

**Grupe predispitnih zadataka tipa B iz
Numeričke analize školske 2008/09
(Numerička analiza i diskretna matematika)**

UPUTSTVO ZA ODABIR SEMESTRALNOG RADA: U prvom delu dokumenta su date tri grupe zadataka. Iza spiska zadataka data je tabela kombinacija zadataka npr. B1(−,3,20) što znači da student koji odabere kombinaciju B1 radi 3. zadatak iz druge grupe Numerička integracija i 20. zadatak iz treće grupe Sistemi linearnih jednačina i nelinearne jednačine. U ovoj kombinaciji se ne radi zadatak iz prve grupe Numerička interpolacija i diferenciranje.

Studenti prijavljuju semestralni rad na mail studenta demonstratora Predraga Gušavca gp@etf.bg.ac.yu sa podacima ime, prezime, broj indeksa i željena kombinacija. Semestralni rad je prijavljen kada dobijete povratnu informaciju na mail da je prijava prihvaćena.

Jednu kombinaciju može da prijavi najviše 5 studenata. Spisak kombinacija za koje je zatvoreno prijavljivanje nalaziće se na sajtu <http://numdis.etf.bg.ac.yu>.

I. Numerička interpolacija i diferenciranje

1. Funkciju $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ tabelirati na $[0, 1]$ sa korakom $h = 0.1$ na 5 decimala. Zatim, inverznom interpolacijom, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, rešiti jednačinu

$$f(x) = 1.2.$$

2. Odrediti maksimalan korak h numeričkog diferenciranja po formuli:

$$f'(x_0 + \frac{2h}{3}) = \frac{y_2 - y_0}{2h},$$

za $y_i = f(x_i)$.

3. Tablicom je zadana funkcija $f(x)$

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
$f(x)$	0.901951	0.978432	1.052661	1.124724	1.194703	1.262688	1.328751

Inverznom interpolacijom izračunati x za koje je $f(x) = 1$.

4. Funkciju $f(x) = \ln x \cdot \cos 2x$ tabelirati na $[1, 3.7]$ sa korakom $h = 0.3$ sa 5 decimala. Zatim, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, naći obe koordinate maksimuma funkcije $f(x)$.

5. Naći optimalan korak h za numeričko diferenciranje po formuli

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0)],$$

pri čemu su vrednosti funkcije određene u ekvidistantnim čvorovima.

6. Funkcija $f(x)$ je data tabelom:

x	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9
$f(x)$	-0.00375	0.00471	0.011729	0.017627	0.022641	0.026946	0.030673

Inverznom interpolacijom naći nulu funkcije $f(x)$.

7. Polinom trećeg stepena dat je tablicom vrednosti u čvorovima

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$P_3(x)$	-24	-6	0	-2	0	6	24	60	120

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, ispraviti grešku i napisati eksplicitni izraz za polazni polinom.

8. Funkcija je zadana tabelom

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	1.71828	1.79417	1.88012	1.97930	2.09520	2.23169

Koristeći konačne razlike, zaključno sa četvrtim redom, izračunati $f(1.43)$ i proceniti grešku.

9. Primenjujući inverznu interpolaciju rešiti jednačinu $7f(x) = 23$, za funkciju $f(x)$, koja je zadana tabelom

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	2.62188	2.79665	2.95358	3.09518	3.22383	3.34138	3.44926	3.54864

10. Odrediti maksimalan korak h numeričkog diferenciranja po formuli

$$f'(x_0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$

za $y_i = f(x_i)$.

11. Odrediti maksimalan korak h za numeričko difirenciranje po formuli

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}.$$

12. Funkciju $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{4-x}$ tabelirati na intervalu $[2.1, 2.8]$ na 4 decimale sa korakom $h = 0.1$. Koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, izračunati $f(2.15)$ i proceniti grešku.

13. Funkcija $f(x)$ je data tabelom:

x	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	2.1272	1.5167	1.7044	3.3285	5.0229	7.2814

Uz pomoć inverzne interpolacije približno odrediti tačku ekstremuma funkcije $f(x)$, a zatim i vrednost funkcije u toj tački.

