

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

I Аперијетни и њихова комплексност

II Најмањачка појма

III Теорија прена и коначна поја

I АЛГОРИТМИ И ЊИХОВА КОМПЛЕКСНОСТ

АЛГОРИТАМ за решавање неког проблема је коначан описак правила која нам омогућавају да решимо задати проблем у коначно многу корака.

Формално, аперијетни се одређују помоћу следећих система:

- 1. рекурзивне функције
- 2. Тјурингова машина
- 3. израчунајиве функције
- 4. неограничена рекурзивна машина
- ...

Сви ови системи су међусобно еквивалентни

1. РЕКУРЗИВНЕ ФУНКЦИЈЕ

Покази скуи је скуи природних бројева $N = \{0, 1, 2, \dots\}$.
Над овим скуом размајрамо ариџететичке функције

$$f: N^n \rightarrow N \quad (n \geq 1).$$

ПОЛАЗНЕ ФУНКЦИЈЕ:

1. $N(x) = 0$

НУЛА ФУНКЦИЈА

2. $S(x) = x + 1$

СЛЕДБЕНИК ФУНКЦИЈА

3. $U_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$

ФУНКЦИЈА ПРОЈЕКЦИЈЕ

ПОСТУПЦИ ФОРМИРАЊА НОВИХ ФУНКЦИЈА

1° СУБСТИТУЦИЈА

Нека су даће функције:

$$g = g(y_1, y_2, \dots, y_n): \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h = (h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_k(x_1, \dots, x_m)): \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n,$$

тада је субституција функција g и h функција

$g \circ h: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$, која је дефинисана на следећи начин:

$$f = g \circ h(x_1, \dots, x_m) = g(h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_k(x_1, \dots, x_m))$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_1, \dots, x_n), \dots, h_k(x_1, \dots, x_n))$$

пример Функција $f(p, q) = N2S(p, q) + N2D(p, q)$ је добијена субституцијом.

$$\left. \begin{array}{l} f = g \circ h \\ g(x, y) = x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} h_1 = N2S \\ h_2 = N2D \end{array} \quad \underline{h = (h_1(x, y), h_2(x, y)) = N2S(x, y), N2D(x, y)}$$

2° РЕКУРЗИЈА

Нека су даће функције:

$$g = g(x_1, \dots, x_n): \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h = h(x_1, \dots, x_n, y, z): \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N},$$

тада је рекурзија функција g и h функција

$f = \text{rec}(g, h): \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, дефинисана на следећи начин:

$$f(x_1, \dots, x_n, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n) & \text{за } y=0 \\ h(x_1, \dots, x_n, y-1, f(x_1, \dots, x_n, y-1)) & \text{за } y>0 \end{cases}$$

примери:

1° $n=1$ (оштини случај)

$g(x), h(x, y, z)$. Тада:

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x) & y=0 \\ h(x, y-1, f(x, y-1)) & y \neq 0 \end{cases}$$

2° $n=0$ (оштини случај)

$g = \text{const}, h = h(y, z)$. Тада:

$$f(y) = \begin{cases} a = \text{const}, & y=0 \\ h(y-1, f(y-1)) & y \neq 0 \end{cases}$$

ЗАДАЦИ (РЕКУРСИВНЕ ФУНКЦИЈЕ):

1. Доказати да су следеће функције рекурсивне:

$f_1(x, y) = x + y$

- користићемо кад је $n=1$
- одређујемо g и h

$f_1(x, y)$ за $y=0$:

$$f_1(x, 0) = x + 0 = x = U_1^1(x) \Rightarrow \underline{\underline{g = U_1^1}}$$

