

# Glava 5

## Rešavanje nelinearnih jednačina

Osnovni problem je rešavanje jednačine  $f(x) = 0$ .

### 5.1 Lokalizacija rešenja jednačine

**Stav 1.** Ako  $f \in C[a, b]$  i ako je  $f(a) \cdot f(b) < 0$  onda na intervalu  $(a, b)$  jednačina  $f(x) = 0$  ima bar jedno rešenje.

**Stav 2.** Ako  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  i ako je  $f$  monotona funkcija, onda na intervalu  $(a, b)$  jednačina  $f(x) = 0$  ima tačno jedno rešenje.

**Teorema 1.** Ako je  $x^* \in [a, b]$  tačno rešenje jednačine  $f(x) = 0$ , a  $\bar{x}$  njeno približno rešenje i  $0 \leq m_1 \leq \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| < \infty$ , tada važi procena:  $|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$ .

**Dokaz.** Ako na odsečku  $(x^*, \bar{x})$  (ili  $(\bar{x}, x^*)$ ) primenimo LAGRANGE-ovu teoremu o srednjoj vrednosti imamo da je:

$$f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(\xi)(\bar{x} - x^*) \rightarrow \xi \in (x^*, \bar{x})$$

ili

$$f(x^*) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x^* - \bar{x}) \rightarrow \xi \in (\bar{x}, x^*)$$

odnosno, kako je  $f(x^*) = 0$ , dobijamo da je:

$$|x^* - \bar{x}| = \left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

U praksi se uzima da je  $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

**Napomena:** Ovo je teorema o proceni greške, približnim izračunavanjem rešenja jednačine.

## 5.2 Metoda polovljenja segmenata

Neka za jednačinu  $f(x) = 0$ , važi da je  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Podelimo odsečak  $[a, b]$  na dva odsečka  $[a, \frac{a+b}{2}]$  i  $[\frac{a+b}{2}, b]$ . Ako je  $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ , tada je  $x^* = \frac{a+b}{2}$  rešenje jednačine. U suprotnom će važiti da je

$$f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \vee f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0.$$

Odaberimo one dve vrednosti granica jednog od intervala, na kojima je proizvod negativan i označimo taj interval sa  $[a_1, b_1]$ . Nastavljajući postupak, dobijamo niz intervala

$$\cdots [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

pri čemu svaki od njih sadrži tačno rešenje  $x^*$ .

(I) Kako su

$$a_{n+1} \geq a_n > a$$

$$b_{n+1} \leq b_n < b$$

nizovi koji čine granice intervala monotoni i ograničeni te su i konvergentni.

Nije teško uočiti da je  $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ , odakle sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \tilde{x}$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(\tilde{x}) \leq 0$$

(zbog  $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(\tilde{x}) = 0$ ). Dakle, tačka kojoj konvergiraju je rešenje polazne jednačine. Znači, možemo za približno rešenje uzeti u svakoj iteraciji da je  $\bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

(II) Procena greške: Ako je jednačinu potrebno rešiti sa tačnošću  $\varepsilon$  postupamo na sledeći način:

Kako i tačno rešenja  $x^*$  i približno  $\bar{x}_n$  pripadaju intervalu  $[a_n, b_n]$ , tada je :

$$|x^* - \bar{x}_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon,$$

odakle se izračunava  $n$ , tj. broj iteracija potrebnih za tačnost  $\varepsilon$ .

## 5.3 NEWTON-RAPHSONova metoda

### Metoda tangente

Ako je potrebno rešiti jednačinu  $f(x) = 0$ , uzmimo za početnu vrednost rešenja tačku  $x_0$ . U tački  $(x_0, f(x_0))$  postavimo tangentu, čija jednačina glasi:

$$t : y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

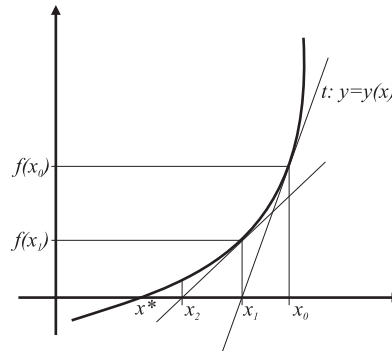
Ako je  $x_1$  približno rešenje, takvo da je  $y(x_1) = 0$ , iz gornje jednačine dobijamo da je:  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ . Nastavkom postupka dobijamo iteracioni postupak:

$$(5.1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Početna vrednost  $x_0 \in \{a, b\}$  i to ona za koju je  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

Postavlja se pitanje konvergencije ovog postupka i tačnosti dobijenog rešenja.