14. Funkciju $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ tabelirati na $[0, 2]$ sa korakom 0.2 sa 5 decimala. Zatim, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, rešiti jednačinu

$$f'(x) = 0.5.$$

II. Numerička integracija

1. Odrediti A, B i x_1 tako da kvadratura formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A(f(-1) + f(1)) + B(f(-x_1) + f(x_1)) + R(f),$$

ima što je moguće veću tačnost, a zatim proceniti grešku $R(f)$.

2. Odrediti brojeve A, B, C i x_1 tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = Af(0) + Bf(x_1) + Cf(1) + R(f)$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule.

3. Izvesti kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(-1) + A_2 f(-\sqrt{\frac{3}{7}}) + A_3 f(0) + A_4 f(\sqrt{\frac{3}{7}}) + A_5 f(1) + R(f),$$

tako da ona bude tačna za polinome što je moguće višeg stepena, a zatim proceniti grešku $R(f)$ tako dobijene formule.

4. Radeći sa sedam decimala, Simpson-ovom formulom, izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x}.$$

5. Metodom po izboru odrediti vrednost integrala

$$\int_{-2}^1 \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} dx,$$

sa tačnošću 10^{-4} .

6. Sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$, izračunati vrednost integrala

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x^3} dx.$$

7. Izračunati, sa tačnošću 10^{-4} , integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{1+x} dx.$$

8. Sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$, izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

9. Izvesti kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f),$$

gde su x_1 i x_2 i x_3 nule Ležandrovog polinoma trećeg stepena, tako da ona bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i proceniti grešku. Primenjujući dobijeni rezultat odrediti vrednost integrala $\int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \cos x dx$.

10. Odrediti brojeve A , B i C tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = A f(1/4) + B f(1/2) + C f(3/4) + R(f)$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule.

11. Izračunati trapeznom i Simpsonovom metodom, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, integral

$$\int_0^3 \frac{dx}{3 - 2 \sin x}$$

12. Odrediti brojeve A , B , C i a tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A(f(a) + f(-a)) + B f(0) + C f''(0) + R(f),$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule. Primenjujući dobijeni rezultat odrediti vrednost integrala $\int_1^2 x^x \sin x dx$.

13. Izračunati sa tačnošću 10^{-4}

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

III. Sistemi linearnih jednačina i nelinearne jednačine.

1. Metodom LU dekompozicije rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 8.30x_1 + 2.62x_2 + 4.10x_3 + 1.90x_4 &= -10.65 \\ 3.92x_1 + 8.45x_2 + 7.78x_3 + 2.46x_4 &= 12.210 \\ 3.77x_1 + 7.21x_2 + 8.04x_3 + 2.28x_4 &= 15.450 \\ 2.21x_1 + 3.65x_2 + 1.69x_3 + 6.99x_4 &= -8.350 \end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

2. Gauss–Seidel-ovom metodom rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17 \\0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36 \\0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.12 \\0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48\end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

3. Metodom LU dekompozicije naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.19 & 0.89 \\ 0.19 & 1.36 & 0.19 \\ 0.89 & 0.19 & 1.47 \end{bmatrix}$$

radeći sa pet decimala.

4. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem:

$$\begin{aligned}0.83x_1 - 0.10x_2 - 0.11x_3 - 0.12x_4 &= 1 \\-0.13x_1 + 0.85x_2 - 0.10x_3 - 0.11x_4 &= 2 \\-0.11x_1 - 0.12x_2 + 0.88x_3 - 0.10x_4 &= 3 \\-0.10x_1 - 0.11x_2 - 0.12x_3 + 0.86x_4 &= 4\end{aligned}$$

5. Sa tačnošću 10^{-3} Gauss–Seidel-ovom i Jakobi-jevom metodom rešiti sistem

$$\begin{aligned}2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 &= 2.1 \\3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 &= 1.7 \\4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 &= 0.8\end{aligned}$$

6. Gauss-ovom metodom sa izborom glavnog elementa, naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.63 & 1.44 \\ 1.64 & -0.83 & -2.45 \\ 0.58 & 1.55 & 3.18 \end{bmatrix}$$

radeći sa pet decimala.