$f_1(x, y)$ за $y \neq 0$ сводимо на рачунање са $f(x, y-1)$ на сл. начин:

$$f_1(x, y) = x + y = (x + (y-1)) + 1 = f_1(x, (y-1)) + 1 = S(f_1(x, (y-1)))$$

свакамо функцију од три аргумента помоћу пројекције:

$$f_1(x, y) = S \circ U_3^3(x, y-1, f_1(x, y-1)) \Rightarrow \underline{\underline{h = S \circ U_3^3 = S(U_3^3)}}$$

$$\underline{\underline{f_1 = \text{REC}(g, h) = \text{REC}(U_1^1, S \circ U_3^3)}}$$

$$\begin{aligned} f_1(2, 2) &= S \circ U_3^3(2, 1, f_1(2, 1)) = S \circ f_1(2, 1) = S \circ S \circ U_3^3(2, 0, f_1(2, 0)) \\ &= S \circ S \circ f_1(2, 0) = S \circ S \circ U_1^1(2) = S(S(2)) = S(3) = 4. \end{aligned}$$

2. $f_2(x, y) = x \cdot y$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f_2(x, 0) = x \cdot 0 = 0 = N(x) & y=0 \\ h(x, y-1, f_2(x, y-1)) & y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g = N}}$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= x \cdot y = x \cdot (y-1) + x = f_1(f_2(x, y-1), x) = f_1(U_3^3(x, y-1, f_2(x, y-1)), U_1^3(x, \\ &\quad y-1, f_2(x, y-1))) = f_1(U_3^3, U_1^3)(x, y-1, f_2(x, y-1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h = f_1(U_3^3, U_1^3)}} \Rightarrow \underline{\underline{f_2(x, y) = \text{REC}(N(x), f_1(U_3^3, U_1^3))}}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f_2(2,2) &= f_1(U_3^2(2,1, f_2(2,1)), U_4^2(2,1, f_2(2,1))) \\
 &= f_1(f_2(2,1), 2) = f_1(f_1(U_3^2(2,0, f_2(2,0)), U_4^2(2,0, f_2(2,0))), 2) \\
 &= f_1(f_1(f_2(2,0), 2), 2) = f_1(f_1(N(2), 2), 2) = f_1(f_1(0, 2), 2) \\
 &= f_1(0+2, 2) = 2+2=4.
 \end{aligned}$$

успоредно: $f_2(2,2) = 2 \cdot 2 = 4$ OK

3. $f_3(x, y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ x^y, & y \neq 0 \end{cases}$

$$f_3(x, 0) = 1 = S(N(x)) \Rightarrow g = S \circ N$$

$$\begin{aligned}
 f_3(x, y) &= x^y = x^{y-1} \cdot x = f_2(f_3(x, y-1), x) \\
 &= f_2(U_3^2(x, y-1, f_3(x, y-1)), U_4^2(x, y-1, f_3(x, y-1))) \\
 &= f_2(U_3^2, U_4^2)(x, y-1, f_3(x, y-1))
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(x, y) = x^y = f_2(U_3^2, U_4^2) = U_3^2 \cdot U_4^2$$

$$f_3 = \text{rec}(S \circ N, U_3^2 \cdot U_4^2)$$

4. $f_4(x, y) = x^{(x^y)}$ - x се јавува $y+1$ пати

$$f_4(x, y) = \begin{cases} x, & y=0 \\ x^{f_4(x, y-1)}, & y \neq 0 \end{cases}$$

$$f_4(x, 0) = x = U_1^1(x) \Rightarrow g = U_1^1$$

$$f_4 = \text{rec}(U_1^1, f_3(U_1^1, U_3^2))$$

$y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 f_4(x, y) &= x^{f_4(x, y-1)} = f_3(x, f_4(x, y-1)) \\
 &= f_2(U_3^2, U_4^2)(x, y-1, f_4(x, y-1))
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h = f_3(U_4^2, U_3^2)$$

5. $f_5(x) = x \div 1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x=0 \\ x-1, & x \neq 0 \end{cases}$

\rightarrow ФУНКЦИЈА НЕПОСРЕДНОГ ПРЕДХОДНИКА

за $n=0$:

$$f_5(y) = \begin{cases} a = \text{const}, & y=0 \\ h(y-1, f_5(y-1)), & y \neq 0 \end{cases}$$

