

3. FORMALNE TEORIJE

1. Opisati kodiranje formula predikatskog računa. Ilustrovati kodiranje na primeru sledeće formule:

$$(\forall x_1)(\forall x_2) R_1^2(x_1, x_2).$$

Rešenje. Jedan od načina je da uvedimo sledeće kodiranje simbola alfabeta predikatskog računa:

simbol	kod simbola
(3
)	5
,	7
\neg	9
\implies	11
\forall	13
x_i	$8i + 9$
a_i	$8i + 11$
f_k^m	$8(2^k 3^m) + 13$
R_k^m	$8(2^k 3^m) + 15$

Pri tom x_i je i -ta promenljiva, a_i je i -ta konstanta (primetimo da $8i + 9$ daje ostatak 1 po modulu 8, a $8i + 11$ daje ostatak 3 po modulu 8). Dalje f_k^m je k -ta funkcija od m argumenata i R_k^m je k -ta relacija od m argumenata (primetimo da $8(2^k 3^m) + 13$ daje ostatak 5 po modulu 8, a $8(2^k 3^m) + 15$ daje ostatak 7 po modulu 8). Neka je predikatska formula Φ zapisana sa sledećim nizom simbola s_1, \dots, s_n (čitanih sleva nadesno). Tada formuli Φ pridružujemo jednoznačno kod:

$$K(\Phi) = p_1^{K(s_1)} \cdot \dots \cdot p_n^{K(s_n)},$$

gde su p_1, \dots, p_n prvih n prostih brojeva. Posmatrajmo formulu:

$$\Phi : (\forall x_1)(\forall x_2) R_1^2(x_1, x_2).$$

Prethodna formula je zapisana nizom simbolima s_1, \dots, s_{14} . Simboli i odgovarajući kodovi simbola su dat sledećom tablicom:

$s_1 = ($	$K(s_1) = 3$	$s_8 =)$	$K(s_8) = 5$
$s_2 = \forall$	$K(s_2) = 13$	$s_9 = R_1^2$	$K(s_9) = 8 \cdot (2^1 \cdot 3^2) + 15 = 159$
$s_3 = x_1$	$K(s_3) = 8 \cdot 1 + 9 = 17$	$s_{10} = ($	$K(s_{10}) = 3$
$s_4 =)$	$K(s_4) = 5$	$s_{11} = x_1$	$K(s_{11}) = 8 \cdot 1 + 9 = 17$
$s_5 = ($	$K(s_5) = 3$	$s_{12} = ,$	$K(s_{12}) = 7$
$s_6 = \forall$	$K(s_6) = 13$	$s_{13} = x_2$	$K(s_{13}) = 8 \cdot 2 + 9 = 25$
$s_7 = x_2$	$K(s_7) = 8 \cdot 2 + 9 = 25$	$s_{14} =)$	$K(s_{14}) = 5$

Odatle kod formule Φ je dat sa prirodnim brojem:

$$K(\Phi) = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{17} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^{13} \cdot 17^{25} \cdot 19^5 \cdot 23^{159} \cdot 29^3 \cdot 31^{17} \cdot 37^7 \cdot 41^{25} \cdot 43^3$$

Napomenimo da se za relativno jednostavne formule sa navedenim kodiranjem dobijaju kodovi kao jako veliki prirodni brojevi. Tako npr. $K(\Phi) = 2.67 \dots \cdot 10^{380}$.

2. Neka je data formalna teorija $\mathcal{T} = (A, \text{Form}, \text{Ax}, R)$ sa elementima:

$$A = \{a, b\}, \quad \text{Form} = A^*, \quad \text{Ax} = \{a, b\}, \quad R = \{\alpha, \beta\};$$

gde su data pravila izvođenja: $\alpha : \frac{xa}{xab}$ i $\beta : \frac{xb}{xba}$. Opisati sve teoreme formalne teorije.

