

Glava 3

Numerička integracija

3.1 Kvadraturene formule

Numerička integracija se zasniva na integraciji interpolacionih polinoma. Naime, ako je $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx,$$

dok je greška ovakve integracije $R \leq \left| \int_a^b R_n(x) dx \right|$.

Pretpostavimo da je funkcija interpolirana LAGRANGEovim interpolacionim polinomom. Tada je:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} f_i \right) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx \cdot f_i \right\} + \int_a^b R_n(x) dx. \end{aligned}$$

Imamo da je vrednost integrala sledećeg oblika

$$(3.1) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i + R, \text{ gde je } A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx.$$

Formule oblika $\sum_{i=0}^n A_i f_i$ koje aproksimiraju vrednost integrala nazivaju se **kvadraturene formule**. Ako je funkcija $f(x)$ polinom stepena $\leq n$, da je tada $R_n(x) = 0$, a samim tim je i $R = 0$, te je iz (3.1) za polinome stepena $\leq n$ zadovoljeno da je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i.$$

Uzimajući da je funkcija $f \in \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dobijamo sistem jednačina:

$$b - a = \sum_{i=0}^n A_i; \quad \frac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{i=0}^n A_i x_i \quad \dots \quad \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=0}^n A_i x_i^n.$$

iz koga određujemo koeficijente A_i .

U slučaju kada je $x_0 = a$, $x_n = b$, a ostali čvorovi su ekvidistantni, integracijom LAGRANGEovog interpolacionog polinoma dobijamo NEWTON-COTES ove formule.

3.2 NEWTON-COTES ove formule

Neka su x_0, x_1, \dots, x_n ekvidistantni čvorovi, takvi da je $x_0 = a$ i $x_n = b$. Imamo da je

$$\begin{aligned} A_i &= \int_{x_0}^{x_n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} dx \end{aligned}$$

Uvodeći smenu $x = x_0 + th$, pri čemu je $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$)

dobijamo

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \frac{th(t-1)h \cdots (t-i+1)(t-i-1) \cdots (t-n)h}{ih(i-1)h \cdots (i-i+1)(i-i-1) \cdots (i-n)h} \quad \left| \cdot \frac{t-i}{t-i} \right. \\ &= \frac{t(t-i) \cdots (t-n)}{(t-i)i!(-1)^{n-i}(n-i)!} \end{aligned}$$

gde $i!$ proističe iz prvog dela činilaca, $(-1)^{n-i}(n-i)!$ iz drugog dela činilaca.

Zbog poslednjeg i činjenice da je $h = \frac{b-a}{n}$ imamo da je:

$$\begin{aligned} A_i &= \int_0^n \frac{(-1)^{n-i}t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i)i!(n-i)!} h dt \\ &= \frac{h(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i)} dt \\ &= (b-a) \frac{(-1)^{n-i}}{n i! (n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i)} dt = (b-a) C_i^n \end{aligned}$$

C_i^n nazivamo NEWTON-COTESovi koeficijenti. Za njih važi $C_i^n = C_{n-i}^n$.

Specijalni Slučajevi:

1) Za $n = 1$ dobijamo **trapezno pravilo** (jer imamo dva čvora)

$$C_0^1 = - \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2}; \quad C_1^1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{(t-1)} dt = \frac{1}{2},$$

koje glasi:

$$\int_0^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{2} h (f_0 + f_1) + R_1,$$

za $h = b - a$ koje stoji ispred C_i^n .

Ako imamo n čvorova, uopštavanjem prethodnog dobijamo da je

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) + \frac{1}{2}h(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{1}{2}h(f_{n-1} + f_n) + R \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2}h(f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n) + R, \end{aligned}$$

što predstavlja **opšte trapezno pravilo**.

Pitanje greške: Kako je greška Lagrange ovog interpolacionog polinoma $R_n = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\prod_{n+1}(x)|$ tada će ukupna greška biti suma grešaka na pojedinim segmentima. Integralna greška za polazni slučaj iznosi

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{M_2}{2!} \left| \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx \right| \quad \text{smena: } x = x_0 + th \\ &= \frac{M_2}{2!} h^3 \left| \int_0^1 (t^2 - t) dt \right| = \frac{M_2}{12} h^3, \end{aligned}$$

odakle nalazimo da je ukupna greška R , za gornji niz zbira integrala $R = n \frac{M_2 h^3}{12}$, a kako je $\frac{b-a}{n} = h$ imamo da je greška metode

$$R = (b - a) \frac{M_2 h^2}{12}$$

2) Za $n = 2$ dobijamo **SIMPSONOVO pravilo**:

$$C_0^2 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{f(t-1)(t-2)}{t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{6} = C_2^2; \quad C_1^2 = \frac{2}{3}$$

odakle sledi da zbog $\frac{b-a}{2} = h \Leftrightarrow b - a = 2h$ važi da je:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2h \left(\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{6}f_2 \right) + R_1 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + R_1.$$

