljanja proteže se i izvan filozofije. U američkoj Deklaraciji nezavisnosti (1776) tvrdnja o ljudskim pravima se shvaća kao aksiom (obratimo pažnju na riječ "self-evident").

We hold these truths to be self-evident, that all man are created equal, that they are endowed by their Creator with certain unalienable Rights, that among these are Life, Liberty and the pursuit of Happiness.

Aksiomi moraju zadovoljavati sljedeća tri principa:

- *Konzistentnost.* Ovo znači da se iz zadatog sistema aksioma ne smije moći dokazati neka tvrdnja i njena negacija istovremeno.
Ne postoji rečenica P , takva da je dokazivo P i da je dokazivo $\neg P$.
- *Potpunost.* Svako tvrdjenje ili njegova negacija (što je opet tvrdjenje), se može dokazati u datom sistemu aksioma.
Za svaku rečenicu P vrijedi, ili je dokazivo P ili je dokazivo $\neg P$.
- *Nezavisnost.* Niti jedan od aksioma se ne može dobiti iz ostalih aksioma navedenog sistema, tj.
niti jedan aksiom se ne može dokazati polazeći od skupa aksioma iz koga je on uklonjen.

Tradicionalno se aksiomi shvaćaju kao istine jasne same po sebi (samo-evidentne istine). U novije vrijeme taj koncept samo-evidentnosti

¹Benedikt de Spinoza (1632-1677), holandski filozof

je napušten, a razlozi za to leže u racionalističkoj pristrasnosti takvog pojma i činjenici da on uključuje nepouzdana psihološka obilježja.

1.3 Teoreme i dokazi

Kada izaberemo polazne stavove - aksiome neke matematičke teorije, onda se iz njih izvode nova tvrđenja. U terminološkom smislu, *teorema*, *tvrđenje* i *stav* imaju isto značenje, dok je *lema* (lemma) pomoćno tvrđenje tehničkog karaktera. Tvrđenje koje neposredno slijedi iz nekog drugog tvrđenja, formuliše se kao *posljedica* ili *ko-rolar*.

Izvođenje (dedukcija) novog tvrđenja je njegov *dokaz* i u smislu tog izvođenja, tvrđenje slijedi iz aksioma. U izvođenju se mogu koristiti i već dokazana tvrđenja, ali je njih, zajedno sa aksiomama, u jednom dokazu uvijek samo konačno mnogo.

Zaključivanje se zasniva na zakonima logičkog mišljenja i raznim logičkim i matematičkim pravilima izvođenja. Formalizovani oblici tih formi zaključivanja jesu tautologije i valjane formule.

Navedimo sada neke načine dokazivanja.

I Najčešći način dokazivanja je *direktni dokaz*. Treba dokazati implikaciju $p \Rightarrow q$. Pretpostavimo tačnost iskaza p , a zatim nekim "elementarnim" transformacijama pokažemo istinitost iskaza q .

Primjer:

Dokazati tvrdnju:

Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi,

ako je $n \equiv 3 \pmod{4}$ onda je $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Dokaz: Neka je n prirodan broj takav da je $n \equiv 3 \pmod{4}$, tj. $n = 4k + 3$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k + 3)^2 \\ &= 16k^2 + 24k + 9 \\ &= 16k^2 + 24k + 8 + 1 \\ &= 4(4k^2 + 6k + 2) + 1 \\ &= 4k' + 1 \text{ za neko } k' \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi, $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

II Svodjenje na apsurd (*reductio ad absurdum*)

Odgovarajuća tautologija obično se prevodi u ekvivalentnu formulu

$$((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) ,$$

u kojoj je C neka kontradikcija tj. iskaz čija je istinitost uvijek netačna. Ovaj metod ilustrujemo dokazom poznatog tvrđenja.

Primjer:

Ne postoji racionalan broj čiji je kvadrat broj 2.

Dokaz : Polazimo od rečenica

$$A : \frac{p}{q} \text{ je razlomak} \quad , \quad B : \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da se ovaj razlomak ne može skratiti. Pretpostavljamo dakle da je tačan iskaz

C' : cijeli brojevi p i q ($q \neq 0$) su uzajamno prosti.

Iz gornjih formula izvodimo $\frac{p^2}{q^2} = 2$, odnosno $p^2 = 2q^2$. Zaključujemo da je broj p^2 djeljiv sa 2, a to onda znači da je i broj p djeljiv sa 2. Zato imamo $p = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Odatle je onda $(2k)^2 = 2q^2$, tj. $4k^2 = 2q^2$ ili što je isto $q^2 = 2k^2$, pa kao i malo prije zaključujemo da je broj q djeljiv sa 2. Dobili smo zaključak:

C'' : cijeli brojevi p i q su parni.

Tako smo iz formule $A \wedge B$ izveli kontradikciju $C' \wedge C''$, označimo je sa C .