Rešenje. Skup formula $\text{Form} = A^*$ nad azbukom dobija se od reči dopisivanjem slova nad azbukom A . Dokažimo tvrđenje: *reč iz Form jeste teorema formalne teorije \mathcal{T} ako i samo ako se dobija naizmeničnim zapisivanjem slova a i b .*

(\Rightarrow) : Dokažimo da ako je $t \in \text{Form}$ teorema onda se dobija naizmeničnim zapisivanjem slova a i b . Dokaz izvodimo indukcijom po dužini reči $n = |t|$. Označimo sa e praznu reč. Tada iz $a(= ea) \in \text{Ax}$, saglasno pravilu izvođenja α , zaključujemo da je reč dužine dva $ab(= eab)$ teorema. Analogno iz $b(= eb) \in \text{Ax}$, saglasno pravilu izvođenja α , zaključujemo da je reč dužine dva $ba(= eba)$ teorema. Ostale reči aa i bb dužine dva nisu teoreme jer se ne dobijaju pomoću pravila izvođenja α i β . Neka su sledeće reči dužine n :

$$t_1 = abab \dots ab(a),$$

odnosno:

$$t_2 = baba \dots ba(b),$$

dobijene naizmeničnim zapisivanjem slova a i b , teoreme formalne teorije \mathcal{T} . U prethodnom zapisu izrazi pod zagradama su uključeni samo ako je n neparan broj. Neka je $t \in \text{Form}$ teorema dužine $n + 1$. Neka reč t počinje slovom a . Tada saglasno pravilima izvođenja ako je n paran broj važi:

$$t_1 \vdash_{\beta} t = t_1 a = \underbrace{abab \dots ab}_{t_1} a,$$

odnosno:

$$t_1 \vdash_{\beta} t = t_1 b = \underbrace{abab \dots aba}_{t_1} b,$$

ako je n neparan broj. Analogno, primenom pravila izvođenja α i β na reč t_2 tvrđenje važi ukoliko reč t počinje slovom b . Sveukupno važi traženi zaključak da je teorema t , dužine $n + 1$, dobijena naizmeničnim zapisivanjem slova a i b .

(\Leftarrow) : Dokažimo da su reči dobijene naizmeničnim zapisivanjem slova a i b teoreme formalne teorije \mathcal{T} . Iz $a \in \text{Ax}$, saglasno pravilu izvođenja α , zaključujemo da je reč dužine dva ab teorema. Analogno iz $b \in \text{Ax}$, saglasno pravilu izvođenja α , zaključujemo da je reč dužine dva ba teorema. Dalje, dobijamo teoreme dužine tri:

$$ab \vdash_{\beta} aba \quad \text{i} \quad ba \vdash_{\beta} bab.$$

Nastavljajući naizmeničnu primenu pravila α i β , za proizvoljan prirodan broj n dobijamo dokaz da su reči dobijene naizmeničnim zapisivanjem slova a i b teoreme sa sledećim izvođenjem:

$$a \vdash_{\alpha} ab \vdash_{\beta} aba \vdash_{\alpha} abab \vdash_{\beta} \dots \vdash_{\alpha(\beta)} abab \dots ab(a),$$

odnosno:

$$b \vdash_{\beta} ba \vdash_{\alpha} bab \vdash_{\beta} baba \vdash_{\alpha} \dots \vdash_{\beta(\alpha)} baba \dots ba(b).$$

U prethodnom zapisu izrazi pod zagradama su uključeni samo ako je n neparan broj.

3. Dokazati da je sledeća formula

$$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \implies (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$$

teorema predikatskog računa.

Rešenje. Dokazaćemo da je navedena formula teorema u predikatskom računu kao formalnoj teoriji. Navodimo jedan dokaz:

- | | | |
|-----|---|--------------------------------------|
| 1. | $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ | polazna pretpostavka |
| 2. | $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \implies (\forall x)A(x)$ | izvod iz tautologije |
| 3. | $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \implies (\forall x)B(x)$ | izvod iz tautologije |
| 4. | $(\forall x)A(x)$ | m.p. 1. i 2. |
| 5. | $(\forall x)B(x)$ | m.p. 1. i 3. |
| 6. | $(\forall x)A(x) \implies A(x)$ | Ax. 5 za $x=t$ |
| 7. | $(\forall x)B(x) \implies B(x)$ | Ax. 5 za $x=t$ |
| 8. | $A(x)$ | m.p. 4. i 6. |
| 9. | $B(x)$ | m.p. 5. i 7. |
| 10. | $A(x) \wedge B(x)$ | $A(x), B(x) \vdash A(x) \wedge B(x)$ |
| 11. | $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ | generalizacija 10. |