7. Koristeći metodu LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.1 & 1.0 \\ 1.2 & 4.1 & 1.1 \\ 0.1 & 0.9 & 3.7 \end{bmatrix}$$

8. Numeričkom metodom po izboru, rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}1.7x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 &= 2.35 \\1.1x_1 + 1.6x_2 - 1.9x_3 &= -0.94 \\2.7x_1 - 2.2x_2 + 1.5x_3 &= 2.70\end{aligned}$$

9. Jacobi-jevom metodom rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}2.46x_1 + 0.28x_2 + 0.26x_3 &= 0.76 \\0.38x_1 + 3.57x_2 + 0.36x_3 &= 1.72 \\0.50x_1 + 0.48x_2 + 4.68x_3 &= 3.11\end{aligned}$$

10. Gauss-ovom metodom sa izborom glavnog elementa odrediti inverznu matricu matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

11. Izračunati vrednost determinante, radeći sa 5 decimala:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1.46 & 1.41 & 1.29 & 1.43 \\ 1.21 & 2.40 & 2.18 & 2.48 \\ 0.29 & 1.19 & 2.14 & 2.33 \\ 1.19 & 1.61 & 2.70 & 5.46 \end{vmatrix}$$

12. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}8x_1 + 7x_2 - x_3 &= 13 \\6x_1 + 2.5x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\3x_1 + 4x_2 + 6.1x_3 - 2x_4 &= 3 \\x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 7\end{aligned}$$

13. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem

$$\begin{aligned}20x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= 1 \\7x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 3 \\8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 5 \\7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 7\end{aligned}$$

14. Metodom LU dekompozicije rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}2.0x_1 - 4.0x_2 - 3.25x_3 + 1.0x_4 &= 4.84 \\3.0x_1 - 3.0x_2 - 4.3x_3 + 8.0x_4 &= 8.8 \\1.0x_1 - 5.0x_2 + 3.3x_3 - 20.0x_4 &= -14.05 \\2.5x_1 - 4.0x_2 + 2.0x_3 - 3.0x_4 &= -20.09\end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

15. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, odrediti sva rešenja jednačine:

$$\operatorname{ch}(2x) = 2e^x$$

16. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću 10^{-5} naći sva rešenja jednačine

$$\operatorname{sh}(x^2) + x - 1 = 0$$

17. Metodom sečice sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$\operatorname{ch}x + x - 2 = 0.$$

18. Radeći sa pet decimala izračunati dva rešenja jednačine

$$x(1 + \cos x) = 1.$$

19. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$15x - 10\operatorname{sh}x = 1$$

proizvoljno odabranom metodom.

20. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, primenjujući dva različita metoda rešiti jednačinu:

$$(1 + x^2)e^x = 10.$$

21. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, odrediti sva pozitivna rešenja jednačine:

$$6 \sin x = x^3 + 0.2.$$

22. Primenjujući dve različite metode sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$3^x = 2x + 2.$$

23. Njutnovom metodom, sa tačnošću 10^{-5} , naći sva rešenja jednačine:

$$x^3 - 3.5x^2 - 4x + 0.5 = 0.$$

24. Odrediti najmanji pozitivan koren jednačine

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{th}x = 0,$$

radeći sa pet decimala.

SPISAK KOMBINACIJA ZA IZBOR:

Kombinacija	I	II	III
B1	1	—	20
B2	2	10	—
B3	—	7	3
B4	4	—	12
B5	—	5	22
B6	6		13
B7	7	—	21
B8	8	2	—
B9	9	—	4
B10	6	—	11
B11	11	12	—
B12	12	—	18
B13	—	12	19
B14	14	6	—
B15	1	—	11
B16	2	13	—
B17	3	11	—
B18	4	—	3
B19	—	6	24
B20	6	—	14
B21	7	—	9
B22	8	—	3
B23	9	9	—
B24	—	10	2
B25	11	—	21
B26	12	10	—
B27	—	9	9
B28	7	7	—
B29	1	5	—
B30	2	8	—
B31	—	12	24
B32	—	4	9
B33	—	3	5
B34	—	5	17
B35	7	—	16
B36	—	8	8
B37	—	5	19
B38	4	—	13
B39	4	2	—
B40	—	4	1
B41	—	13	5
B42	14	—	24