Na osnovu navedenog zakona zaključujemo da važi formula $\neg B$, tj. tačna je formula:

$A \Rightarrow \neg B$: ako je $\frac{p}{q}$ razlomak, onda je njegov kvadrat različit od 2. Navedeno tvrđenje je dakle tačno. ♣

III Zakon kontrapozicije ili indirektan dokaz

Tautologija

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

omogućuje da se implikacija $A \Rightarrow B$ zamjeni logički ekvivalentnom formulom $\neg B \Rightarrow \neg A$, koja može biti pogodnija za

upotrebu.

Naprimjer, *funkcija je injektivna ako zadovoljava uslov da su slike različitih originala različite*, tj.

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) .$$

Na osnovu kontrapozicije ovaj uslov se često koristi u ekvivalentnom obliku

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y .$$

Dakle, ako je neko tvrdjenje iskazano u obliku *iz A slijedi B*, dokaz je na osnovu kontrapozicije ispravan ako se pokaže da *iz $\neg B$ slijedi $\neg A$* .

Ilustrujmo gornje jednim primjerom iz teorije brojeva.

Primjer:

Ako je zbir $a+b$ negativan ili nula, onda je bar jedan od tih brojeva negativan ili nula.

Tvrđenje je u obliku implikacije čiji je konsekvent disjunkcija, pa je prema zakonu kontrapozicije i De Morganovim zakonima ekvivalentno sa sljedećim tvrđenjem:

Ako su a i b pozitivni brojevi, onda je i njihov zbir pozitivan broj. Ovaj iskaz je onda poznato svojstvo cijelih brojeva i lahko se dokazuje.

IV Dokaz tvrđenja može imati strukturu

iz A_1 slijedi A_2 , iz A_2 slijedi A_3 , ... , iz A_{n-1} slijedi A_n .

Ovo simbolički možemo označiti sa

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n .$$

Radi se o kraćem načinu da se zapiše tranzitivnost implikacije, koja predstavlja tautologiju

$$((A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n)) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n) .$$

Da bi se naglasilo kako je riječ o kraćem zapisu tekstualne rečenice, a ne o iskaznoj formuli, implikacija je označena sa " \rightarrow ".

Na primjer, niz implikacija

$$\begin{aligned} (2|x \wedge 5|x) &\rightarrow (x = 2m \wedge x = 5n) \\ &\rightarrow (5x = 10m \wedge 4x = 20n) \\ &\rightarrow (x = 10(m - 2n)) \\ &\rightarrow 10|x , \end{aligned}$$

1.3. Teoreme i dokazi

na osnovu posljednje tautologije, predstavlja dokaz tvrdjenja:
Ako je cijeli broj djeljiv sa 2 i 5, djeljiv je i sa 10.

V Ima teorema gdje dokazujemo ekvivalentnost iskaza A_1, A_2, \dots, A_n , tj. tačnost formula $A_i \Leftrightarrow A_j$, za sve (različite) i i j . Ove ekvivalencije dokazuju se nizom

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1 .$$

Postupak se zasniva na već spomenutoj tranzitivnosti implikacije, kao i na tautologiji

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) .$$

Navedimo jednostavan primjer.

Primjer:

Ako je n prirodan broj, onda su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

- (i) n je djeljiv sa 30;
- (ii) n je djeljiv sa 6 i sa 5;
- (iii) zbir cifara broja n djeljiv je sa 3 i cifra jedinica mu je 0.

Za vježbu ostavljamo dokaz ovog tvrdjenja u sljedećem nizu:

$$(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i) ,$$

pri čemu se u svakoj od implikacija može koristiti zakon kontrapozicije.

VI Izvodjenje ili dokaz mogu imati strukturu produžene ekvivalencije:

A_1 ako i samo ako A_2 ako i samo ako ... ako i samo ako A_n ,

gdje se u stvari pokazuje tačnost ekvivalencije $A_1 \Leftrightarrow A_n$. Ispravnost postupka slijedi iz činjenice da je gore samo kraće zapisano tvrdjenje

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2) \wedge (A_2 \Leftrightarrow A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Leftrightarrow A_n) ,$$

na osnovu zakona asocijativnosti za konjukciju. Na ovo se sada uzastopno primjenjuje tranzitivnost ekvivalencije, tj. tautologija

$$((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C) ,$$

1.4. Izgradnja aksiomatske teorije

te se dobija gornji niz.

Primjer:

Kada rješavamo neku linearnu jednačinu nad poljem realnih brojeva, npr.

$$\frac{3x+2}{6} = 2x ,$$

radi se na opisani način, jer se jednačina (formula) zamjenjuje ekvivalentnom jednačinom, sve do one u kojoj se rješenje neposredno nalazi:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{6} = 2x & \text{ ako i samo ako } 3x+2 = 12x \\ & \text{ ako i samo ako } 2 = 9x \\ & \text{ ako i samo ako } x = \frac{2}{9} , \end{aligned}$$

pa je rješenje jednačine $x = \frac{2}{9}$.

Umjesto teksta "ako i samo ako" koristi se i skraćenica *akko*, ili simbol ekvivalencije " \leftrightarrow ".

