

3 Numerička integracija

Opšte trapezno pravilo kad imamo $n + 1$ ekvidistantnih čvorova, (x_0, x_1, \dots, x_n) , $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, je dato formulom:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{n-1}) + f_n) + R \quad (1)$$

gde je $f_k = f(x_k)$, i R greška trapeznog pravila koja je oblika:

$$R_M = (b - a) \frac{M_2 h^2}{12}. \quad (2)$$

Opšte Simpsonovo pravilo kad imamo $2n+1$ ekvidistantnih čvorova, $(x_0, x_1, \dots, x_{2n})$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$, je dato formulom:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}) + R \quad (3)$$

gde je $f_k = f(x_k)$, i R greška Simpsonovog pravila koja je oblika:

$$R_M = (b - a) \frac{M_4 h^4}{180}. \quad (4)$$

Ovde je $M_k = \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|$. Za korišćenje Simpsonove formule potreban je *neparan* broj čvorova.

Ukupna greška koja nastaje prilikom određivanja integrala kvadraturnim formulama tipa (1) i (3) nastaje pod uticajem greške metode, R_M , i greške računa, r , koja je posledica zaokruživanja:

$$R = R_M + r \quad (5)$$

Greška računa, kada se računa sa k decimala, iznosi

$$r = (b - a) \frac{1}{2} 10^{-k} \quad (6)$$

pri čemu deo $\frac{1}{2} 10^{-k}$ je posledica načina zaokruživanja.

Rungeova ocena greške se koristi za procenu greške metode i ima sledeći oblik:

$$R(f) = |I(f) - I_h(f)| = \frac{|I_h(f) - I_{2h}(f)|}{2^k - 1} \quad (7)$$

pri čemu je $I(f)$ tačna vrednost integrala, $I_{2h}(f)$ približna vrednost dobijena sa korakom $2h$, i $I_h(f)$ približna vrednost dobijena sa prepolovljenim korakom h . Pri tom, za trapeznu formulu (1) $k = 2$, a za Simpsonovu formulu (3) $k = 4$. Podelu usitnjavamo sve dok greška $R(f)$ nije manja od unapred zadate *greške metode* R_M .

1. Koristeći Simpsonovu formulu izračunati integral

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx$$

sa tačnošću $R = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Rešenje: Ukupna greška R je zbir greške metode R_M i greške računa r , tj.

$$R = R_M + r$$

Pošto radimo sa 5 decimala, to je greška računa, prema (6), $r = (1 - 0)^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-5}$, dozvoljena greška u postavci zadatka je $R = 0.5 \cdot 10^{-4}$, pa je prema tome, dozvoljena greška metode:

$$R_M = R - r = 0.5 \cdot 10^{-4} - 0.5 \cdot 10^{-5} = 4.5 \cdot 10^{-5} \quad (8)$$

Ovo je dozvoljena greška pri aproksimaciji vrednosti integrala Simpsonovom formulom.

Za procenu greške metode korišćemo Rungeovu ocenu greške (7). Interval po kome integralimo funkciju $f(x) = \cos(x^2)$ je $[0, 1]$, pošto koristimo Simpsonovu formulu potreban nam je neparan broj čvorova podele ovog intervala. Zato je pogodan korak po kome vršimo podelu intervala $h = 0.1$, u tom slučaju imamo 11 čvorova. Formiramo tabelu na sledeći način:

x	y_0, y_{2n}	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
x_0	$f(x_0)$		
x_1		$f(x_1)$	
x_2			$f(x_2)$
x_3		$f(x_3)$	
x_4			$f(x_4)$
x_5		$f(x_5)$	
x_6			$f(x_6)$
x_7		$f(x_7)$	
x_8			$f(x_8)$
x_9		$f(x_9)$	
x_{10}	$f(x_{10})$		
\sum	A	B	C

Ovde je $f(x) = \cos(x^2)$ podintegralna funkcija, a brojevi A, B i C predstavljaju sume brojeva u odgovarajućoj koloni, tj. A je suma vrednosti podintegralne funkcije u prvom i poslednjem čvoru, B je suma vrednosti u neparnim čvorovima, i C je suma vrednosti u parnim čvorovima izuzev prvog i poslednjeg. Na ovaj način dobijamo pregledno vrednosti koje u formuli (3) množimo sa odgovarajućim faktorom (koji smo zapisali u zaglavlju tabele u zagradama!) i sabiramo.