$x \leftrightarrow y$

$$f_5 = \text{rec}(a, h) \Rightarrow a = 0$$

$$f_5(x) = U_1^2(x-1, f_5(x-1))$$

$$\Rightarrow h = U_1^2, f_5 = \text{rec}(0, U_1^2)$$

6. (2. задатак са вешти 1.)

$$f_6(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & , x < y \\ x - y & , x \geq y \end{cases}$$

Докажимо да за природне бројеве x, y, z важи следећа једнакост:

$$x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z \quad (*)$$

Сводимо на $f_6(x, y-1)$ помоћу (*). Једнакост (*) важи на основу разликовања случајева. Јошћи су случајеви:

1° $x < y$ ($x < y + z$)

$$(*) \Leftrightarrow 0 = 0 \dot{-} z = 0$$

2° $x \geq y$

(1) $x - y \geq z$ ($\Leftrightarrow x \geq y + z$)

$$(*) \rightarrow x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$$

$$\rightarrow x - (y + z) = (x - y) - z$$

$$\rightarrow x - y - z = x - y - z \quad \text{Т}$$

(2) $x - y < z$

$$(*) \rightarrow 0 = 0 \quad \text{Т}$$

Додати:

$$y = 0: f_6(x, 0) = x \dot{-} 0 = x = U_1^1(x) \Rightarrow \underline{g = U_1^1}$$

$$y \neq 0: f_6(x, y) = x \dot{-} y = x \dot{-} (y-1+1) = (x \dot{-} y-1) \dot{-} 1 \\ = f_5(f_6(x, y-1)) = f_5(U_3^3)(x, y-1, f_6(y-1))$$

$$\Rightarrow \underline{h = f_5(U_3^3)} \Rightarrow \underline{f_6 = \text{rec}(U_1^1, f_5(U_3^3))}$$

7. $f_7(x, y) = |x - y|$

$$f_7(x, y) = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

$$= f_6(x, y) + f_6(y, x)$$

f_6 са $y \neq 0$ је $f_6(x, y)$
 $f_6 = f_5(U_3^3)$

рекурзивност следи на основу рекурзивности функције f_6 .

8. $f_8(x, y) = \max(x, y)$

$$f_8(x, y) = x + (y - x) = x + f_6(y, x) = f_1(x, f_6(y, x))$$

9. $f_9(x, y) = \min(x, y)$

$$f_9(x, y) = x - (x - y)$$

za $x < y$, $\min(x, y) = x$
 $x - (x - y) = x - 0 = x$

za $x \geq y$, $\min(x, y) = y$
 $x - (x - y) = x - x + y = y$

10. $f_{10}(x) = x!$

no definiciji, $f_{10}(x) = \begin{cases} a = \text{const} & , x = 0 \\ h(x-1, f_{10}(x-1)) & , x \neq 0 \end{cases}$

$$f_{10}(0) = 0! = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}$$

$$\begin{aligned} f_{10}(x) = x! &= x \cdot (x-1)! = f_2(x, f_{10}(x-1)) = f_2(S(x-1), f_{10}(x-1)) \\ &= f_2(S(U_1^2), U_2^2)(x-1, f_{10}(x-1)) \Rightarrow \underline{h = f_2(S \circ U_1^2, U_2^2)} \end{aligned}$$

$$\underline{f_{10} = \text{rec}(1, f_2(S \circ U_1^2, U_2^2))}$$

11. $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$a = 0 = \text{const}$

$$\text{sgn}(x) = 1 = S(N(x)) = S(N(U_1^2(x-1, \text{sgn}(x-1)))) \Rightarrow \underline{h = S \circ N \circ U_1^2}$$

$$\underline{\text{sgn}(x) = \text{rec}(0, S \circ N \circ U_1^2)}$$

12. $\overline{\text{sgn}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

$a = 1 = \text{const}$ (za $x = 0$)

