

## 2. KOMPLEKSNOŠT ALGORITAMA

**1.** Odrediti kompleksnost problema da li u zadanom grafu sa  $n$  čvorova postoji potpun podgraf sa  $k$  čvorova.

**Rešenje.** Jedan algoritam za rešavanje ovog problema se sastoji u tome što se ispituju sistematski svi podgrafovi sa  $k$  čvorova i što se proverava da li je neki od njih potpun. Za polazni graf sa  $n$  čvorova potrebno je ispitati svih  $\binom{n}{k}$  skupova od po  $k$  čvorova. Za veliko  $n$  i malo  $k$  kompleksnost je polinomska:

$$\binom{n}{k} = O(n^k).$$

Za veliko  $n$  i  $k \sim n/2$  kompleksnost je eksponencijalna:

$$\binom{n}{k} \sim \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!} \sim \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}} = O(4^k).$$

**2.** U zavisnosti od prirodnog broja  $n$ , uzimajući operacije sabiranja i množenja za elementarne korake, proceniti kompleksnost izračunavanja vrednosti polinoma:

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{k,m-k} x^k y^{m-k}$$

u datoj tački  $(x_0, y_0) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Koeficijenti polinoma  $a_{i,j}$ , za  $0 \leq i+j \leq n$ , su poznati realni brojevi i postoji bar jedno  $a_{i,j} \neq 0$  za  $i+j=n$ .

**Rešenje.** Iz zbira:

$$F(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{k,m-k} x^k y^{m-k},$$

izdvojimo sabirke:

$$\Phi_m(x, y) = \sum_{k=0}^m a_{k,m-k} x^k y^{m-k},$$

koji predstavljaju sumu monoma multistepena  $m$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ). U sabirku  $\Phi_m(x, y)$  se koristi najviše  $m$  sabiranja i najviše  $(m+1) \cdot m$  množenja, tj. sveukupno  $b_m = m^2 + 2m$  elementarnih operacija. Odatle, za računanje vrednosti polinoma  $F(x, y)$  se koristi najviše:

$$\sum_{m=0}^n b_m + n = \sum_{m=0}^n (m^2 + 2m) + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) + n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n$$

elementarnih operacija. Sveukupno, kompleksnost problema je reda  $O(n^3)$ .

**3.** Neka su dati skupovi polinoma:  $\mathcal{P}_m = \{P(x, y, z) = \sum_{0 \leq p+q+r \leq m} a_{p,q,r} x^p y^q z^r \mid a_{p,q,r} \in R\}$  i postoji bar jedno  $a_{p,q,r} \neq 0$  za  $p+q+r=m$  ( $m \in N$ ).

**a)** Za  $g \in \mathcal{P}_m$ , u zavisnosti od prirodnog broja  $m$ , izračunati kompleksnost računanja  $g(x, y, z)$  u tački  $(x_0, y_0, z_0) \in R^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

**b)** Neka  $g \in \mathcal{P}_m$  i neka je formirana vektorska funkcija  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  za  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{P}_m$ . U zavisnosti od prirodnog broja  $m$ , odrediti kompleksnost računanja vrednosti diferencijalnih operacija prvog reda:

$$(i) \quad \text{grad } g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k},$$

$$(ii) \quad \text{rot } \vec{f}(x, y, z) = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k},$$

$$(iii) \quad \text{div } \vec{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

u tački  $(x_0, y_0, z_0) \in R^3 \setminus \{0\}$ .

**Rešenje. a)** Polinomska funkcija:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & \sum_{i=0}^m \left( \underbrace{(a_{i,0,0} \cdot x^i)}_{(1)} + \underbrace{(a_{i-1,1,0} \cdot x^{i-1} \cdot y + a_{i-1,0,1} \cdot x^{i-1} \cdot z)}_{(2)} \right. \\ & + \underbrace{(a_{i-2,2,0} \cdot x^{i-2} \cdot y^2 + a_{i-2,1,1} \cdot x^{i-2} \cdot y \cdot z + a_{i-2,0,2} \cdot x^{i-2} \cdot z^2)}_{(3)} \\ & \vdots \\ & \left. + \underbrace{(a_{0,i,0} \cdot y^i + a_{0,i-1,1} \cdot y^{i-1} \cdot z + a_{0,i-2,2} \cdot y^{i-2} \cdot z^2 + \dots + a_{0,0,i} \cdot z^i)}_{(i+1)} \right) \end{aligned}$$

