

Formalne teorije

Definicija 1. *Formalna teorija je uređena četvorka*

$$T = (L, \text{Form}, A_x, R)$$

gdje su L , Form , A_x i R sljedeći skupovi:

1. $L \neq \emptyset$ je jezik ili azbuka teorije T . Elementi ovog skupa su polazni simboli ili slova.
2. Form je neprazan podskup skupa svih riječi obrazovanih slovima jezika L po nekim unaprijed utvrđenim pravilima. Elementi skupa Form su formule teorije T . Pri tome, za svaku riječ nad L dat je efektivan postupak za odlučivanje da li neka riječ jeste ili nije formula.
3. A_x je neprazan podskup skupa formula. Elementi skup A_x su aksiome teorije T
4. R je konačan neprazan skup skup relacija nad skupom formula Form . Elementi ovog skupa su pravila izvođenja. Ako je $\alpha \in R$ pravilo izvođenja (relacija) dužine n i

$$(A_1, \dots, A_n) \in \alpha,$$

to jeste formule A_1, \dots, A_n , redom, su u relaciji α , kažemo da je formula A_n direktna posljedica formula A_1, \dots, A_{n-1} po pravilu izvođenja α i koristimo oznaku

$$\alpha : \frac{A_1, \dots, A_{n-1}}{A_n}.$$

Definicija 2. Formalna teorija je aksiomatska ako postoji efektivni postupak za odlučivanje da li je njena proizvoljna formula aksioma ili ne.

Definicija 3. Dokaz u teoriji T je konačan niz formula A_1, A_2, \dots, A_n , $n \in \mathbb{N}$, takav da za svako k , $1 \leq k \leq n$, važi:

1. A_k je aksioma teorije T , ili
2. A_k je direktna posljedica nekih od prethodnih formula A_1, A_2, \dots, A_{k-1} dobijena po nekom od pravila izvođenja teorije T .

Definicija 4. Dokaz formule A je konačan niz formula takav da on jeste dokaz a poslednja formula u nizu je A . A je teorema teorije T ako u T postoji dokaz za A . Koristimo oznaku $\vdash_T A$ ili samo $\vdash A$, ako smo fiksirali u okviru koje teorije radimo.

Zadatak 1. Neka je $T = (L, \text{Form}, A_x, R)$ formalna teorija definisana na sljedeći način:

1. $L = \{a, b\}$
2. $\text{Form}(T)$ su sve riječi nad azbukom L
3. $A_x = \{a\}$
4. u T postoji samo jedno pravilo izvođenja

$$\alpha : \frac{x}{bx}, x \in \text{Form}(T)$$

Opisati formule ove teorije i pokazati da je formula $bbba$ teorema. Opisati sve teoreme teorije T .

Definicija 5. Neka je $\mathcal{F} \subseteq \text{Form}(T)$ i A formula teorije T . A je sintaksna posljedica skupa formula \mathcal{F} , u oznaci $\mathcal{F} \vdash_T A$, ako postoji konačan niz formula (A_1, A_2, \dots, A_n) takav da:

1. $A = A_n$
2. za svako $k \leq n$, A_k je ili aksioma teorije T ili $A_k \in \mathcal{F}$ ili A_k je direktna posljedica nekih od prethodnih formula A_1, A_2, \dots, A_{k-1} po nekom pravilu izvođenja teorije T .

Formule skupa \mathcal{F} su hipoteze.

Definicija 6. Teorija T je odlučiva ako postoji efektivan postupak pomoću koga za svaku formulu ove teorije u konačno mnogo koraka dajemo odgovor na pitanje da li je ona teorema ove teorije ili ne.

U matematičkoj logici razmatraju se dvije formalne teorije: iskazni i predikatski račun. U okviru ovih formalnih teorija formalizuju se matematičke teorije.