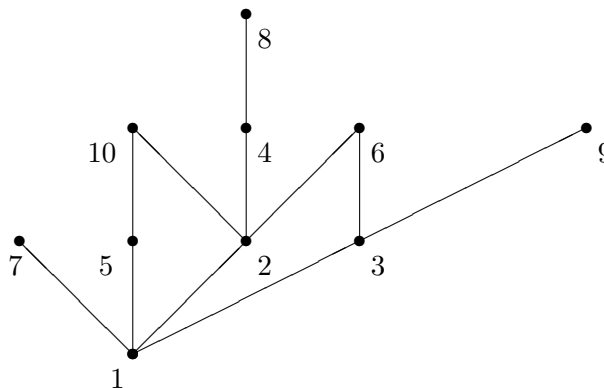


5. TEORIJA MREŽA

1. Ispitati da li je uređen par $(N, |)$, gde je N skup prirodnih brojeva, a $|$ relacija deljivosti mreža. Ako je $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ nacrtati HASSEov dijagram strukture $(D, |)$.

Rešenje. $(N, |)$ je parcijalno uređen skup, jer je $n|n$, $n|m \wedge m|n \implies m = n$, $m|n \wedge n|p \implies m|p$ (tj. $|$ je relacija parcijalnog uređenja). Supremum za $\{m, n\}$ je najmanji zajednički sadržalac, a infimum najveći zajednički delilac, te je $(N, |)$ mreža. HASSEov dijagram strukture¹ $(D, |)$ je dat sledećom slikom.



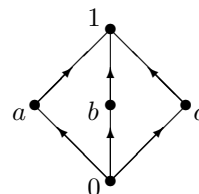
2. Dokazati da u proizvoljnoj mreži važi $(x_1 \leq y_1) \& (x_2 \leq y_2) \implies (x_1 \vee x_2) \leq (y_1 \vee y_2)$. Ispitati da li je preslikavanje $f_a(x) = a \vee x$ monotono. Odrediti sliku intervala $[a \wedge b, a]$.

Rešenje. Neka u \mathcal{S} -mreži važi $x_1 \leq y_1$ i $x_2 \leq y_2$. Tada u \mathcal{A} -mreži važi $y_1 = x_1 \vee y_1$ i $y_2 = x_2 \vee y_2$. Saglasno aksiomama \mathcal{A} -mreže sleduje $y_1 \vee y_2 = (x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2)$. Navedeno je dovoljno da zaključimo da je u \mathcal{S} -mreži tačna posledica $(x_1 \vee x_2) \leq (y_1 \vee y_2)$. Prema prethodnoj implikaciji iz $a \leq a$ i $x \leq y$ sleduje $f_a(x) = a \vee x \leq a \vee y = f_a(y)$. Samim tim je dokazano da je funkcija f_a monotona. Dalje, važi:

$$x \in [a \wedge b, a] \iff a \wedge b \leq x \leq a \implies a = a \vee (a \wedge b) \leq f_a(x) = a \vee x \leq a \vee a = a.$$

Samim tim $f([a \wedge b, a]) = \{a\}$.

3. Ispitati distributivnost i modularnost sledeće mreže:



Rešenje. Mreža nije distributivna, jer važi:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq 1 = 1 \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Sa druge strane iz grafa posmatrane mreže možemo formirati CAYLEovu tablicu:

\leq	0	a	b	c	1
0	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
a		⊤			⊤
b			⊤		⊤
c				⊤	⊤
1					⊤

¹struktura $(D, |)$ nije mreža

pri čemu su u prethodnoj tablici popunjena su samo pozicije sa vrednošću \top . Posmatrajmo zakon modularnosti:

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z),$$

samo u slučaju kad je pretpostavka implikacije tačna. Na taj način dovoljno je redom ispitati slučajeve:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x = 0, \\ (ii) \quad & z = 1, \\ (iii) \quad & x = z = a, \\ (iv) \quad & x = z = b, \\ (v) \quad & x = z = c. \end{aligned}$$

U svakom od navedenih slučajeva $(i) - (v)$ i posledica implikacije $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ je takođe tačna (proveriti). Samim tim, posmatrana mreža je nedistributivna i modularna.

4. Dokazati da je svaka distributivna mreža ujedno i modularna. Da li važi i obrnuto?

Rešenje. Predpostavimo da je mreža (X, \vee, \wedge) distributivna; tj. da važi zakon:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

za svako $a, b, c \in X$. Dalje izdvojimo $a, c \in X$ za koje je ispunjena pretpostavka modularnosti:

$$a \leq c.$$

Dokazujemo da važi: $a \leq c \implies a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Zaista, prethodna pretpostavka je ekvivalentna sa uslovom:

$$(*) \quad a \vee c = c.$$

Sad dokazujemo da iz $(*)$ sleduje zaključak modularnosti:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \stackrel{(*)}{=} (a \vee b) \wedge c.$$

Obrnuto nije tačno kao što je pokazano na primeru mreže iz prethodnog zadatka.

5. Neka u mreži (X, \vee, \wedge) važi:

$$(*) \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

Dokazati da je tada mreža modularna.

Rešenje. Neka važi jednakost $(*)$. Dokažimo zakon modularnosti:

$$x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Neka je $x \leq z$, tada važi $x \wedge z = x$ i $x \vee z = z$. Samim tim na osnovu komutativnosti i apsortivnosti sleduje traženi zaključak:

$$\begin{aligned} (*) \implies & (x \vee y) \wedge \underbrace{(y \vee z) \wedge z}_{=z} = (y \wedge z) \vee \underbrace{(x \wedge y) \vee x}_{=x} \\ \iff & (x \vee y) \wedge z = (y \wedge z) \vee x. \end{aligned}$$