$h = h(x-1, \overline{\text{sgn}}(x-1)) = ?$ (za $x \neq 0$)

$$\overline{\text{sgn}}(x) = 0 = N(x-1) = N(U_1^2(x-1, \overline{\text{sgn}}(x-1))) \Rightarrow \underline{h = N \circ U_1^2}$$

ca upregabana: $\overline{\text{sgn}}(x) = 1 - \text{sgn}(x)$

5^o МИКРОРЕКУРСИЈА (μ-РЕКУРСИЈА)

Нека је дата функција $g: g(x_1, \dots, x_n, y): \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, таква да важи услов:

$$(*) \quad (\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)(\exists y) \quad g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

(једначина је увек решива по y)

Тада је μ -рекурзија функције g по аргументу y функција

$f = \mu_y \cdot g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, дефинисана са:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) = \min \{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

(најмање решење по y)

Пример: Аккерман-ова функција

$$\begin{cases} \psi(0, y) = y + 1 \\ \psi(x + 1, 0) = \psi(x, 1) \\ \psi(x + 1, y + 1) = \psi(x, \psi(x + 1, y)) \end{cases}$$

$\psi: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ дефинисана са:
је пример функције за коју постоје 1^o и 2^o нису довољни (сукцесивност и микрорекурзија)

ДЕФ: Функција $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ је **РЕКУРСИВНА ФУНКЦИЈА** ако постоји низ функција $f_1, f_2, \dots, f_m = f$, такав да је сваки члан низа или основна рекурзивна функција, или је добијена сукцесивношћу, рекурзијом или микрорекурзијом од претходних чланова низа.

Напомена 1: Ако се у претходној дефиницији користе само постојећи 1^o и 2^o , тада такве функције називамо **ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНИМ**.

Напомена 2: Ако се постојећи μ -рекурзије користе без услова $(*)$, тада из претходне дефиниције добијемо **ПАРЦИЈАЛНО РЕКУРСИВНЕ ФУНКЦИЈЕ**.

Пример: Нека је дата функција $g(x) = |x - y^2| : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.
 Тада ако корисимо оператор микрорекурзије,
 добијемо:

$$f(x) = \mu_y (g(x, y) = 0) = \mu_y (|x - y^2| = 0) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x = k^2 \\ ? & x \neq k^2 \end{cases}$$

Оваква f -ја се назива парцијална функција
 (дефинисана само над квадратима)

Услов (*) није био испуњен, зато се јавила парцијална f -ја.

13. (вече 1. задатак 5.8)

Доказати рекурзивност функције $f(x) = \lfloor \sqrt{5} \cdot x \rfloor$.

- Нека је резултат $y = \lfloor \sqrt{5} \cdot x \rfloor$, по дефиницији 1. Тада је:

$y \leq \sqrt{5} \cdot x < y+1$, y можемо добити као најмањи природан број такав да

$$y+1 > \sqrt{5} \cdot x, \text{ и } (y+1)^2 > 5x^2$$

$$\rightarrow (y+1)^2 - 5x^2 > 0$$

$$\rightarrow (y+1)^2 - 5x^2 \neq 0$$

различитост од нуле следи из
 једнакости са нулом са функцијом
 sgn, f_2

$$y = \lfloor \sqrt{5} \cdot x \rfloor = \mu_y (\text{sgn}((y+1)^2 - 5x^2) = 0)$$

CHURCH-OVA TEŽA (1)

размислити о аритметичке функције $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$.

[интуитивно израчунавање по неком алгоритму] \iff [рекурзивне функције]

Свака рекурзивна f -ја може да се схвати као интуитивно
 израчунавање, јер постоје 1^о, 2^о и 3^о се могу параметризовати,
 иј. довести до алгоритма. Чир, постоји μ -рекурзије