**Teorema 2.** Neka  $f \in C(D)$ , gde je  $D$  neki (otvoren) interval,  $|f''(x)| \leq M_2$ ,  $0 < m_1 \leq |f'(x)|$  za  $x \in D$ , tada niz definisan sa



(5.1) konvergira ka rešenju  $x^*$  jednačine  $f(x) = 0$  i pritom važi ocena

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

**Dokaz.** Na osnovu Tejlorove formule, u okolini tačke  $x_{n-1}$ , imamo da je:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) \\ &= \underline{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

pri čemu  $\xi \in (x_{n-1}, x_n)$ .

Po definiciji postupka, iz (5.1) sledi da je podvučeni deo jednak 0, te je:

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2,$$

tj,

$$f(x_n) \leq \frac{1}{2} M_2 |x_n - x_{n-1}|^2$$

Zbog Teoreme 1 imamo da je:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

odakle dobijamo da je

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Ako sa tačnošću  $\varepsilon$  treba naći rešenje, upoređivanje dva susedna koraka iteracije vrše se prema vezi:

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon, \text{ odnosno } |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}.$$

### 5.3.1 Modifikacija NEWTONove metode

Zbog izračunavanja,  $f'(x_n)$  se može zameniti sa  $f'(x_0)$ , te metoda glasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \rightarrow \text{Usporava proces konvergencije.}$$

Jedna od modifikacija NEWTONove metode jeste i

### 5.3.2 Metoda sečice

Kako je  $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ , zamenom u NEWTONov metod dobijamo *metod sečice*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

pri čemu za unapred zadanu grešku  $\varepsilon$ , imamo da je:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}$$

Odakle naziv metoda sečice:

Vidimo da sečica kroz tačke  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  i  $(x_n, f(x_n))$  ima oblik:

$$y(x) - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

Ako je  $y(x) = 0$  za neko  $x$  dobijamo da je:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Za početnu tačku  $x_0$ , iteracionog procesa najčešće uzimamo  $a$  ili  $b$ , i to postoje dva slučaja:

(I) Ako za  $x \in [a, b]$  važi da je  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ , tada je  $x_0 = a$ , a metod se može modifikovati:

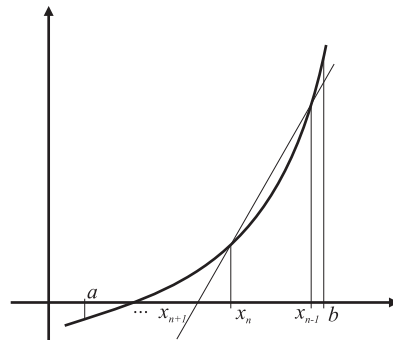
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

jer se tačno rešenje nalazi krećući se ka  $b$ .

(II) Ako je za  $x \in [a, b]$  ispunjeno  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , tada je  $x_0 = b$ , a metod glasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

jer se naredna iteracija kreće se ka  $a$ . Metoda sečice sporije konvergira od metode NEWTONA!



### 5.3.3 Kombinovana metoda (NEWTONa i sečice)

*I slučaj:* Za  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}; \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)}$$

*II slučaj:* Za  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)}{f'(\underline{x}_n)}; \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}.$$

Pri čemu je u oba slučaja  $\underline{x}_0 = a$ ,  $\overline{x}_0 = b$ . Tačnost se postiže kada je  $|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < 2\varepsilon$ , a za rešenje se uzima:  $x^* = \frac{\underline{x}_n + \overline{x}_n}{2}$ .