U narednom primjeru demonstrirat ćemo upotrebu valjanih formula u izvodjenju. Dokažimo tvrdnju:

Ne postoji najveći prirodan broj.

Ovaj stav možemo zapisati sljedećom formulom:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) y \leq x .$$

Kako je formula

$$\neg(\exists x)(\forall y)F \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\neg F$$

valjana, to je gornje tvrdjenje ekvivalentno sa formulom

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y > x .$$

Ovo je tačno, jer traženi broj zaista postoji i to je za $n \in \mathbb{N}$ njegov sljedbenik $n' = n + 1$.

1.4 Izgradnja aksiomatske teorije

Iako počinje od aksioma, aksiomatskoj teoriji u matematici obično prethode neke druge discipline koje ova koristi. Tu svakako spada matematička logika, prije svega zakoni logičkog zaključivanja. Ako se teorija izlaže neformalno (a većinom je tako u udžbenicima),

onda se ti zakoni podrazumijevaju. Što se više koristi jezik formula, to se dosljednije primjenjuju iskazna i predikatska logika.

Svim matematičkim disciplinama prethodi i teorija skupova, uključujući obično i relacije i funkcije. Za teoriju grupa, na primjer, toliko je dovoljno. Za neke druge discipline to je drugačije, geometrija koristi aritmetiku, aksiomatska izgradnja teorije realnih brojeva zasniva se na algebarskim strukturama i slično.

Aksiomatska teorija izgrađuje se tako da bude *neprotivuriječna* (*saglasna*). To znači da se u njoj ne mogu dokazati tvrdjenje P i njegova negacija $\neg P$ istovremeno.

Ista aksiomatska teorija može biti predstavljena različitim skupovima aksioma. Tako se *Aksiom potpunosti* u aksiomatizaciji realnih brojeva može zamjeniti *Dedekindovim* i *Arhimedovim aksiomom*.

Skup aksioma je *nezavisan* ako se niti jedan od njih ne može dokazati pomoću preostalih.

Napomenimo još da se aksiomatske teorije mogu izgrađivati i uz dosljednu primjenu formalne logike, bez oslanjanja na smisao pojmova, dakle strogo sintaksički. To su takozvane *formalne teorije*, o kojima ćemo govoriti u narednom dijelu.

Navedimo sada jedan primjer kako se izgrađivala jedna aksiomatizacija, aksiomatizacija teorije skupova.

U svojim prvim istraživanjima teorije skupova, njen tvorac Cantor, nije se eksplicitno pozivao na neke aksiome o skupovima. Međutim, analizom njegovih dokaza može se zaključiti da se skoro sve teoreme koje je on dobio mogu izvesti iz sljedećih aksioma:

- (a) Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.
- (b) Za unaprijed zadato svojstvo postoji skup čiji su elementi baš oni koji imaju to svojstvo (Aksiom apstrakcije).
- (c) Za svaki neprazan skup, postoji bar jedna funkcija čiji su originalni neprazni podskupovi tog skupa, a slike su elementi originala (Aksiom izbora).

Aksiom apstrakcije je prvi formulisao G. Frege (1893), da bi B. Russell 1901. godine iz te aksiome izveo kontradikciju kojom je pokazano da je ta teorija protivuriječna. On je definisao svojstvo skupa svih onih skupova koji nisu sami sebi elementi. Postojanje takvog skupa dovodi do protivuriječnosti, te je dati aksiom bio "pogrešan".

Poslije su otkriveni još neki paradoksi (Burali-Forti u teoriji ordinalnih brojeva, Cantor u teoriji kardinalnih brojeva). Iako su

1.4. Izgradnja aksiomatske teorije

matematičari bili složni po pitanju neophodnosti izmjena u samim osnovama matematike, po pitanju načina tih izmjena došlo je do dubokih razmimoilaženja. Tako su formalisti zagovarali strogu aksiomatsku bazu iz koje će slijediti svi rezultati Cantorove teorije, a onemogućuju paradokse, što je dovelo do komplikovanja i složenosti mnogih rezultata. Nasuprot njima, intuicionisti postavljaju drugačije osnove kojima se takodje izbjegavaju paradoksi ali se zato dovode u pitanje čitave grane klasične matematike. Pored ovih razvijaju se i druge aksiomatske teorije, ali se ni za jednu od njih ne zna da li je neprotivurječna.

Poglavlje 2

O formalnim teorijama

Kao što smo rekli u dijelu o matematičkim teorijama, matematičke discipline se mogu posmatrati i *potpuno formalno*, tj. *sintaksički*. U takvom pristupu *smisao pojmova* i *istinitost tvrdjenja* nemaju direktan uticaj na razvoj same teorije. Umjesto toga, daju se precizna *pravila* za formiranje *izraza* i *formula*, kao i precizna *pravila dokazivanja*. Jedino o čemu vodimo računa je da li se ta pravila dosljedno poštuju. *Dokaz teoreme* u ovom pristupu je konačan niz formula koje se izvode po unaprijed definisanim pravilima.