Za vrednosti koje dobijamo pri rešavanju ovog zadatka, pri koraku $h = 0.1$, tabela će izgledati na sledeći način:

x	y_0, y_{2n}	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
0	1		
0.1		0.99950	
0.2			0.99920
0.3		0.99595	
0.4			0.98723
0.5		0.96891	
0.6			0.93590
0.7		0.88233	
0.8			0.80210
0.9		0.68950	
1.0	0.54030		
\sum	1.54030	4.53664	3.72443

Sada je aproksimacija integrala po Simpsonovoj formuli (3) po koraku $h = 0.1$:

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{3} [1.54030 + 4 * 4.53664 + 2 * 3.72443]$$

$$I_{0.1} = 0.90452 \quad (9)$$

Da bismo iskoristili Rungeovu ocenu greške (7), prepolovićemo korak podele intervala po kom vršimo integraciju $h = 0.05$. Sada imamo novu podeľu, sa 21 čvorom, pri čemu su svi čvorovi prethodne podele sa korakom $h = 0.1$, osim prvog i poslednjeg, sada parni čvorovi u novoj podeľi sa korakom $h = 0.05$. Nećemo pisati celu tabelu za novu podeľu, već samo vrednosti podintegralne funkcije u novim čvorovima, koji su sada neparni, i množi se sa faktorom 4 u Simpsonovoj formuli (3).

x	$y_{2k-1}(*4)$
0.05	1.0000
0.15	0.99995
0.25	0.99805
0.35	0.99251
0.45	0.97957
0.55	0.95460
0.65	0.91207
0.75	0.84592
0.85	0.75015
0.95	0.61965
Σ	9.05247

Sada je aproksimacija integrala po Simpsonovoj formuli (3) po koraku $h = 0.05$:

$$I_{0.05} = \frac{0.05}{3} [1.54030 + 4 \cdot 9.05247 + 2 \cdot (4.53664 + 3.72443)]$$

$$I_{0.05} = 0.90454 \quad (10)$$

Sada je Rungeova ocena greške:

$$R(f) = \frac{|I_{0.05} - I_{0.1}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.90454 - 0.90452|}{15} = 1.3 \cdot 10^{-6} < 4.5 \cdot 10^{-5}$$

gde je $4.5 \cdot 10^{-5}$ dozvoljena greška metode.

Dakle, postignuta je tražena tačnost. Vrednost integrala aproksimiramo vrednošću $I_{0.05}$ koja ima veću tačnost.

$$\mathbf{I} \approx I_{0.05} = 0.90454.$$

□

2. Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Simpsonovom kvadraturnom formulom sa greškom manjom od 10^{-4} , koristeći egzaktnu ocenu greške.

Rešenje: Ukupna greška koja je dozvoljena u postavci zadatka $R = 10^{-4}$, a greška računa, pošto radimo na četiri decimale je, prema (6), $r = (1 - 0)1/2 \cdot 10^{-4} = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Sada je maksimalna dozvoljena greška metode, a prema (5),

$$R_M = 10^{-4} - 0.5 \cdot 10^{-4} = 0.5 \cdot 10^{-4}. \quad (11)$$

Iskoristimo egzaktnu ocenu greške Simpsonove formule (4), kako bismo našli korak podele intervala integracije h koji nam obezbeđuje da greška metode bude u granicama dozvoljenog.

$$R_M = (b-a) \frac{M_4 h^4}{180}$$

$$M_4 = \max_{x \in [0,1]} |f^{IV}(x)|$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$M_4 = \max_{[0,1]} \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| = 24$$

Sada imamo M_4 , i to možemo da ubacimo u (4), tada je, zbog (11),

$$R_M = \frac{24}{180} h^4 \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad h^4 \leq \frac{180}{48} \cdot 10^{-4}.$$

Dobijamo da je korak koji nam obezbeđuje dozvoljenu grešku metode

$$h \leq 0.139.$$

Uzmimo za korak h podele intervala po kome vršimo integraciju $h = 0.1$. Ovaj korak nam obezbeđuje neparan broj čvorova – 11. Formiramo tablicu slično kao u predhodnom zadatku:

x	y_0, y_{2n}	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
0	1		
0.1		0.9091	
0.2			0.8333
0.3		0.7692	
0.4			0.7143
0.5		0.6667	
0.6			0.6250
0.7		0.5882	
0.8			0.5556
0.9		0.5263	
1.0	0.5000		
Σ	1.5000	3.4595	2.7282

Iz ovako formirane tabele možemo lako da formiramo Simpsonovu formulu po koraku 0.1:

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{3} [1.5000 + 4 * 3.4595 + 2 * 2.7282]$$

Približna vrednost integrala je izračunata sa traženom tačnošću, pošto smo na taj način odabrali korak h .

