

## V GLAVA

### 1. Rešavanje nelinearnih jednačina.

- Osnovni problem je rešavanje jednačine  $f(x) = 0$ .

### 2. Lokalizacija rešenja jednačine

**Stav 1.** Ako  $f \in [a, b]$  i ako je  $f(a) \cdot f(b) < 0$  onda na intervalu  $(a, b)$  jednačina ima bar jedno rešenje.

**Stav 2.** Ako  $f \in [a, b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  i ako je  $f$  monotona funkcija, onda ona na  $(a, b)$  ima tačno jedno rešenje.

**Teorema 1:** Ako je  $x^* \in [a, b]$  tačno rešenje jednačine  $f(x) = 0$ , a  $\bar{x}$  njeno približno

rešenje i  $0 \leq m_1 \leq \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| < \infty$ , tada važi procena:  $|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$

**Dokaz:** Ako na odsečku  $(x^*, \bar{x})$  [ili  $(\bar{x}, x^*)$ ] primenimo Lagrange-ovu teoremu o srednjoj vrednosti imamo da je:

$$f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(\xi)(\bar{x} - x^*) \rightarrow \xi \in (x^*, \bar{x})$$

$$\text{ili,} \quad f(x^*) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x^* - \bar{x}) \rightarrow \xi \in (\bar{x}, x^*)$$

odnosno, kako je  $f(x^*) = 0$ , dobijamo da je:

$$|x^* - \bar{x}| = \left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$$

\*\*\*U praksi se uzima da je  $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ \*\*\*

**Napomena:** Ovo je teorema o proceni greške, približnim izračunavanjem rešenja jednačine.

### 3. Metoda polovljenja segmenata

Neka za jednačinu  $f(x) = 0$ , važi da je  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Podelimo odsečak  $[a, b]$  na dva odsečka  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  i  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ . Ako je  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , tada je  $x^* = \frac{a+b}{2}$  rešenje jednačine.

U suprotnom će važiti da je  $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$   $\vee$   $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0$ . Odaberimo one dve vrednosti granica jednog od intervala, na kojima je proizvod negativan i označimo taj interval sa  $[a_1, b_1]$ . Nastavljajući postupak, dobijamo niz intervala

$$\dots [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

pri čemu svaki od njih sadrži tačno rešenje  $x^*$ .

**(I) - Kako je**

$$a_{n+1} \geq a_n > a$$

$$b_{n+1} \leq b_n < b$$

Njegove granice intervala su monotone i ograničene i dakle važi da su konvergentni.

Nije teško uočiti da je  $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ , odakle sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \tilde{x}$$

Kako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)(b_n) = f^2(\tilde{x}) \leq 0$  (zbog  $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ )  $\Rightarrow f(\tilde{x}) = 0$

Dakle, tačka kojoj konvergiraju je rešenje polazne jednačine. Znači, možemo za približno rešenje uzeti u svakoj iteraciji da je  $\bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

**(II) - Procena greške: Ako je jednačinu potrebno rešiti sa tačnošću  $\varepsilon$ :**

- Kako i tačno rešenje  $x^*$  i približno  $\bar{x}_n$  pripadaju intervalu  $[a_n, b_n]$ , tada je:

$|x^* - \bar{x}_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$ , odakle se izračunava  $n$ , tj. broj iteracija potrebnih za tačnost  $\varepsilon$ .

**4. Newton-Raphson-ova metoda. Metoda tangente**

- Ako je potrebno rešiti jednačinu  $f(x) = 0$ , uzmimo za početnu vrednost rešenja tačku  $x_0$ . U tačku  $(x_0, f(x_0))$  postavimo tangentu, čija jednačina glasi:

$$t: y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Ako je  $x_1$  približno rešenje, takvo da je

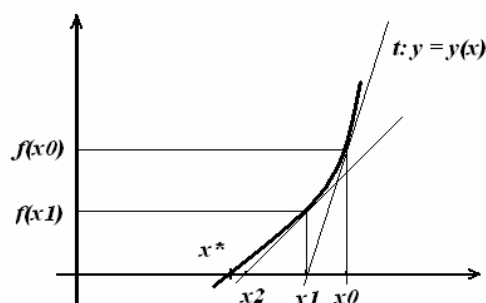
$y(x_1) = 0$ , iz gornje jednačine dobijamo da

je: 
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Nastavljanjem postupka dobijamo  
Iteracioni postupak:

(1) 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Početna vrednost  $x_0 \in \{a, b\}$  i to  
ona za koju je  $f(x_0) f''(x_0) > 0$



- Postavlja se pitanje konvergencije ovog postupka i tačnosti dobijenog rešenja.