Da bi neku matematičku disciplinu (npr. teorija brojeva, teorija grupa, Euklidska geometrija i sl.) izgradili kao *formalnu teoriju*, neophodno je da istim formalizmom budu izgrađene i teorije koje joj prethode. Kako smo vidjeli ranije, to moraju biti u svakom slučaju iskazna i predikatska logika, a u većini slučajeva i teorija skupova. U tom smislu razvijeni su *iskazni račun* i *predikatski račun* kao formalne teorije sa sopstvenim aksiomama i pravilima izvodjenja. Ostale matematičke discipline se izgrađuju kao formalne teorije unutar predikatskog računa, uz dodatak novih aksioma.

U izlaganju formalnih teorija postoji jasna razlika između *meta-jezika*, kojim se govori o teoriji, i *objekt-jezika*, koji predstavlja jezik formula same teorije. Formalnu teoriju uobičajeno izgrađujemo tako da bar intuitivno ona odgovara nekoj matematičkoj disciplini. Za tu matematičku disciplinu onda kažemo da je *glavna interpretacija* izgrađivane formalne teorije.

2.1 Definicija formalne teorije

Formalna teorija \mathcal{T} se definiše kao uređjena četvorka

$$\mathcal{T} = (X, \mathcal{F}, \mathcal{A}, P) ,$$

gdje je

- X prebrojiv skup, koga nazivamo *skup polaznih simbola* ili *alfabet* teorije \mathcal{T} .
- \mathcal{F} podskup skupa svih riječi nad alfabetom X , koga nazivamo *skup formula* teorije \mathcal{T} .
- \mathcal{A} podskup skupa formula \mathcal{F} , koga nazivamo *skup aksioma* teorije \mathcal{T} .
- P konačan skup relacija (različitih dužina) na skupu formula, koga nazivamo *skup pravila izvodjenja* teorije \mathcal{T} .

Neka je $f \in P$ neko pravilo izvodjenja, tj. relacija na \mathcal{F} dužine n i neka su $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F$ formule iz \mathcal{F} . Ako je

$$(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F) \in f ,$$

tada kažemo da je formula F *direktna posljedica* formula F_1, F_2, \dots, F_{n-1} , po pravilu izvodjenja f i to uobičajeno zapisujemo sa

$$f : \frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}}{F} .$$

Za konačan niz formula F_1, F_2, \dots, F_k kažemo da je *izvodjenje, dedukcija* ili *dokaz* u teoriji \mathcal{T} , ako za svaku od tih formula F_i važi:

- * F_i je aksiom teorije \mathcal{T} ili
- * F_i se dobija od nekih prethodnih formula u tom nizu prema nekom od pravila izvodjenja u teoriji \mathcal{T} .

Formula F je *teorem* teorije \mathcal{T} , ako postoje formule $F_1, F_2, \dots, F_k \in \mathcal{F}$ takve da je $(F_1, F_2, \dots, F_k, F)$ izvodjenje u teoriji \mathcal{T} . Ovo izvodjenje tada nazivamo *dokaz* teorema F . Da je neka formula F teorem, kratko ćemo označavati sa $\vdash F$. Ukoliko je potrebno naglasiti da je F teorem u teoriji \mathcal{T} , tada pišemo $\vdash_{\mathcal{T}} F$.

Neka je H skup nekih formula teorije \mathcal{T} . Formula F teorije \mathcal{T} je *sintaksička posljedica* formula iz H , ako postoji niz formula F_1, F_2, \dots, F_n takav da za svaku formulu F_i tog niza važi:

2.1. Definicija formalne teorije

- * F_i je aksiom, ili
- * F_i je formula skupa H , ili
- * F_i je direktna posljedica nekih prethodnih formula tog niza dobijena iz nekog pravila izvodjenja

Formule skupa H nazivamo *hipoteze*, a niz F_1, F_2, \dots, F_n, F nazivamo izvodjenje formule F iz hipoteza skupa H .

Da je formula F *posljedica* skupa hipoteza H označavamo sa

$$H \vdash F .$$

Ukoliko je skup H konačan, tj. $H = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, onda pišemo

$$F_1, F_2, \dots, F_n \vdash F .$$

Specijalno vrijedi, ako je skup hipoteza prazan skup tada:

$$\emptyset \vdash F \text{ ako i samo ako je } F \text{ teorem ,}$$

što je lahko pokazati. U tom slučaju oznaku praznog skupa hipoteza izostavljamo i pišemo jednostavno $\vdash F$.

Definicija 2.1.1. *Za formalnu teoriju \mathcal{T} kažemo da je odlučiva ako postoji efektivan postupak (algoritam) kojim se može provjeriti da li je neka formula F teorem date teorije, tj. da li za taj teorem postoji dokaz.*

Primjer 2.1. Definišimo formalnu teoriju na sljedeći način:

Alfabet teorije je skup $X = \{0, 1\}$.

Skup formula teorije je skup \mathcal{F} , svih riječi nad alfabetom X , tj. formula je bilo koji konačan niz nula i jedinica u bilo kom rasporedu.

