

## 4. PRINCIP REZOLUCIJE

**1.** Transformisati formule u preneks normalnu formu:

- a)  $(\forall x)(\forall y)\left((\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z)) \implies (\exists u)Q(x, y, u)\right),$   
 b)  $(\forall x)(\forall y)\left((\exists z)P(x, y, z) \wedge ((\exists u)Q(x, u) \implies (\exists v)Q(y, v))\right).$

**Rešenje.** Primenom postupka svođenja na preneks normalnu formu dobijamo rezultate koji sledeju:

- a)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)\left(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, y, u)\right),$   
 b)  $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)\left(P(x, y, z) \wedge (\neg Q(x, u) \vee Q(y, v))\right).$

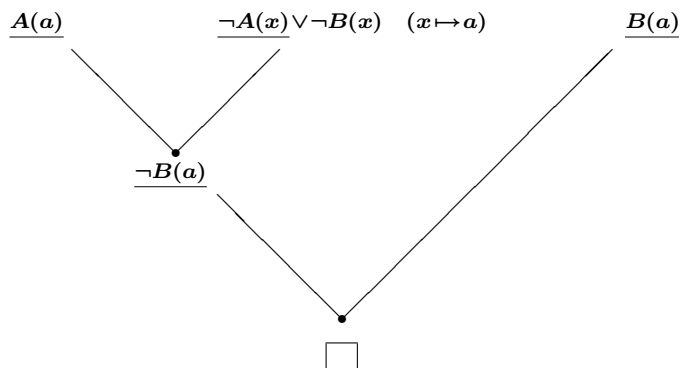
**2.** Principom rezolucije dokazati valjanost formula:

- a)  $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \implies (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x),$   
 b)  $(\forall x)C(x) \vee (\forall x)D(x) \implies (\forall x)(C(x) \vee D(x)).$

**Rešenje. a)** Negacija posmatrane formula ima skup sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{A(a), B(a), \neg A(x) \vee \neg B(x)\}.$$

Odatle supstitucijom  $\Theta = \{x \mapsto a\}$ , koristeći princip rezolucije, sleduje prazan sastavak, kao što je prikazano drvetom izvođenja.



Samim tim polazna formula je valjana.

b) U prethodnoj valjanoj formuli neka je  $A(x)$  zamenjeno sa  $\neg C(x)$  i neka je  $B(x)$  zamenjeno sa  $\neg D(x)$ . Tada na osnovu DE MORGANovih zakona i principa kontrapozicije sleduje valjanost navedene formule.

**3.** Principom rezolucije dokazati valjanost sledećih formula:

- a)  $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \implies (\exists y)(\forall x)A(x, y),$   
 b)  $(\exists y)(\forall x)A(x, y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x, y),$   
 c)  $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \implies (\exists y)(\forall x)A(x, y).$

**Rešenje. a)** Zadanu formulu  $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \implies (\exists y)(\forall x)A(x, y)$  negiramo i postepeno negaciju formule prevodimo u SKOLEMOV standardan oblik:

$$\begin{aligned} & \neg((\forall x_1)(\forall y_1)A(x_1, y_1) \implies (\exists y_2)(\forall x_2)A(x_2, y_2)), \\ & (\forall x_1)(\forall y_1)A(x_1, y_1) \wedge \neg(\exists y_2)(\forall x_2)A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)(\forall y_1)A(x_1, y_1) \wedge (\forall y_2)(\exists x_2)\neg A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)(\forall y_1)A(x_1, y_1) \wedge (\forall y_2)\neg A(f(y_2), y_2), \\ & (\forall x_1)(\forall y_1)(\forall y_2)(A(x_1, y_1) \wedge \neg A(f(y_2), y_2)), \end{aligned}$$

za neku SKOLEMOVU funkciju  $f$  nad domenom interpretacije  $D$ . Za vežbu odrediti i drugi način prevođenja sa manjim brojem promenljivih. Dalje, posmatrajmo skupa sastavaka:

$$\mathcal{S}_1 = \{A(x_1, y_1), \neg A(f(y_2), y_2)\}$$

i neka je  $c$  nova konstanta pomoću koje formiramo HEBRANDOV domen. Tada primenom supstitucije:

$$\theta_1 = \{x_1 \mapsto f(c), y_1 \mapsto c, y_2 \mapsto c\}$$

dobijamo  $\theta_1$  - primer sastavaka  $A(f(c), c), \neg A(f(c), c)$ . Odatle, primenom principa rezolucije izvodi se prazan sastavak  $\square$ . Dakle, zadana formula je valjana.

**b)** Zadanu formulu  $(\exists y)(\forall x)A(x, y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x, y)$  negiramo i postepeno negaciju formule prevodimo u SKOLEMOV standardan oblik:

$$\begin{aligned} & \neg((\exists y_1)(\forall x_1)A(x_1, y_1) \implies (\forall x_2)(\exists y_2)A(x_2, y_2)), \\ & (\exists y_1)(\forall x_1)A(x_1, y_1) \wedge \neg(\forall x_2)(\exists y_2)A(x_2, y_2), \\ & (\exists y_1)(\forall x_1)A(x_1, y_1) \wedge (\exists x_2)(\forall y_2)\neg A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)A(x_1, b) \wedge (\forall y_2)\neg A(a, y_2), \\ & (\forall x_1)(\forall y_2)(A(x_1, b) \wedge \neg A(a, y_2)), \end{aligned}$$

za neke konstante  $a$  i  $b$  iz domena interpretacije  $D$ . Dalje, polazeći od skupa sastavaka:

$$\mathcal{S}_2 = \{A(x_1, b), \neg A(a, y_2)\}$$

primenom supstitucije:

$$\theta_2 = \{x_1 \mapsto a, y_2 \mapsto b\}$$

dobijamo  $\theta_2$  - primer sastavaka  $A(a, b), \neg A(a, b)$ . Odatle, primenom principa rezolucije izvodi se prazan sastavak  $\square$ . Dakle, zadana formula je valjana.

**c)** Zadanu formulu  $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \implies (\exists y)(\exists x)A(x, y)$  negiramo i postepeno negaciju formule prevodimo u SKOLEMOV standardan oblik:

$$\begin{aligned} & \neg((\forall x_1)(\exists y_1)A(x_1, y_1) \implies (\exists y_2)(\exists x_2)A(x_2, y_2)), \\ & (\forall x_1)(\exists y_1)A(x_1, y_1) \wedge \neg(\exists y_2)(\exists x_2)A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)(\exists y_1)A(x_1, y_1) \wedge (\forall y_2)(\forall x_2)\neg A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)A(x_1, \varphi(x_1)) \wedge (\forall y_2)(\forall x_2)\neg A(x_2, y_2), \\ & (\forall x_1)(\forall y_2)(\forall x_2)(A(x_1, \varphi(x_1)) \wedge \neg A(x_2, y_2)), \end{aligned}$$

za neku SKOLEMOVU funkciju  $f$  nad domenom interpretacije  $D$ . Za vežbu odrediti i drugi način prevođenja sa manjim brojem promenljivih. Dalje, posmatrajmo skupa sastavaka:

$$\mathcal{S}_3 = \{A(x_1, \varphi(x_1)), \neg A(x_2, y_2)\}$$

i neka je  $c$  nova konstanta pomoću koje formiramo HEBRANDOV domen. Tada primenom supstitucije:

$$\theta_3 = \{x_1 \mapsto c, x_2 \mapsto c, y_2 \mapsto \varphi(c)\}$$

dobijamo  $\theta_3$  - primer sastavaka  $A(c, \varphi(c)), \neg A(c, \varphi(c))$ . Odatle, primenom principa rezolucije izvodi se prazan sastavak  $\square$ . Dakle, zadana formula je valjana.