$$\mathbf{I} \approx I_{0.1} = 0.6931.$$

□

3.1 Izvođenje formula za numeričku integraciju

Formule oblika

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (12)$$

se nazivaju kvadrature formule. Koeficijente A_i određujemo tako da formula bude tačna za polinome što višeg stepena. Zamenom funkcije $f(x)$ redom sa $1, x, x^2, \dots, x^n$ dobijamo koeficijente A_0, A_1, \dots, A_n . Greška formule integracije je tada

$$R(f) \leq \int_a^b \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| dx \quad (13)$$

Ako se pokaže da je formula (12) tačna i za x^{n+1}, \dots, x^{n+k} , a ne važi za x^{n+k+1} , tada je greška reda $n+k+1$ i oblika je:

$$R(f) \leq \int_a^b \frac{M_{n+k+1}}{(n+k+1)!} |(x-x_0)^{k+1}(x-x_1)\dots(x-x_n)| dx \quad (14)$$

3. Izvesti formulu za numeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x)dx = Af(0) + Bf(\frac{2h}{3}) + R(f) \quad (15)$$

tako da bude tačna za polinome što većeg stepena i proceniti grešku integracije $R(f)$.

Rešenje: Formula (15) treba da bude tačna za polinome što višeg stepena. Odredimo koeficijente A i B tako da formula bude tačna za $f(x) = 1$ i $f(x) = x$. (Trebalo da odredimo 2 nepoznate, pa nam trebaju dve jednačine.) Kako formula (15) treba da je tačna za $f(x) = 1$ greška integracije $R(f)$ će biti 0 u tom slučaju. Slično kada umesto $f(x)$ u formuli (15) stavimo x . Sada je:

$$f(x) = 1 : \quad A + B = h$$

$$f(x) = x : \quad \frac{h^2}{2} = \frac{2h}{3}B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{3}{4}h}$$

$$A = h - B \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{4}h}$$

Pošto je formula (15) tačna za 1 i x biće tačna i za sve polinome prvog stepena, zbog linearnosti polinoma (Svaki polinom prvog stepena možemo da dobijemo kao linearnu kombinaciju ove dve funkcije.) Dakle, dobili smo da je formula za numeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{4}f(0) + \frac{3h}{4}f(\frac{2h}{3}) + R(f) \quad (16)$$

i tačna je za polinome nultog i prvog stepena (tada je $R(f) = 0$.) Proverimo kog je reda greška integracije $R(f)$. Prvo proveravamo da li formula (16) važi i za polinome drugog stepena (dovoljno je proveriti za x^2 .) Za $f(x) = x^2$ leva strana formule (16) je

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3},$$

dok je desna strana:

$$\frac{h}{4} \cdot 0^2 + \frac{3h}{4} \left(\frac{2h}{3}\right)^2 + R(h) = \frac{h^3}{3} + R(f)$$

Upoređujući levu i desnu stranu formule (16) za funkciju x^2 , možemo da zaključimo da je $R(f) = 0$, pa je formula tačna i za polinome drugog stepena.

Izvršimo sada proveru formule (16) za $f(x) = x^3$. Sada je leva strana jednaka:

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4},$$

a desna:

$$\frac{h}{4} \cdot 0^3 + \frac{3h}{4} \left(\frac{2h}{3}\right)^3 + R(f) = \frac{2h^4}{9} + R(f)$$

Iz ove dve relacije se vidi, da bi formula (16) bila tačna, mora biti $R(f) \neq 0$. Dakle, greška integracije je trećeg reda (tačna je za polinome do drugog stepena.) Prema (14) greška je oblika:

$$R(f) \leq \int_0^h \frac{M_3}{3!} |(x-0)^2(x-\frac{2h}{3})| dx = \frac{M_3 h^4}{216}$$

□

4. Odrediti koeficijente A, B, C tako da kvadratura formula

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = Af(x_0) + B\Delta f(x_0) + C\Delta^2 f(x_0) + R(f) \quad (17)$$

bude tačna za polinome što višeg stepena, a zatim proceniti grešku $R(f)$.