Aksiome teorije su: $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, tj. aksiome su formule 0 i 1.

Pravila izvodjenja u teoriji su:

$$f_1 : \frac{F1}{F10} \qquad f_2 : \frac{F0}{F01} ,$$

gdje je F proizvoljna formula, a $F0, F1, F01, F10$ itd. su formule dobijene od formule F dopisivanjem sa desne strane riječi 0, 1, 01, 10 itd.

Teorema u ovoj teoriji je, na primjer, formula 010. Zaista, odgovarajući dokaz bi bio niz formula $F_1 \equiv 0, F_2 \equiv 01, F_3 \equiv 010$. F_1 je

aksiom. F_2 dobijamo iz F_1 primjenom relacije f_2 , a F_3 dobijamo iz F_2 primjenom relacije f_1 .

Nije teško primjetiti da u ovoj formalnoj teoriji važi sljedeće:

Teorem: *Riječ nad alfabetom X je teorem definisane teorije ako i samo ako se u njoj simboli 0 i 1 javljaju naizmjenično.*

Gornji teorem nam daje efektivan način za provjeru da li je neka formula teorem date teorije ili to nije, pa prema ranije rečenom datu teoriju smatramo odlučivom. Primjetimo takodje da iskazani teorem nije teorem u formalnoj teoriji \mathcal{T} (u objekt teoriji), nego je to teorem u nekoj drugoj neformalnoj teoriji, koju nazivamo *meta-teorija* teorije \mathcal{T} . \diamond

2.2 Iskazna logika kao formalna teorija

Iskazna i predikatska logika su u osnovi svake matematičke teorije, ma kako se ona formalno izlagala. Tako, da bi smo neku oblast izložili kao formalnu teoriju, neophodno je prije toga na isti način izgraditi i ove oblasti logike. Sada ćemo izložiti iskaznu logiku kao formalnu teoriju. Tu ćemo formalnu teoriju označavati sa \mathcal{L} i zvati je *iskazni račun*. Osnovno i najbitnije svojstvo ove teorije jeste da njene teoreme odgovaraju tautologijama i obratno da je svaka tautologija teorem date teorije.

Jezik teorije \mathcal{L} (alfabet i skup formula) smo već ranije spominjali kada smo izučavali iskaznu algebru. Ovdje ćemo taj jezik neznatno modifikovati.

Definicija 2.2.1.

-Alfabet teorije \mathcal{L} sastavljen je od iskaznih slova p, q, r, \dots odnosno p_1, p_2, \dots , iskaznih veznika \implies, \neg i zagrada $(,)$.

-Formule teorije \mathcal{L} definišemo induktivno:

(1) iskazna slova su iskazne formule,

(2) Ako su A i B iskazne formule, onda su iskazne formule i

$$\neg A \text{ i } A \implies B,$$

(3) iskazne formule su oni i samo oni izrazi koji se mogu dobiti konačnim brojem primjena pod (1) i (2).

-Aksiome teorije \mathcal{L} su

2.2. Iskazna logika kao formalna teorija

$$A1: A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$A2: (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$A3: (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

gdje su A, B i C proizvoljne iskazne formule.

-Jedino pravilo izvodjenja je Modus Ponens:

$$MP: \frac{A, A \Rightarrow B}{B}.$$

Možemo primjetiti da sve formule teorije \mathcal{L} jesu iskazne formule kako smo ih definisali u prvom odjeljku (iskazna algebra). Strogo gledajući, obrat ne važi jer logički veznici \wedge , \vee i \iff nisu u osnovnom jeziku teorije \mathcal{L} , ali to ćemo nadoknaditi definisanjem tih veznika:

$$A \wedge B \text{ je zamjena za } \neg(A \Rightarrow \neg B)$$

$$A \vee B \text{ je zamjena za } \neg A \Rightarrow B,$$

$$A \iff B \text{ je zamjena za } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Očigledno je sada da formule teorije \mathcal{L} u potpunosti odgovaraju iskaznim formulama, kako su one uvedene u iskaznoj logici. U tom smislu prihvatamo i sva pravila o brisanju zagrada.

Budući da su aksiome formulisane pomoću proizvoljnih iskaznih formula, svaka od uvedenih aksioma predstavlja beskonačno mnogo aksioma. To su u stvari zapisi grupa aksioma istog oblika, pa ih zbog toga nazivamo *šema aksioma*.

Tvrđenja koja slijede i njihovi dokazi pripadaju meta-jeziku, i treba ih razlikovati od teorema i dokaza samog računa \mathcal{L} .

Lema 2.2.1. *Za svaku formulu A iskaznog računa \mathcal{L} vrijedi*

$$\vdash A \Rightarrow A.$$

Dokaz : Navodimo jedno izvodjenje formule $A \Rightarrow A$:

1. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
; aksiom A2, gdje su A, B i C redom $A, A \Rightarrow A$ i A
2. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$; aksiom A1 gdje je B formula $A \Rightarrow A$
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$; iz 1. i 2. koristeći MP
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$; aksiom A1 gdje je B formula A

2.2. Iskazna logika kao formalna teorija

5. $A \Rightarrow A$; iz 3. i 4. prema MP.