**4.** Dokazati valjanost sledeće formule:

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \wedge (\forall y)(\exists z)B(y, z) \implies (\forall x)(\exists y)(\exists z)(A(x, y) \wedge B(y, z)).$$

**Rešenje.** Pretpostavka da negacija prethodne formule ima model dovodi do zaključka da su u takvom modelu tačne formule:

$$(\forall x)A(x, f(x)),$$

$$(\forall y)B(y, g(y)),$$

$$(\forall y)(\forall z)(\neg A(a, y) \vee \neg B(y, z)),$$

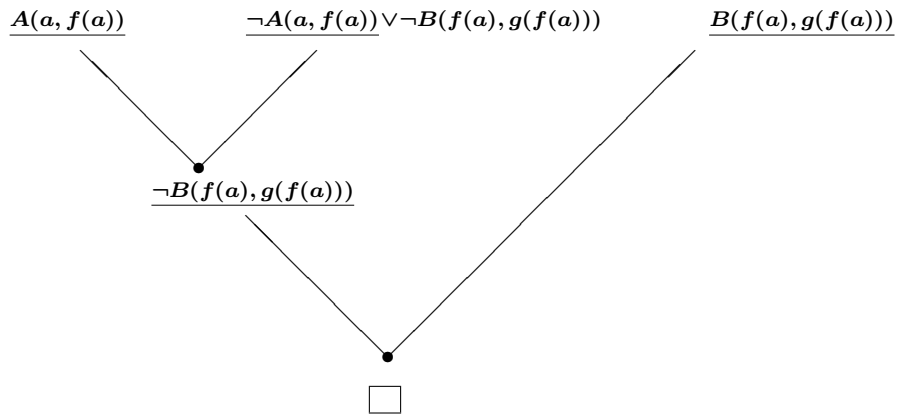
za neke SKOLEMOVE funkcije  $f, g$  i konstantu  $a$ . Samim tim, negacija polazne formule ima sledeći skup sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{A(a, f(a)), B(y_1, g(y_1)), \neg A(a, y_2) \vee \neg B(y_2, z)\}.$$

Na osnovu supstitucije  $\sigma : x \mapsto a, y_2 \mapsto f(a), y_1 \mapsto f(a), z \mapsto g(f(a))$  dobijamo osnovni primer prethodnog skupa sastavaka:

$$\mathcal{S}\sigma = \{A(a, f(a)), B(f(a), g(f(a))), \neg A(a, f(a)) \vee \neg B(f(a), g(f(a)))\}.$$

Iz prethodnog skupa osnovnih primera sastavaka, na osnovu principa rezolucije, dobijamo prazan sastavak, kao što je ilustrovano sa drvetom izvođenja:



**5.** Koristeći se principom rezolucije dokazati da je sledeća formula valjana:

$$(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \vee A(y, x)) \implies (\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x, z) \wedge A(y, z)).$$

**Rešenje.** Zadanu formulu negiramo i nakon transformacija:

$$\neg \left( (\forall x)(\forall y)(A(x, y) \vee A(y, x)), \implies (\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x, z) \wedge A(y, z)) \right),$$

$$(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \vee A(y, x)) \wedge (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\neg A(x, z) \vee \neg A(y, z)),$$

$$(\forall x)(\forall y)(A(x, y) \vee A(y, x)) \wedge (\forall z)(\neg A(a, z) \vee \neg A(b, z)),$$

dobijamo skup sastavaka negirane formule:

$$\mathcal{S} = \{A(x, y) \vee A(y, x), \neg A(a, z) \vee \neg A(b, z)\},$$

za neke konstante  $a$  i  $b$  iz domena interpretacije. Iz  $A(x, y) \vee A(y, z)$  zaključujemo da u domenu interpretacije imamo sledeće posledice:

- (1)  $A(a, b) \vee A(b, a) \quad (x \mapsto a, y \mapsto b),$
- (2)  $A(a, a) = A(a, a) \vee A(a, a) \quad (x \mapsto a, y \mapsto a),$
- (3)  $A(b, b) = A(b, b) \vee A(b, b) \quad (x \mapsto b, y \mapsto b).$