Rešenje: Razvijmo prvo konačne razlike:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

Sada formula (17) postaje:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = [A - B + C]f(x_0) + [B - 2C]f(x_1) + Cf(x_2) + R(f) \quad (18)$$

Pošto se radi o konačnim razlikama, prvi čvor x_0 je u početnoj tački intervala integracije, h je korak podele intervala integracije, pa je $x_1 = h, x_2 = 2h$. Zato je:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = [A - B + C]f(0) + [B - 2C]f(h) + Cf(2h) + R(f) \quad (19)$$

Odredimo koeficijente A, B, C tako da formula bude tačna za polinome do drugog stepena. Zamenimo u (19) $f(x)$ redom sa $1, x, x^2$. Na taj način smo iz (19) dobili tri jednačine sa tri nepoznate:

$$f(x) = 1 :$$

$$A = \frac{8h^3}{3}$$

$$f(x) = x :$$

$$B = 4h^3$$

$$f(x) = x^2 :$$

$$C = \frac{6h^3}{5}$$

Sada formula za numeričku integraciju ima oblik:

$$\begin{aligned} \int_0^{2h} x^2 f(x) dx &= h^3 \left[\frac{8}{3} f(0) + 4\Delta f(0) + \frac{6}{5} \Delta^2 f(0) \right] + R(f) \\ &= h^3 \left[-\frac{2}{15} f(0) + \frac{8}{5} f(h) + \frac{6}{5} f(2h) \right] + R(f) \end{aligned} \quad (20)$$

Proverimo da li formula važi i za polinome trećeg reda: Za $f(x) = x^3$ leva strana jednačine (20) je:

$$\frac{64}{6} h^6,$$

a desna strana:

$$h^3 \left[\frac{8}{5} h^3 + \frac{6}{5} 8h^3 \right] = \frac{56}{5} h^6.$$

Dakle, formula ne važi za polinome trećeg stepena, pa je greška trećeg reda i važi:

$$R(f) \leq \int_0^{2h} \frac{M_3}{3!} x^2 |(x-0)(x-h)(x-2h)| dx = \frac{4M_3 h^6}{45}$$

U gornjoj formuli x^2 potiče od oblika formule integracije (17) i figuriše i u proceni greške. \square

3.2 Integracija nesvojstvenih integrala

Rešavamo integral oblika

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

sa tačnošću ε . Predstavimo ovaj integral u obliku:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^M f(x) dx + \int_M^{+\infty} f(x) dx \quad (21)$$

i odredimo broj $M > a$ takav da je

$$\left| \int_M^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad (22)$$

i sa ovako odabranim M rešavamo integral

$$\int_a^M f(x) dx$$

sa tačnošću $\frac{1}{2} \varepsilon$.

Ako imamo integral tipa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ tada možemo da odesčemo delove $\int_{-\infty}^{M_1} f(x) dx$ i $\int_{M_2}^{+\infty} f(x) dx$ sa tačnošću $\frac{\varepsilon}{4}$ pronalaženjem odgovarajućih M_1, M_2 , i rešavamo integral $\int_{M_1}^{M_2} f(x) dx$ sa tačnošću $\frac{\varepsilon}{2}$.

5. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, Simpsonovom metodom rešiti integrala

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x e^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \quad (23)$$

Rešenje: Napišimo integral (23) u sledećem obliku:

$$I = \int_1^M \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx + \int_M^\infty \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \quad (24)$$

Odredimo broj $M > 1$ tako da je:

$$\left| \int_M^\infty \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad (25)$$

Kako je $|2 + \sin x| \geq 1$, važi

$$\left| \int_M^\infty \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \int_M^\infty \left| \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} \right| dx \leq \int_M^\infty xe^{-x^2} dx \leq -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_M^\infty = \frac{1}{2} e^{-M^2} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

Dakle, tražimo M za koje će biti zadovoljeno:

$$e^{-M^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow M > 3.3930702$$

Uzmimo da je M=3.4. Sada je drugi sabirak iz (24) izračunat sa greškom:

$$\left| \int_{3.4}^\infty \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x} dx \right| \leq \frac{1}{2} e^{-3.4^2} = 4.8 \cdot 10^{-6}$$

Prvi sabirak iz (24) treba da izračunamo sa tačnošću $5.2 \cdot 10^{-6}$, da bi ukupna tačnost bila 10^{-5} , pošto je:

$$10^{-5} - 4.8 \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{-6} - 4.8 \cdot 10^{-6} = 5.2 \cdot 10^{-6}.$$

Greška računa r je

$$r = (3.4 - 1) \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 1.2 \cdot 10^{-6}.$$

Zahtevana tačnost od Simpsonove metode je:

$$R_M = R - r = 5.2 \cdot 10^{-6} - 1.2 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak rešavamo primenjujući Rungeovu ocenu greške, prvo poloveći interval $[1, 3.4]$, sa korakom $h = 1.2$.