**Teorema 2:**  $f \in C(D)$ ,  $D$  neki (otvoren) interval,  $|f''(x)| \leq M_2$ ,  $0 < m_1 \leq |f'(x)|$  za  $x \in D$ ,

tada niz definisan sa (1) konvergira ka rešenju  $x^*$  jednačine  $f(x) = 0$  i pritom važi

ocena 
$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

**Dokaz:** Na osnovu Tajlorove formule, u okolini tačke  $x_{n-1}$ , imamo da je:

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = \boxed{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2, \text{ pri čemu}$$

$$\xi \in (x_{n-1}, x_n).$$

- Po definiciji postupka, iz (1) sledi da je zaokruženi deo jednak 0, te je:

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2, \text{ tj.}$$

$$f(x_n) \leq \frac{1}{2} M_2 |x_n - x_{n-1}|^2$$

- Zbog **teoreme 1** imamo da je:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \text{ te je } \boxed{|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2}.$$

Šta uzeti za  $x_0$ :

Uzimamo a ili b,

ali ono za koje je

$$\boxed{f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$$

- Ako sa tačnošću  $\varepsilon$  treba naći rešenje, upoređivanje dva susedna koraka iteracija vrši se

prema vezi:  $\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon$ , odnosno  $\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}}.$

### - Modifikacija Newton-ove metode:

- Zbog izračunavanja,  $f'(x_n)$  se može zameniti sa  $f'(x_0)$ , te metoda glasi:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}} \rightarrow \text{Usporava proces konvergencije.}$$

Jedna od modifikacija Newton-ove metode jeste i

### - Metoda sečice:

Kako je  $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ , zamenom u Newton-ov metod dobijamo **metod sečice**:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}} \Leftrightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

pri čemu za unapred zadanu grešku  $\varepsilon$ , imamo da je:

$$\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}}$$

**Odakle naziv metoda sečice:**

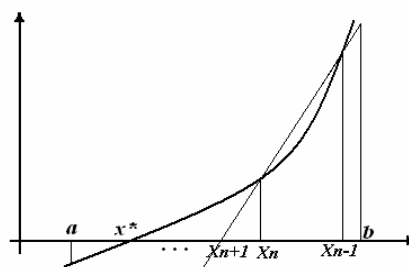
- Vidimo da sečica kroz tačke  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

i  $(x_n, f(x_n))$  ima oblik:

$$y(x) - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n)$$

Dobijamo: (x za koje je  $y(x) = 0$ )

$$\underbrace{x}_{(n+1) \text{ iteracija}} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



- Za početnu tačku  $x_0$ , iteracionog procesa najčešće uzimamo  $a$  ili  $b$ , i to ostoje dva slučaja:

**(I)** Ako za  $x \in [a, b]$  važi da je  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ , tada je  $x_0 = a$ , a metod se može modifikovati:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{jer se tačno rešenje} \\ \text{nalazi krećući ka } b \end{array} \right]$$

**(II)** Ako je za  $x \in [a, b]$  ispunjeno  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , tada je  $x_0 = b$ , a metod glasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{naredna iteracija} \\ \text{kreće se ka } a \end{array} \right].$$

- Metoda sečice sporije konvergira od metode Newton-a !

### - Kombinovana metoda: (Newton-a i sečice)

I slučaj: Za  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}; \quad \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)}$$

II slučaj: Za  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)}{f'(\underline{x}_n)}; \quad \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}$$

Pri čemu je u oba slučaja  $\underline{x}_0 = a$ ,  $\overline{x}_0 = b$ . Tačnost se postiže kada je  $|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < 2\varepsilon$ , a za

rešenje se uzima:

$$x^* = \frac{\underline{x}_n + \overline{x}_n}{2}$$