Ovo izvodjenje je dokaz u toriji \mathcal{L} posljednje formule u nizu, pa je lema dokazana. ♣

Naredno tvrdjenje je poznato kao *teorem dedukcije* za iskazni račun.

Teorem 2.2.2. *Neka je H skup formula i neka su A i B formule. Tada važi:*

$$H \cup \{A\} \vdash B \text{ ako i samo ako } H \vdash A \Rightarrow B .$$

Dokaz : Pretpostavimo da važi $H, A \vdash B$. Tada postoji izvodjenje B_1, B_2, \dots, B_n formule B , označene sa B_n , iz hipoteza skupa $H \cup \{A\}$. Indukcijom po n dokažimo da važi $H \vdash A \Rightarrow B_n$.

Za $n = 1$, B_1 može biti (1) formula iz H , (2) aksiom ili (3) formula A . S obzirom da je $B_1 \Rightarrow (A \Rightarrow B_1)$ aksiom (A1), u prva dva slučaja je po pravilu MP ispunjeno $H \vdash A \Rightarrow B_1$. U trećem slučaju primjenjujemo prethodnu lemmu, po kojoj je $A \Rightarrow A$ teorem, pa važi $H \vdash A \Rightarrow A$, odnosno $H \vdash A \Rightarrow B_1$.

Neka sada važi $H \vdash A \Rightarrow B_k$ za sve $k < n$. B_n može biti (1) formula iz H , (2) aksiom, (3) formula A ili (4) formula koja po pravilu MP slijedi iz formula B_i, B_j , za neke $i, j < n$, gdje je B_j formula $B_i \Rightarrow B_n$. U prva tri slučaja dokaz je isti kao u slučaju $n = 1$.

U slučaju (4), prema induktivnoj hipotezi važi

$$H \vdash A \Rightarrow B_i \text{ i } H \vdash A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B_n) .$$

Aksiom A2 za formule A, B_i, B_n glasi

$$(A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B_n)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_n)) ,$$

pa je po pravilu MP

$$H \vdash (A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_n) .$$

Ponovnom primjenom pravila MP dobijamo $H \vdash A \Rightarrow B_n$.

Obratno, neka je ispunjeno $H \vdash A \Rightarrow B$. Tada postoji izvodjenje B_1, B_2, \dots, B_n formule $A \Rightarrow B$, označene sa B_n , iz hipoteza skupa H . Tada je niz $B_1, B_2, \dots, B_n, A, B$ izvodjenje formule B iz hipoteza skupa $H \cup \{A\}$, pa po MP važi $H, A \vdash B$. ♣

Sada možemo dokazati tvrdnju

Teorem 2.2.3. *Svaka teorema iskaznog računa je tautologija.*

2.2. Iskazna logika kao formalna teorija

Dokaz : Neposredno se dokazuje (tablicom istintosti) da je svaki od tri data aksioma teorije \mathcal{L} , tautologija, što je ostavljeno za vježbu. Ako su formule A i $A \implies B$ tautologije, onda je prema tvrdnji $\mathcal{T}(A) = \top$ i $\mathcal{T}(A \implies B) = \top$ i $\mathcal{T}(B) = \top$, tj. B je tautologija. Kako je MP jedini definisani postupak u teoriji \mathcal{L} , zaključujemo da su sve teoreme tautologije. ♣

Za dokaz obratnog tvrđenja Teoreme 2.2.3, potrebna nam je sljedeća lema u kojoj se povezuje semantički pristup (interpretacija formule) i sintaksički pristup (izvodjenje iz hipoteza). Podsjetimo se da je interpretacija iskazne formule A , funkcija koja svakom njenom slovu p pridružuje vrijednost $\mathcal{T}(p)$, element skupa $\{\top, \perp\}$. Vrijednost formule za datu interpretaciju smo označavali sa $\mathcal{T}(A)$.

Lema 2.2.4. *Neka je A iskazna formula i p_1, p_2, \dots, p_k iskazna slova koja se javljaju u njoj. Za datu interpretaciju te formule neka je*

$$p'_i \stackrel{def}{=} \begin{cases} p_i & , \quad \mathcal{T}(p_i) = \top \\ \neg p_i & , \quad \mathcal{T}(p_i) = \perp \end{cases}$$

$$A' \stackrel{def}{=} \begin{cases} A & , \quad \mathcal{T}(A) = \top \\ \neg A & , \quad \mathcal{T}(A) = \perp \end{cases}$$

Tada važi: $p'_1, p'_2, \dots, p'_k \vdash A'$.

Lemmu ostavljamo bez dokaza, a pomoću nje sada možemo dokazati

Teorem 2.2.5. *Ako je formula A tautologija, ona je teorema teorije \mathcal{L} .*

Dokaz : Neka je A tautologija i neka su p_1, p_2, \dots, p_n njena iskazna slova. U svakoj interpretaciji, istinitosna vrijednost formule A je \top (jer je tautologija), pa je zbog toga $A' = A$ i na osnovu Lemme 2 važi $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \vdash A$.

