

Glava 5

Rešavanje nelinearnih jednačina

Osnovni problem je rešavanje jednačine $f(x) = 0$.

5.1 Lokalizacija rešenja jednačine

Stav 1. Ako $f \in C[a, b]$ i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$ onda na intervalu (a, b) jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedno rešenje.

Stav 2. Ako $f \in C[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i ako je f monotona funkcija, onda na intervalu (a, b) jednačina $f(x) = 0$ ima tačno jedno rešenje.

Teorema 1. Ako je $x^* \in [a, b]$ tačno rešenje jednačine $f(x) = 0$, a \bar{x} njeno približno rešenje i $0 \leq m_1 \leq \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| < \infty$, tada važi procena: $|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$.

Dokaz. Ako na odsečku (x^*, \bar{x}) (ili (\bar{x}, x^*)) primenimo LAGRANGE-ovu teoremu o srednjoj vrednosti imamo da je:

$$f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(\xi)(\bar{x} - x^*) \rightarrow \xi \in (x^*, \bar{x})$$

ili

$$f(x^*) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x^* - \bar{x}) \rightarrow \xi \in (\bar{x}, x^*)$$

odnosno, kako je $f(x^*) = 0$, dobijamo da je:

$$|x^* - \bar{x}| = \left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

U praksi se uzima da je $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Napomena: Ovo je teorema o proceni greške, približnim izračunavanjem rešenja jednačine.

5.2 Metoda polovljenja segmenata

Neka za jednačinu $f(x) = 0$, važi da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Podelimo odsečak $[a, b]$ na dva odsečka $[a, \frac{a+b}{2}]$ i $[\frac{a+b}{2}, b]$. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, tada je $x^* = \frac{a+b}{2}$ rešenje jednačine. U suprotnom će važiti da je

$$f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \vee f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0.$$

Odaberimo one dve vrednosti granica jednog od intervala, na kojima je proizvod negativan i označimo taj interval sa $[a_1, b_1]$. Nastavljajući postupak, dobijamo niz intervala

$$\cdots [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

pri čemu svaki od njih sadrži tačno rešenje x^* .

(I) Kako su

$$a_{n+1} \geq a_n > a$$

$$b_{n+1} \leq b_n < b$$

nizovi koji čine granice intervala monotoni i ograničeni te su i konvergentni.

Nije teško uočiti da je $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, odakle sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \tilde{x}$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(\tilde{x}) \leq 0$$

(zbog $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(\tilde{x}) = 0$). Dakle, tačka kojoj konvergiraju je rešenje polazne jednačine. Znači, možemo za približno rešenje uzeti u svakoj iteraciji da je $\bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

(II) Procena greške: Ako je jednačinu potrebno rešiti sa tačnošću ε postupamo na sledeći način:

Kako i tačno rešenja x^* i približno \bar{x}_n pripadaju intervalu $[a_n, b_n]$, tada je :

$$|x^* - \bar{x}_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon,$$

odakle se izračunava n , tj. broj iteracija potrebnih za tačnost ε .

5.3 NEWTON-RAPHSONova metoda

Metoda tangente

Ako je potrebno rešiti jednačinu $f(x) = 0$, uzmimo za početnu vrednost rešenja tačku x_0 . U tački $(x_0, f(x_0))$ postavimo tangentu, čija jednačina glasi:

$$t : y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

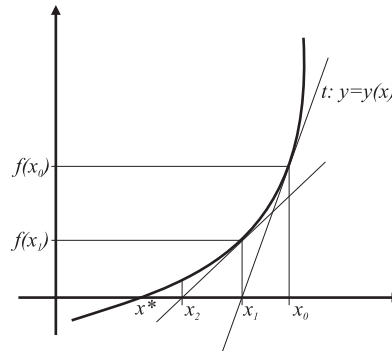
Ako je x_1 približno rešenje, takvo da je $y(x_1) = 0$, iz gornje jednačine dobijamo da je: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Nastavkom postupka dobijamo iteracioni postupak:

$$(5.1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Početna vrednost $x_0 \in \{a, b\}$ i to ona za koju je $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Postavlja se pitanje konvergencije ovog postupka i tačnosti dobijenog rešenja.

Teorema 2. Neka $f \in C(D)$, gde je D neki (otvoren) interval, $|f''(x)| \leq M_2$, $0 < m_1 \leq |f'(x)|$ za $x \in D$, tada niz definisan sa



(5.1) konvergira ka rešenju x^* jednačine $f(x) = 0$ i pritom važi ocena

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Dokaz. Na osnovu Tejlorove formule, u okolini tačke x_{n-1} , imamo da je:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) \\ &= \underline{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})} + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

pri čemu $\xi \in (x_{n-1}, x_n)$.

Po definiciji postupka, iz (5.1) sledi da je podvučeni deo jednak 0, te je:

$$f(x_n) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2,$$

tj,

$$f(x_n) \leq \frac{1}{2}M_2|x_n - x_{n-1}|^2$$

Zbog Teoreme 1 imamo da je:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

odakle dobijamo da je

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Ako sa tačnošću ε treba naći rešenje, upoređivanje dva susedna koraka iteracije vrše se prema vezi:

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon, \text{ odnosno } |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}.$$

5.3.1 Modifikacija NEWTONove metode

Zbog izračunavanja, $f'(x_n)$ se može zameniti sa $f'(x_0)$, te metoda glasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \rightarrow \text{Usporava proces konvergencije.}$$

Jedna od modifikacija NEWTONove metode jeste i

5.3.2 Metoda sečice

Kako je $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, zamenom u NEWTONov metod dobijamo *metod sečice*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

pri čemu za unapred zadanu grešku ε , imamo da je:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}$$

Odakle naziv metoda sečice:

Vidimo da sečica kroz tačke $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_n, f(x_n))$ ima oblik:

$$y(x) - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

Ako je $y(x) = 0$ za neko x dobijamo da je:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Za početnu tačku x_0 , iteracionog procesa najčešće uzimamo a ili b , i to postoje dva slučaja:

(I) Ako za $x \in [a, b]$ važi da je $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, tada je $x_0 = a$, a metod se može modifikovati:

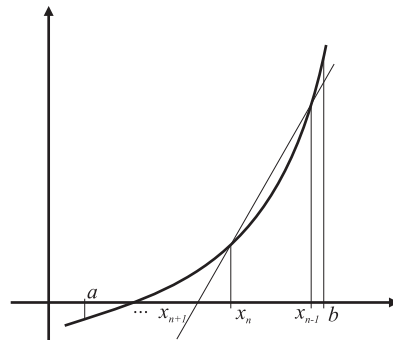
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

jer se tačno rešenje nalazi krećući se ka b .

(II) Ako je za $x \in [a, b]$ ispunjeno $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, tada je $x_0 = b$, a metod glasi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

jer se naredna iteracija kreće se ka a . Metoda sečice sporije konvergira od metode NEWTONA!



5.3.3 Kombinovana metoda (NEWTONa i sečice)

I slučaj: Za $f'(x) \cdot f''(x) > 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}; \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)}$$

II slučaj: Za $f'(x) \cdot f''(x) < 0$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{f(\underline{x}_n)}{f'(\underline{x}_n)}; \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)}.$$

Pri čemu je u oba slučaja $\underline{x}_0 = a$, $\overline{x}_0 = b$. Tačnost se postiže kada je $|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < 2\varepsilon$, a za rešenje se uzima: $x^* = \frac{\underline{x}_n + \overline{x}_n}{2}$.