$$f(x) = \mu_y (g(x, y) = 0)$$

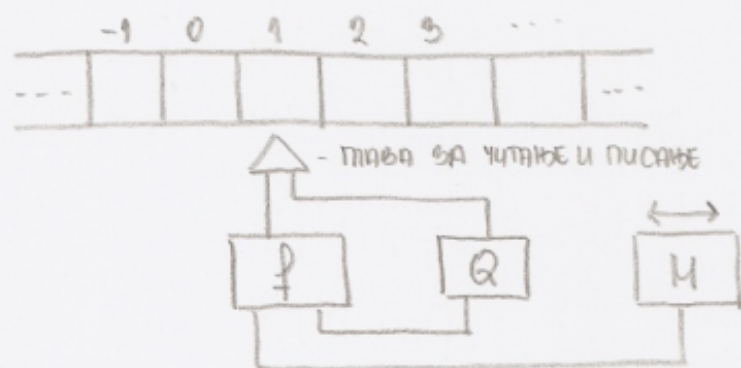
за фиксирано x рачунамо редом $\downarrow g(x, 0) \neq 0$
 $\downarrow g(x, 1) \neq 0$
 док (*) знамо да ово нећестати вани и обрнуто!

СНІВСК-ОВА ТЕЗА: Арифметичка функція є інтуїтивно
 израчунива ако и само ако је рекурсивна функція.

ТУРИНГОВА МАШИНА

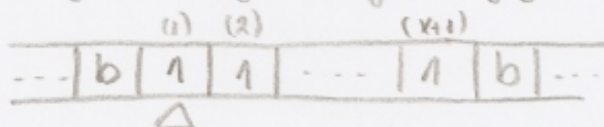
уређена седморка $M = (S, b, Q, q_0, q_+, q_-, f)$, која је
 одређена елементима:

- 1° азбука Тјурингове машине $S = \{b, a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- 2° бланко знак - b (іразно слово)
- 3° $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, q_+, q_-\}$ - скуі унутрашњих сјата Т.м.
- 4° q_0 - почетно сјате Т.м.
- 5° q_+ - завршно сјате Т.м. са позитивним одговором на постављени проблем
- 6° q_- - завршно сјате Т.м. са негативним одговором на постављени проблем (неуспешно завршен рад, нпр при некоректним улазним подацима)
- 7° $f: Q \times S \rightarrow Q \times S \times \{-1, 1\}$ - програи Тјурингове машине.



**ШЕМА ТУРИНГ-ОВЕ
 МАШИНЕ**

1. Нека се природан број x кодира у азбуци $S = \{b, 0, 1\}$ на
 следећи начин:



Написаи програм за Т.м. који рачуна **нула-функцію**.

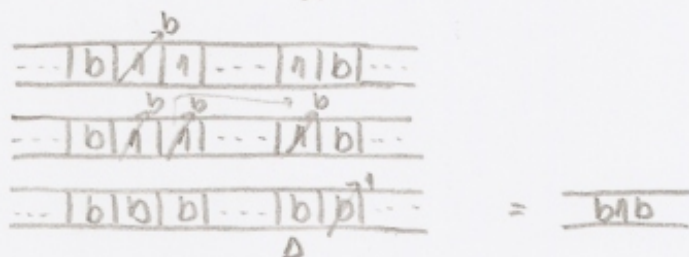
$$b \underbrace{11 \dots 1}_{(x+1)} b = b 1^{x+1} b \xrightarrow{f} b 1 b = 0 \quad (=N(x))$$

* ПРОГРАМСКО РЕШЕЊЕ КОЈЕ ПОВОДИ ДО q_+ :

$$f(q_0, 1) = (q_1, b, +1)$$

$$f(q_1, 1) = (q_1, b, +1)$$

$$f(q_1, b) = (q_+, 1, -1)$$



* ПОТПУНА ТАБЕЛА ЗА q_+ И q_- СТАЊЕ:

	0	1	b
q_0	$(q_-, 0, 1)$	$(q_1, b, 1)$	$(q_-, b, 1)$
q_1	$(q_-, 0, 1)$	$(q_1, b, 1)$	$(q_+, 1, -1)$