Ako je u posmatranoj interpretaciji $\mathcal{T}(p_n) = \top$, onda je $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}, p_n \vdash A$, a za $\mathcal{T}(p_n) = \perp$ je $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}, \neg p_n \vdash A$. Na osnovu teorema dedukcije za iskazni račun onda imamo

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1} \vdash p_n \implies A \text{ i } p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1} \vdash \neg p_n \implies A .$$

Kako je jasno da iz $((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q) \implies q$, to onda u gornjem možemo izostaviti p_n , tj. važi:

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1} \vdash A .$$

2.3. Predikatska logika kao formalna teorija

Analognom diskusijom po vrijednosti slova p_{n-1} dobili bi

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-2} \vdash A.$$

Jasno je da nakon konačno mnogo koraka bi došli do $\emptyset \vdash A$ tj. $\vdash A$, odnosno da je A teorem teorije \mathcal{L} . ♣

Teorem 2.2.3 i Teorem 2.2.5 možemo sada iskazati u konjugovanoj formi:

Teorem 2.2.6. *Iskazna formula A je teorem teorije \mathcal{L} ako i samo ako je A tautologija, tj.*

$$\vdash A \iff \models A.$$

Neprotivurječnost aksiomatske teorije smo definisali kao nemogućnost postojanja formule A u datoj teoriji, tako da su A i $\neg A$ teoreme te teorije. Sada imamo

Teorem 2.2.7. *Iskazni račun \mathcal{L} je neprotivurječna teorija.*

Dokaz : Ako bi neka formula A i njena negacija $\neg A$ bile teoreme teorije \mathcal{L} , onda bi na osnovu Teoreme 2.2.6 i A i $\neg A$ bile tautologije. Prema zakonu neprotivurječnosti iskazne logike to je nemoguće, pa je teorija \mathcal{L} neprotivurječna. ♣

Kako je za svaku iskaznu formulu moguće utvrditi da li jeste ili nije tautologija (na primjer tablicom istinitosti), a samim tim i da li jeste ili nije teorem, ispunjeno je jos jedno važno svojstvo teorije \mathcal{L} , a to je

Teorem 2.2.8. *Iskazni račun \mathcal{L} je odlučiva teorija.*

2.3 Predikatska logika kao formalna teorija

Da bi se pojedine oblasti matematike zasnovale strogo aksiomatski, nije dovoljno formalizovati samo iskaznu logiku, nego se to mora učiniti i sa logikom predikatskog računa. Tako dolazimo do formalne teorije koju nazivamo *predikatski* ili *kvantifikatorski račun*, u oznaci \mathcal{P} . U okviru ove teorije, druge grane matematike razvijamo uvodjenjem dodatnih aksioma i nazivaju se *specijalni kvantifikatorski računi*. Takvi su na primjer, teorija skupova, formalna aritmetika, teorija grupa (kao formalna teorija) i sl. Predikatski račun definišemo na sljedeći način

2.3. Predikatska logika kao formalna teorija

Definicija 2.3.1. Alfabet teorije \mathcal{P} čine isti polazni simboli kojim se definišu predikatske formule (predikatski račun), osim što se koriste samo dva logička veznika \neg i \implies , kao i kvantifikator \forall . Može se dati i formalna induktivna definicija takvih formula, kao što smo to učinili u iskaznom računu, ali bez veznika \wedge , \vee i \iff kao i bez kvantifikatora \exists . Veznike \wedge , \vee i \iff možemo uvesti na isti način kao u iskaznom računu, dok kvantifikator \exists uvodimo sa

$$(\exists x) \text{ je zamjena za } \neg(\forall x)\neg.$$

Na taj način je svaka formula teorije \mathcal{P} jedna predikatska formula i obrnuto.

Aksiome teorije \mathcal{P} su:

$$A1: A \implies (B \implies A)$$

$$A2: (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$$

$$A3: (\neg A \implies \neg B) \implies (B \implies A)$$

$$A4: (\forall x)(A \implies B(x)) \implies (A \implies (\forall x)B(x)), \text{ pod uslovom da } x \text{ nije slobodna promjenljiva u formuli } A.$$

$$A5: (\forall x)A(x) \implies A(t), \text{ ako je term } t \text{ nezavisan od varijable } x \text{ u formuli } A(x)$$

(Primjetimo da su prve tri aksiome iste i u teoriji \mathcal{L})

Pravila izvodjenja su:

$$\text{Modus Ponens (MP): } \frac{A, A \implies B}{B}$$

i

$$\text{Generalizacija (GEN): } \frac{A}{(\forall x)A},$$

tj. iz A se izvodi $(\forall x)A$.

Sve navedene aksiome su valjane formule. Time je definisana teorija \mathcal{P} .