Ako je dato $2n + 1$ čvorova, i to x_0, x_1, \dots, x_{2n} , deljenjem na integrale gornjeg tipa dobijamo **Opštu SIMPSONovu formulu**:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &\quad + \dots + \frac{h}{3}(f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) + R \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) \\ &\quad + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}) + R \end{aligned}$$

Pitanje greške: Za jedan segment imamo da je:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{M_3}{3!} \left| \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) dx \right| \\ &= \frac{M_3 h^4}{3!} \left| \int_0^2 t(t-1)(t-2) dt \right| \\ &= \frac{M_3}{3!} h^4 \left| \int_0^2 (t^3 - 3t^2 + 2t) dt \right| = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow R = 0$, što je nemoguće, jer su funkcija f i njen interpolacioni polinom različiti! Dobijeni rezultat $R = 0$ znači da je formula tačna i za polinom stepena 3, te će greška biti četvrtog reda. Dakle, imamo da je

$$R_1 = \frac{M_4}{24} \left| \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_2) dx \right| = \frac{M_4 h^5}{90}$$

odakle dobijamo da je ukupna greška izvedene formule

$$R = \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$$

Kod određivanja integrala **ukupna tj. totalna greška** je $R^T = R_M + r$, gde je greška r greška računa i ona iznosi $r = \varepsilon_r(b-a)$, a R_M greška metode.

Kod trapeznog pravila imamo da je $r = n h \frac{1}{2} 10^{-k}$, ako se radi sa k decimala, pri čemu je $\varepsilon_r = \frac{1}{2} 10^{-k}$, a kako je $nh = b - a$ dobijamo da je $r = (b - a) \frac{1}{2} 10^{-k}$,

Kod SIMPSON ovog pravila iste su formule za r kao kod trapeznog pravila. (Izvesti za domaći).

3.3 RUNGEova ocena greške za procenu greške metoda

U opštem slučaju greška NEWTON-COTESovih formula ima oblik, za korak tabeliranja h i funkciju f :

$$R^h(f) = c(b - a)M_n h^n \begin{cases} \text{Simpson: } R^h(f) = \frac{b-a}{180} M_4 h^4 \\ \text{Trapezna: } R^h(f) = \frac{b-a}{180} M_2 h^2 \end{cases}$$

Vidimo da se greška integracije smanjuje ako se smanji korak h . Neka je integral I funkcije f izračunat za dva koraka h_1 i h_2 istom metodom, pri čemu je $h_1 < h_2$. Imamo da je:

$$\left. \begin{aligned} R^{h_1}(f) &= c(b - a)M_n h_1^n \\ R^{h_2}(f) &= c(b - a)M_n h_2^n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Za neku odabranu NEWTON-COTESovu} \\ \text{formulu i fiksirano } n \end{array}$$

Imamo da je:

$$\left. \begin{aligned} R^{h_1}(f) &= I - I_{h_1} \\ R^{h_2}(f) &= I - I_{h_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} I_{h_1}, I_{h_2} \text{ su izračunati nekom} \\ \text{kvadraturnom formulom} \end{array}$$

Iz gornjeg sledi:

$$\begin{aligned} I_{h_2} - I_{h_1} &= R^{h_1}(f) - R^{h_2}(f) = c(b - a)M_n h_1^n \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right) \\ &= (I - I_{h_1}) \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right) = R^{h_1}(f) \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right) \end{aligned}$$

Iz čega dobijamo da je:

$$R^{h_1}(f) = \frac{I_{h_1} - I_{h_2}}{\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n - 1}$$

Zbog pozitivnosti greške važi da je:

$$R^{h_1}(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^n - 1}$$

Dakle, grešku metode za određeni korak h_1 ne moramo računati pomoću maksimuma izvoda, nego „upoređivanjem” razlike vrednosti dobijenih integrala za taj korak i za veći korak h_2 . Najčešće se greška smanjuje, do postizanja potpuno zadovoljavajućeg rešenja, duplim smanjivanjem koraka. U specijalnim slučajevima greške RUNGEa imaju oblik:

$$\text{Simpson: } R(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4 - 1}; \quad \text{Trapezna: } R(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1}$$

Napomena: Podelu „usitnjavamo” sve dok konačna greška ne bude manja od unapred zadate greške metode.

Zadatak 1. Koristeći SIMPSONovu formulu izračunati $\int_0^1 \cos(x^2) dx$ sa tačnošću $R = 0.5 \times 10^{-4}$, radeći sa 5 decimala.