ima pod znakom sume najviše  $k_i = 1 + 2 + 3 + \dots + (i+1) = (i+1)(i+2)/2$  sabiraka za  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Pri tom u svakom sabirku ima najviše  $i$  množenja. Samim tim pod znakom sume se vrši najviše  $k_i \cdot i$  množenja  $(\cdot)$  i  $k_i - 1$  sabiranja  $(+)$ , odnosno koristi se najviše  $ik_i + k_i - 1 = (i+1)k_i - 1$  elementarnih operacija za  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Sveukupno, maksimalan broj elementarnih operacija je dat sumom:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \left( (i+1)k_i - 1 \right) &= \sum_{i=0}^m \left( (i+1) \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{i^3 + 4i^2 + 5i + 2}{2} = \frac{m^4}{8} + \frac{11m^3}{12} + \frac{19m^2}{8} + \frac{31m}{12} + 1. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je kompleksnost računanja vrednosti funkcije  $g$  u tački reda  $O(m^4)$ .

**b)** Kako su za  $f \in \mathcal{P}_m$  parcijalni izvodi:  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  i  $\frac{\partial f}{\partial z}$  polinomi stepena  $m-1$ , to je kompleksnost računanja vrednosti parcijalnih izvoda polinomne funkcije u tački takođe reda  $O(m^4)$ . Na osnovu prethodnog kompleksnost računanja vrednosti diferencijalni operacija grad  $g(x, y, z)$ , rot  $\vec{f}(x, y, z)$  i div  $\vec{f}(x, y, z)$  je istog reda  $O(m^4)$ .

4. Neka je data trodijagonalna determinanta:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

pri čemu  $a_i, b_j, c_k \neq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j < n$ ,  $1 < k \leq n$ ). Odrediti kompleksnost algoritma za računanje trodijagonalne determinante ukoliko se vrši:

a) svođenje determinante na trougaoni oblik;

b) potpun razvoj determinante<sup>1</sup> koristeći datu formulu:  $D_n = a_n \cdot D_{n-1} - c_n b_{n-1} \cdot D_{n-2}$  ( $D_1 = a_1$ ,  $D_2 = a_1 a_2 - b_1 c_2$ ).

**Rešenje.** a) Prema GAUSSovom algoritmu polazna determinanta se transformiše u determinantu:

$$(*) \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a'_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_3 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_n \end{vmatrix},$$

vršeći u  $n-1$  koraka po 2 deljenja i 1 sabiranje. Samim tim iz (\*) dobijamo konačni rezultat  $D_n = a_1 a'_2 a'_3 \dots a'_n$  sa  $n-1$  množenja. Sveukupno, maksimalan broj elementarnih operacija iznosi  $(n-1) \cdot (2+1) + (n-1) = 4n-4$ . Kompleksnost algoritma je reda  $O(n)$ .

b) Razvojem determinante  $D_n$  po poslednjoj koloni dobija se navedena rekuretna relacija:

$$D_n = a_n \cdot D_{n-1} - c_n b_{n-1} \cdot D_{n-2},$$

za  $n \geq 3$ . Označimo sa  $F(n)$  broj nenula sabiraka koji se dobijaju računanjem determinante  $D_n$  po definiciji. Odredimo prva četiri člana niza  $F(n)$ . Za  $n=1$  je  $D_1 = a_1$  i  $F(1)=1$ . Za  $n=2$  je  $D_2 = a_1 a_2 - b_1 c_2$  i  $F(2)=2$ . Za  $n=3$  je  $D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_3 - a_3 b_1 c_2$  i  $F(3)=3$ . Za  $n=4$  je  $D_4 = a_4 D_3 - c_4 b_3 D_2 = a_4(a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 c_3 - a_3 b_1 c_2) - c_4 b_3(a_1 a_2 - b_1 c_2)$  i  $F(4)=3+2=5$ . Dokažimo matematičkom indukcijom da je  $F(n) = F_n$ , gde je  $F_n$   $n$ -ti član FIBONACCIjevog niza. Neka je  $F(n-1) = F_{n-1}$  i  $F(n) = F_n$ , tada induktivni korak se dobija iz  $D_{n+1} = a_{n+1} D_n - c_{n+1} b_n D_{n-1}$ , pa je zaista  $F(n+1) = F(n) + F(n-1) = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ . Na osnovu prethodnog za računanje determinante  $D_n$  potrebno je  $F_n - 1$  sabiranja i  $(n-1)F_n$  množenja. Sveukupno, koristi se  $F_n - 1 + (n-1)F_n = nF_n - 1$  elementarnih operacija. Rešavajući FIBONACCIjevu diferecnu jednačinu nalazimo eksplicitan oblik:

$$F(n) = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Kompleksnost algoritma je reda  $O(nC^n)$ , gde je  $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

<sup>1</sup>koji predstavlja LAPLACEov razvoj determinante