x	y_0, y_{2n}	$y_{2k-1}(*4)$	$y_{2k}(*2)$
1	0.129468		
2.2		0.006194	
3.4	0.000019		
Σ	0.129487	0.006194	0

pri čemu je $y_k = f(x_k)$, $f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{2 + \sin x}$ podintegralna funkcija. Koristeći Simpsonovu formulu 3 imamo da je:

$$I_{1.2} = \frac{1.2}{3} (0.129487 + 4 \cdot 0.006194 + 2 \cdot 0) = 0.061705$$

Uzmimo polovinu koraka $h = 0.6$, sada je:

x	$y_{2k-1}(*4)$
1.6	0.041235
2.8	0.000472
Σ	0.041707

$$I_{0.6} = \frac{0.6}{3}(0.129487 + 4 \cdot 0.041707 + 2 \cdot (0 + 0.006194)) = 0.061741$$

Rungeova ocena greške je, prema (7),

$$R(f) = \frac{|I_{0.6} - I_{1.2}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.061741 - 0.061705|}{15} = 2.4 \cdot 10^{-6} < 4 \cdot 10^{-6}$$

Dakle, postignuta je tražena tačnost, i približna vrednost integrala je

$$\mathbf{I} \approx 0.061741$$

□

6. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Rešenje: Ovo je nesvojstveni integral, pošto je:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Uvedimo smenu $x = t^2$, $dx = 2t dt$, pa imamo:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \cos(t^2) dt$$

Ovo više nije nesvojstveni integral. Sada rešavamo integral

$$\int_0^1 \cos(t^2) dt$$

npr. trapeznom formulom (1) sa tačnošću ε koristeći egzaktnu formulu za ocenu greške (2). Ukupna dozvoljena greška je $R = 10^{-2}$, a greška računa je

$$r = (b - a) \cdot \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.5 \cdot 10^{-2},$$

pa je dozvoljena greška metode

$$R_M = R - r = 0.5 \cdot 10^{-2}.$$

Egzaktna formula za ocenu greške (2) je

$$R_M = \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$$

Podintegralna funkcija $f(t)$ je $\cos(t^2)$ i njen drugi izvod je:

$$f''(t) = -2 \sin(t^2) - 4t^2 \cos(t^2)$$

Nama treba M_2 , tj. maksimum apsolutne vrednosti drugog izvoda podintegralne funkcije $f(t)$. Međutim, nije neophodno da znamo tačnu vrednost u kojoj ova funkcija dostiže maksimum, dovoljno je da je ograničimo sa gornje strane, i da tu vrednost koristimo u oceni greške:

$$|f''(t)| = |-2 \sin(t^2) - 4t^2 \cos(t^2)| \leq 6$$

Sada je greška metode:

$$R_M \leq \frac{1}{12} \cdot 6 h^2 = 0.5 h^2 < 0.5 \cdot 10^{-2}$$

Dakle, korak h koji obezbeđuje traženu tačnost je $h < 0.1$. Odaberimo da je $h = 0.1$. Popunimo tabelu koja će pojednostaviti račun trapeznom formulom (1):

t	y_0, y_n	$y_2, \dots, y_{n-1}(*2)$
0	1	
0.1		0.99995
0.2		0.99920
0.3		0.99595
0.4		0.98723
0.5		0.96891
0.6		0.93590
0.7		0.88233
0.8		0.80210
0.9		0.68950
1.0	0.54030	
Σ	1.54030	8.26107

Vrednosti $y_k = f(t_k)$, $f(t) = \cos(t^2)$, računamo u radijanima. Sada je, prema (1):

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 \cos(t^2) dt = \frac{0.1}{2} (y_0 + y_{10} + 2(y_1 + \dots + y_9)) = 1.80624$$

S obzirom na zadatu tačnost, približna vrednost integrala je:

$$\mathbf{I} \approx 1.81$$

□

7. Simpsonovom kvadraturnom formulom sa tačnošću $2 \cdot 10^{-4}$ rešiti integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad (27)$$

Rešenje: Podintegralna funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ima mogući singularitet u tački $x = 0$.

Međutim, kako je:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = 0$$

Dakle, $x = 0$ nije pravi singularitet, pa možemo da računamo integral (27) Simpsonovom formulom sa tačnošću ε , pri čemu je $f(0) = 0$.

Koristeći Rungeovu ocenu greške, za korak $h = 0.1$ dobijemo

$$I_{0.1} = 0.61797,$$

a za prepolovljen korak $h = 0.05$ je

$$I_{0.05} = 0.61963$$

Sada je, prema Rungeovoj oceni greške:

$$R(f) = \frac{|I_{0.05} - I_{0.1}|}{2^4 - 1} = \frac{|0.61963 - 0.61797|}{15} = 1.1 \cdot 10^{-4} < 2 \cdot 10^{-4}$$

Dakle:

$$\mathbf{I} = 0.61963$$

□