Rešenje:

$R^T = R_M + r$, gde je $r_R = \frac{1}{2}(1 - 0)10^{-5}$ te je

$$R_M = R^T - r_R \Rightarrow R_M = 0.0005 - 0.00005 = 0.00045$$

Dakle, $R_M = 4.5 \times 10^{-4}$. Osnovno pitanje je koliko je korak h . Uzmimo da je $h = 0.1$, a zatim $h = 0.05$ i primenimo RUNGEovu ocenu greške. (Računamo u *rad* - radijanima).

$h = 0.1$			
x	y_0, y_{2k}	y_{2k-1}	y_{2k}
0	1		
0.1		0.99995	
0.2			0.99920
0.3		0.99595	
0.4			0.98723
0.5		0.96891	
0.6			0.93590
0.7		0.88233	
0.8			0.80210
0.9		0.68950	
1.0	0.54030		
\sum	1.54030	4.53664	3.72443

$h_1 = 0.05$	
x	y_{2k-1}
0.05	1.00000
0.15	0.99995
0.25	0.99805
0.35	0.99251
0.45	0.97957
0.55	0.95460
0.65	0.91207
0.75	0.84592
0.85	0.75015
0.95	0.61965
\sum	9.05247

$$I_h = \frac{0.1}{3} [1.54030 + 4 \times 4.53664 + 2 \times 3.72443] = 0.90452$$

$$I_{h_1} = \frac{0.05}{3} [1.54030 + 4 \times 9.05247 + 2 \times 8.26107] = 0.90454$$

Uočimo da umanjenjem koraka svi čvorovi iz prethodnog dela postaju čvorovi sa parnim indeksom u narednom! Imamo da je za drugu tabelu

$$\sum_{y_{2k}} 4.53664 + 3.72443 = 8.26107$$

Procena greške RUNGEovom metodom:

$$R_{h_1} = \frac{0.90454 - 0.90452}{2^4 - 1} = 1.3 \times 10^{-6} < 4.5 \times 10^{-4}$$

Dakle, postignuta je tačnost, te je:

$$I \approx 0.90454$$

***Maple daje rezultat $I \approx 0.9045242448$ ***

3.4 GAUSOVE kvadraturne formule

Formule oblika

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

nazivamo kvadraturnim formulama.

Koeficijente A_i određujemo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Zamenom $f \in \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dobijamo koeficijente A_0, A_1, \dots, A_n . Greška je tada:

$$R \leq \int_a^b \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0) \dots (x-x_n)| dx.$$

Ako se uoči da je dobijena formula tačna i za x^{n+1}, \dots, x^{n+k} , a da ne važi za x^{n+k+1} , tada je greška

$$R \leq \int_a^b \frac{M_{n+k+1}}{(n+k+1)!} |(x-x_0)^{k+1} (x-x_1) \dots (x-x_n)| dx.$$

Formule oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R_n(f),$$

gde su x_i ($i = \overline{1, \dots, n}$) nule LEGANDREovog polinoma n -tog stepena

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$$

nazivamo GAUSSovim kvadraturnim formulama i pri tome je

$$R_n(f) \leq \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 M_{2n}$$

Napomena: Ako imamo integraciju na intervalu $[a, b]$, a želimo da primenimo GAUSS kvadraturene formule, prvo uvodimo smenu:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1, 1]$$

Zadatak 2. Izvesti formulu za unmeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x) dx = Af(0) + Bf\left(\frac{2h}{3}\right) + R(h)$$

tako da bude tačna za polinome što višeg stepena. Proceniti grešku integracije $R(h)$.

Rešenje.

$$f(x) = 1 : A + B = h$$

$$f(x) = x : B = \frac{3}{4}h \Rightarrow A = \frac{1}{4}h$$

Formula glasi

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{1}{4}hf(0) + \frac{3}{4}hf\left(\frac{2h}{3}\right)$$

Provera za grešku:

$$f(x) = x^2 : \frac{h^3}{3} = \frac{3}{4}h \cdot \frac{4h^2}{9} \Rightarrow \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3}$$

$$f(x) = x^3 : \frac{h^4}{4} \neq \frac{2h^4}{9}$$

Dakle greška je trećeg reda:

$$R(h) \leq \int_0^h \frac{M_3}{3!} \left((x-0)^2 \left(x - \frac{2h}{3} \right) \right) dx = \frac{M_3}{6} \int_0^h \left(x^3 - \frac{2h}{3}x^2 \right) dx$$

$$= \frac{M_3}{6} \left(\frac{h^4}{4} - \frac{2}{9}h^4 \right) = \frac{M_3h^4}{216}$$