

# 1. REKURZIVNE FUNKCIJE

1. Ispitati da li su rekurzivne sledeće aritmetičke funkcije:

$$f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = x \cdot y, \quad f_3(x, y) = x^y.$$

**Rešenje.** Funkcija  $f_1(x, y) = x + y$  dobija se primitivnom rekurzijom na osnovu sledećeg niza:

$$U_1^1(x), S(x), U_3^3(x, y, z), f_1(x, y) = \text{Rec}(U_1^1, S \circ U_3^3).$$

Zaista, važi:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} U_1^1(x) = x & : y = 0, \\ S(U_3^3(x, y-1, f_1(x, y-1))) = f_1(x, y-1) + 1 & : y \neq 0. \end{cases}$$

Funkcija  $f_2(x, y) = x \cdot y$  dobija se primitivnom rekurzijom na osnovu sledećeg niza:

$$N(x), U_1^3(x, y, z), U_3^3(x, y, z), f_1(x, y) = x + y, f_2(x, y) = \text{Rec}(N, f_1(U_1^3, U_3^3)).$$

Zaista, važi:

$$f_2(x, y) = \begin{cases} N(x) = 0 & : y = 0, \\ f_1(U_1^3(x, y-1, f_1(x, y-1)), U_3^3(x, y-1, f_1(x, y-1))) = x + f_2(x, y-1) & : y \neq 0. \end{cases}$$

Funkcija  $f_3(x, y) = x^y$  dobija se primitivnom rekurzijom na osnovu sledećeg niza:

$$S \circ N(x), U_1^3(x, y, z), U_3^3(x, y, z), f_2(x, y) = x \cdot y, f_3(x, y) = \text{Rec}(S \circ N, f_2(U_1^3, U_3^3)).$$

Zaista, važi:

$$f_3(x, y) = \begin{cases} S \circ N(x) = 1 & : y = 0, \\ f_2(U_1^3(x, y-1, f_1(x, y-1)), U_3^3(x, y-1, f_1(x, y-1))) = x \cdot f_3(x, y-1) & : y \neq 0. \end{cases}$$

2. a) Neka je data aritmetička funkcija:

$$f_1(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & : x \geq y, \\ 0 & : x < y. \end{cases}$$

Dokazati da za prirodne brojeve  $x, y$  i  $z$  važi jednakost:  $x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$ .

b) Dokazati rekurzivnost sledećih aritmetičkih funkcija:

(i)  $f_1(x, y) = x \dot{-} y,$

(ii)  $f_2(x, y) = |x - y|,$

(iii)  $f_3(x, y) = \min\{x, y\},$

(iv)  $f_4(x, y) = \max\{x, y\}.$

**Rešenje. a)** Relaciju:

$$(*) \quad x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z,$$

za prirodne brojeve  $x, y$  i  $z$ , dokazujemo razlikovanjem slučajeva. Mogući su slučajevi:

**1<sup>o</sup>.**  $x < y$  Tada relacija  $(*)$  svodi se na jednakost:

$$0 = 0,$$

jer je ispunjen uslov  $x < y$  i odatle je ispunjeni dodatni uslov  $x < y + z$ .

**2<sup>o</sup>.**  $x \geq y$  Razlikujemo dva podslučaja:

**( $\alpha$ )**  $x - y \geq z$  Tada relacija  $(*)$  se svodi na tačnu jednakost:

$$x - (y + z) = (x - y) - z,$$

jer su ispunjeni uslovi  $x \geq y + z$  i  $x - y \geq z$ .

**( $\beta$ )**  $x - y < z$  Tada relacija  $(*)$  se svodi na tačnu jednakost:

$$0 = 0,$$

jer su ispunjeni uslovi  $x < y + z$  i  $(0 \leq) x - y < z$ .