2. СЛЕДБЕНИК ФУНКЦИЈА $S(x) = x+1$

$$b 1^{x+1} b \xrightarrow{f} b 1^{x+2} b$$

I (ПОДАЈЕМО 1 С ПЕСНА)

$$f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$$

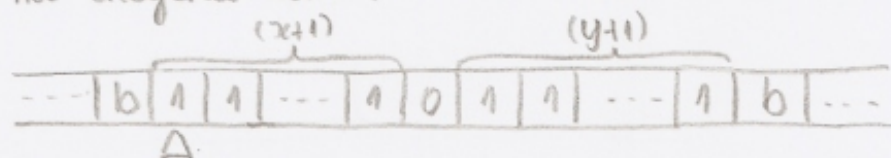
$$f(q_1, b) = (q_+, 1, -1)$$

II (ПОДАЈЕМО 1 С ЛЕВА)

$$f(q_0, 1) = (q_1, 1, -1)$$

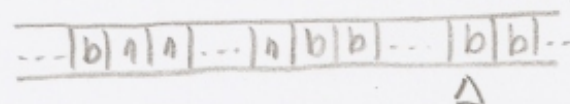
$$f(q_1, b) = (q_+, 1, +1)$$

3. Нека се уређени пар $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ кодира у азбучи $S = \{b, 0, 1\}$ на следећи начин:



Написајте програм за ЈМ. који се рачуна $U_0^2(x, y) = x$.

$$b 1^{x+1} 0 1^{y+1} b \xrightarrow{f} b 1^{x+1} b$$



$$f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_1, 0) = (q_2, b, +1)$$

$$f(q_2, 1) = (q_2, b, +1)$$

$$f(q_2, b) = (q_+, b, -1)$$

4. ФУНКЦИЈА ОБИРА $f(x, y) = x + y$

$$b1^{x1} 01^{y1} b \mapsto b1^{x+y} b$$

$$f(q_0, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_2, b) = (q_3, b, -1)$$

$$f(q_1, 1) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_3, 1) = (q_4, b, -1)$$

$$f(q_1, 0) = (q_2, 1, +1)$$

$$f(q_4, 1) = (q_4, b, -1)$$

$$f(q_2, 1) = (q_2, 1, +1)$$

5. (ПОМАЊИ) Нека је дама азбука \mathcal{A} . и нека се природни бројеви представљају својим бинарним записом на ираци. Написати програм за \mathcal{A} којим се утврђује да ли је дама број **дељив са 4**

- бинарни запис бројева:

0	00000000	20	00010100
4	00000100	24	00011000
8	00001000	28	00011100
12	00001100	32	00100000
16	00010000	36	00100100

(ДА БИ БРОЈ БИО ДЕЉИВ СА 4, У БИНАРНОМ ЗАПИСУ МОРА ДА СЕ ЗАВРШАВА СА ДВЕ НУЛЕ)

- прочитати све цифре бинарног броја док не стигнемо до првог бланко знака, а затим ићи корак уназад и утврђујемо да ли су последње 2 цифре дамог броја нуле.

* ТАБЛИЦА ПРОГРАМА Т.М. *

	0	1	b
q_0	$(q_0, 0, +1)$	$(q_0, 1, +1)$	$(q_1, b, -1)$
q_1	$(q_2, 0, -1)$	$(q_-, 1, +1)$	$(q_-, b, +1)$
q_2	$(q_1, 0, +1)$	$(q_-, 1, +1)$	$(q_-, b, +1)$

* ПРОГРАМ ТУРИНГОВЕ МАШИНЕ *

$$f(q_0, 0) = (q_0, 0, +1)$$

$$f(q_0, 1) = (q_0, 1, +1)$$

$$f(q_0, b) = (q_1, b, -1)$$

$$f(q_1, 0) = (q_2, 0, -1)$$

$$f(q_2, 0) = (q_1, 0, +1)$$

Ја бланко не можемо наћи јер смо код првог бланка кренули уназад

CHURCH-ОБА ТЕЗА (2)

Аритметичка функција је **ТУРИНГ-ИЗРАЧУНЉИВА** ако постоји програм $f.m.$ који за сваку n -торку израчунава вредност функције у тој тачки.

CHURCH-ОБА ТЕЗА (2): Аритметичка функција је интуитивно израчуњива ако и само ако је туринг-израчуњива