Iz  $\neg A(a, z) \vee \neg A(b, z)$  zaključujemo da u domenu interpretacije imamo sledeće posledice:

- (4)  $\neg A(a, a) \vee \neg A(b, a) \quad (z \mapsto a),$
- (5)  $\neg A(a, b) \vee \neg A(b, b) \quad (z \mapsto b).$

Iz (2) i (4) prema rezoluciji  $\frac{A(a, a), \neg A(a, a) \vee \neg A(b, a)}{\neg A(b, a)}$  zaključujemo da u domenu interpretacije važi:

- (6)  $\neg A(b, a).$

Iz (3) i (5) prema rezoluciji  $\frac{A(b, b), \neg A(b, b) \vee \neg A(a, b)}{\neg A(a, b)}$  zaključujemo da u domenu interpretacije važi:

- (7)  $\neg A(a, b).$

Sad iz (7) i (1) prema rezoluciji  $\frac{\neg A(a, b), A(a, b) \vee A(b, a)}{A(b, a)}$  zaključujemo da u domenu interpretacije važi:

- (8)  $A(b, a).$

Konačno iz (8) i (6) prema rezoluciji  $\frac{A(b, a), \neg A(b, a)}{\square}$  zaključujemo da je prazan sastavak posledica polaznog skupa sastavaka. Samim tim polazna formula jeste valjana.

**6.** Odrediti kompoziciju  $\alpha\beta$  supstitucija:

- a)  $\alpha = \{x \mapsto f(y), y \mapsto z\}, \beta = \{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y\};$
- b)  $\alpha = \{x \mapsto a, y \mapsto f(z), z \mapsto y\}, \beta = \{x \mapsto b, y \mapsto z, z \mapsto g(x)\}.$

**Rešenje. a)** Za supstitucije:

$$\alpha = \{x \mapsto f(y), y \mapsto z\} \quad \text{i} \quad \beta = \{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y\}$$

formirajmo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \{x \mapsto f(y)\beta, y \mapsto z\beta\} \setminus \{x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z\} \\ &= \left( \{x \mapsto f(b), \underline{y \mapsto y}\} \right) = \{x \mapsto f(b)\} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y\} \setminus \{x \mapsto a, y \mapsto b \mid x \mapsto f(y), y \mapsto z \in \alpha\} \\ &= \left( \{\underline{x \mapsto a}, \underline{y \mapsto b}, z \mapsto y\} \right) = \{z \mapsto y\}. \end{aligned}$$

Odatle prema definiciji:

$$\alpha\beta = \alpha_1 \cup \beta_1 = \{x \mapsto f(b), z \mapsto y\}.$$

**b)** Za supstitucije:

$$\alpha = \{x \mapsto a, y \mapsto f(z), z \mapsto y\} \quad \text{i} \quad \beta = \{x \mapsto b, y \mapsto z, z \mapsto g(x)\}$$

formirajmo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \{x \mapsto a\beta, y \mapsto f(z)\beta, z \mapsto y\beta\} \setminus \{x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z\} \\ &= \left( \{x \mapsto a, y \mapsto f(g(x)), \underline{z \mapsto z}\} \right) = \{x \mapsto a, y \mapsto f(g(x))\} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{x \mapsto b, y \mapsto z, z \mapsto g(x)\} \setminus \{x \mapsto b, y \mapsto z, z \mapsto g(x) \mid x \mapsto a, y \mapsto f(z), z \mapsto y \in \alpha\} \\ &= \left( \{\underline{x \mapsto b}, \underline{y \mapsto z}, \underline{z \mapsto g(x)}\} \right) = \{\}. \end{aligned}$$

Odatle prema definiciji:

$$\alpha\beta = \alpha_1 \cup \beta_1 = \{x \mapsto a, y \mapsto f(g(x))\}.$$