U iskaznom računu \mathcal{L} dokazan je teorem dedukcije. Ova formalizacija deduktivne metode zaključivanja proširuje se i na kvantifikatorski račun. Sada ćemo dati jednu verziju teorema dedukcije za predikatski račun. Ponovimo, u svakoj formalnoj teoriji izvođenje iz hipoteza je konačan niz formula, takav da je svaki član tog niza ili aksiom, ili hipoteza ili direktna posljedica nekih prethodno navedenih formula toga niza po nekom od pravila izvodjenja.

2.3. Predikatska logika kao formalna teorija

Teorem 2.3.1. *Neka je H skup predikatskih formula i neka su A i B formule. Tada važi: $H \cup \{A\} \vdash B$ (pri čemu se u izvodjenju generalizacija ne vrši promjenljivom slobodnom u formuli A) ako i samo ako $H \vdash A \implies B$.*

Dokaz : Neka je ispunjeno $H, A \vdash B$ i neka je B_1, B_2, \dots, B_n izvodjenje formule B iz navedenih hipoteza, u kome se ne vrši generalizacija promjenljivom slobodnom u A ; pri tome je B_n formula B . Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n .

Za $n = 1$, dokaz je formalno isti kao odgovarajući dokaz stava dedukcije u teoriji \mathcal{L} .

Pretpostavimo da je ispunjeno $H \vdash A \implies B_k$ za sve $k < n$. Tada B_n može biti: (1) formula iz H , (2) aksiom, (3) formula A , (4) formula koja slijedi po pravilu MP iz formula B_j i B_k za neke j i $k < n$, gdje je B_k formula $B_j \implies B_n$, ili (5) dobijena iz B_i ($i < n$) generalizacijom. Slučajevi (1)-(4) se formalno ponavljaju kao i u dokazu Teoreme 2.2.2. U slučaju (5), prema induktivnoj pretpostavci važi $H \vdash A \implies B_i$, pa po pravilu GEN slijedi $H \vdash (\forall x)(A \implies B_i)$, gdje x nije slobodna promjenljiva u formuli A .

Postoji dakle izvodjenje za formulu $(\forall x)(A \implies B_i)$ iz hipoteza skupa H . Produžimo to izvodjenje formulama

$$(\forall x)(A \implies B_i) \implies (A \implies (\forall x)B_i) \text{ i } A \implies (\forall x)B_i.$$

Prva od gornjih formula je aksiom A4, jer x nije slobodna u A , a druga je dobijena iz $(\forall x)(A \implies B_i)$ i prve po pravilu MP.

Dakle dobijeno je izvodjenje formule $A \implies (\forall x)B_i$ iz hipoteza skupa H , pa je ovaj smjer dokazan.

Obrat se dokazuje analogno odgovarajućem dijelu teorema dedukcije za iskazni račun. ♣

U iskaznom računu smo vidjeli da važi ekvivalentnost sintaksičkog i semantičkog pristupa izvodjenju. Odgovarajući *Teorem potpunosti* vrijedi i u predikatskom računu:

Teorem 2.3.2. *Formula predikatskog računa je teorema ako i samo ako je valjana.*

Napomenimo da je i predikatski račun (teorija \mathcal{P}) kao i iskazni račun (teorija \mathcal{L}) neprotivurječan, što nam obezbjeđuje Teorem 2.3.2.

2.4 Jedan primjer formalizovane teorije

Na kraju, kao primjer formalizovane matematičke discipline, navedimo aksiome teorije grupa.

To je specijalni kvantifikatorski račun koji ima jednu konstantu, u oznaci e , jedan funkcijski znak, binarni, u oznaci \cdot i jedan binarni relacijski znak, u oznaci $=$.

Aksiome A1-A5 predikatskog računa \mathcal{P} su *logičke aksiome* ove formalne teorije. Pored njih imamo i *specijalne aksiome*. Prve četiri od njih su svojstva relacije $=$:

$$\text{R: } (\forall x)(x = x)$$

$$\text{S: } (\forall x)(\forall y)(x = y \implies y = x)$$

$$\text{T: } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \implies x = z)$$

$$\text{Z: } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(y = z \implies (x \cdot y = x \cdot z \wedge y \cdot x = z \cdot x)).$$

Preostale tri aksiome su karakteristika baš teorije grupa:

$$\text{G1: } (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$$

$$\text{G2: } (\forall x)(e \cdot x = x)$$

$$\text{G3: } (\forall x)(\exists y)(y \cdot x = e).$$

Pravila izvodjenja ove teorije su Modus Ponens i Generalizacija.

Bibliografija

- [1] S. G. Simpson: *Mathematical Logic*, The Pensilvania State University, 2005.
- [2] S. Bilaniuk: *A Problem Course in Mathematical Logic*, Trent University, Peterborough Ontario, Canada.
- [3] B. Žarnić: *Simbolička logika* priručnik.
- [4] Z. Šilić: *Novija filozofija matematike*, Nolit, Beograd 1987.
- [5] M. Vuković: *Matematička logika 1*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 2006.
- [6] Dj. Kurepa : *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951