**b)** Polazimo od činjenice da se aritmetička funkcija  $f_0(x) = x \dot{-} 1$ , za  $x \geq 1$ , podudara sa aritmetičkom funkcijom prethodnik prirodnog broja koja je rekurzivna. Uočimo da za aritmetičku funkciju  $f_1(x, y) = x \dot{-} y$  važi:

$$f_1(x, 0) = U_1^1(x) = x \text{ i } f_1(x, y) = x \dot{-} ((y - 1) + 1) \underset{(*)}{=} (x \dot{-} (y - 1)) \dot{-} 1 = f_0(f_1(x, y - 1)).$$

Odatle sleduje zaključak da je  $f_1$  rekurzivna funkcija. Rekurzivnost ostalih funkcija sleduje na osnovu veza:

$$f_2(x, y) = |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

$$f_3(x, y) = \min\{x, y\} = x \dot{-} (x \dot{-} y),$$

$$f_4(x, y) = \max\{x, y\} = x + (y \dot{-} x).$$

**3.** Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije:  $f_1(x, y) = x + y$ ,  $f_2(x, y) = x \cdot y$ ,  $f_3(x, y) = x^y$  i  $f_4(x, y) = x \dot{-} y$  rekurzivne, dokazati rekurzivnost sledećih funkcija:

**a)**  $f(x) = \overline{\text{sgn}}(x)$ .

**b)**  $g(y) = \lfloor \sqrt{5} \cdot y \rfloor$ .

**Rešenje. a)** Dokažimo da je  $\text{sgn}(x)$  rekurzivna funkcija. Zaista, važi:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ U_1^2(S(N(x)), \text{sgn}(x - 1)) & : x > 0 \end{cases}$$

Tada posmatrana funkcija je rekurzivna jer važi:  $\overline{\text{sgn}}(x) = f_4(S(N(x)), \text{sgn}(x))$ .

**b)** Označimo  $w = \lfloor \sqrt{5} \cdot y \rfloor$ . Tada je  $w \leq \sqrt{5} \cdot y < w + 1$ , tj.  $w^2 \leq 5 \cdot y^2 < (w + 1)^2$ . Samim tim navedena (totalna) funkcija se dobija preko mikrokurzije na način koji sleduje:

$$w = \lfloor \sqrt{5}y \rfloor = \mu_w \left( (w+1)^2 > 5y^2 \right) = \mu_w \left( \underbrace{f_4((w+1)^2, 5y^2) \neq 0}_{(w+1)^2 \dot{-} 5y^2 > 0} \right) = \mu_w \left( \underbrace{f \circ f_4((w+1)^2, 5y^2) = 0}_{\overline{\text{sgn}}((w+1)^2 \dot{-} 5y^2) = 0} \right),$$

za fiksiranu vrednost polaznog argumenta  $y \in N$ . Pokažimo, dodatno, da se argumenti mikrokurzije mogu dobiti primenom rekurzivnih funkcija. Sa jedne strane, za argumente  $5 = S^{(5)}(N(y))$ ,  $2 = S^{(2)}(N(y))$  i  $y^2 = f_3(y, 2)$  dobijamo rezultat  $5y^2 = f_2(5, y^2)$ . Slično, sa druge strane za argumente  $w+1 = S(w)$  i  $2 = S^{(2)}(N(w))$  dobijamo rezultat  $(w+1)^2 = f_3(w+1, 2)$ . Napomenimo da se, u prethodnom razmatranju, umesto unarne funkcije neposredni sledebenik  $S$  mogla ravnopravno koristiti i binarna funkcija sabiranja  $f_1$ .

**4.** Azbuka TURINGove mašine sadrži simbole 0, 1 i prazno slovo  $b$ . Prirodni brojevi se predstavljaju svojim binarnim zapisom. Konstruisati program za ovu mašinu koji utvrđuje da li je zadan prirodni broj deljiv sa 8.

**Rešenje.** Program TURINGove mašine je dat tablicom:

	0	1	$b$
$q_0$	$(q_0, 0, +1)$	$(q_0, 1, +1)$	$(q_1, b, -1)$
$q_1$	$(q_2, 0, -1)$	$(q_-, 1, +1)$	$(q_-, b, +1)$
$q_2$	$(q_3, 0, -1)$	$(q_-, 1, +1)$	$(q_-, b, +1)$
$q_3$	$(q_+, 0, +1)$	$(q_-, 1, +1)$	$(q_-, b, +1)$