

IV GLAVA

1.Sistemi linearnih jednačina. Gausov metod eliminacije

- Pretpostavimo da je potrebno rešiti sistem:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} (1)$$

Odnosno $Ax = B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Množeći prvu jednačinu sa $\frac{-a_{21}}{a_{11}}, \frac{-a_{31}}{a_{11}}, \dots, \frac{-a_{n1}}{a_{11}}$ i dodavanjem redom ostalim

jednačinama dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\dots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

Pri čemu je $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $j = \overline{1, \dots, n}$. Nastavljanjem postupka, polazni sistem svodimo na:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\ &\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

Ako je matrica A regularna ($\det \neq 0$), tada su svi $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, ($i = \overline{1, \dots, n}$), te je rešenje prethodnog sistema dato sa:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_j = \frac{1}{a_{jj}^{(j)}} \left[b_j^{(j)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} x_k \right], \quad j = \overline{1, \dots, n-1}$$

- Mana izloženog Gausovog metoda eliminacije je što za izuzetno male $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$ dolazi do deljenja malim brojem, te su greške koje nastaju veoma velike. Zbog toga, imamo modifikaciju navedene metode, ali sada sa izborom glavnog elementa – *Pivota*.

2. Gausov metod eliminacije sa izborom glavnog elementa – Pivota

- Postupak se sastoji u sledećem:

Pre transformisanja izlaznog sistema, tražimo $\max \{|a_{ij}|, i, j = \overline{1, \dots, n}\}$. Neka je to element $a_{i_p j_p}$, dakle u i_p -toj vrsti i j_p -toj koloni. Taj element nazivamo Pivotom. Množenjem i_p -te vrste sa $\frac{-a_{ij_p}}{a_{i_p j_p}}$, gde $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_p\}$ i dodavanjem ostalim vrstama elementi u j_p koloni u

transformisanom sistemu postaju 0.

U novodobijenom sistemu od $n-1$ jednačine sa $n-1$ nepoznatom, bez nepoznate x_{j_p} ponavljamo postupak. Postupak se ponavlja sve dok ne ostane jednačina u kojoj se pojavljuje samo jedna promenljiva.

3. LU dekompozicija

- Ideja LU dekompozicije jeste da se u sistemu $AX = B$, matrica A predstavi kao proizvod dve matrice oblika:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ i } \quad U = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu dobijamo da se polazni sistem svodi na $(LU)X = B$, odnosno $L(UX) = B$, pri čemu označavajući $Y \equiv UX$, polazni sistem svodimo na dva trougaona sistema:

$$UX = Y, \quad LY = B$$

pri čemu prvo određujemo kolone matrice Y, a zatim X.

Izvedimo pokazani CROUT-ov (Krautov) algoritam za LU dekompoziciju.

Izjednačavanjem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dobijamo sistem jednačina:

(I korak) $l_{11} = a_{11}, l_{21} = a_{21}, \dots, l_{n1} = a_{n1} \rightarrow$ množenjem vrsta mat. L sa I kolonom mat. U

(II korak) $d_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, d_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \dots, d_{1n} = \frac{a_{1n}}{l_{11}} \leftarrow$ množenjem I vrste mat. L sa kolonom mat. U

(III korak) $l_{22} = a_{22} - l_{21}d_{12}, \dots, l_{n2} = a_{n2} - l_{n1}d_{12} \leftarrow$ množenjem vrsta mat. L sa II kolonom U

Dakle,

$$\boxed{\begin{aligned} l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kj}, \\ d_{ij} &= \frac{1}{l_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kj} \right) \end{aligned}}, \text{ pri čemu su sume 0 ako je gornja granica manja od donje}$$

Napomena: Kako je $A = LU \Rightarrow \det A = \det L \cdot \overbrace{\det U}^1 = \det L = l_{11} \cdots l_{mm}$

4. Iterativne metode za rešavanje sistema linearnih jednačina

- Sistem oblika $AX = B$ možemo napisati u obliku:

$$x_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n + c_1$$

$$x_2 = b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n + c_2$$

...

$$x_n = b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n + c_n$$

Odnosno

(2) $X = BX + C$ u matričnom obliku.

5. Jakobijev metod

- Polazeći od jednakosti (2) možemo formirati iterativni proces na sledeći način:

(3) $X(k+1) = B \cdot X(k) + C$,

gde je sa $X(k) = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$ označena k-ta iteracija, pri čemu se $X(0) = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ proizvoljno

bira.

- Naravno postavlja se pitanje konvergencije ovako formiranog iterativnog procesa.

Definicija (Norma matrice A) je realan broj, u oznaci $\|A\|$, sa osobinama:

- (1) $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- (2) $\|a \cdot A\| = |a| \cdot \|A\|, \quad (a \in C, a \in R)$
- (3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \Rightarrow (4') \|A^n\| \leq \|A\|^n$
- (5) $|a_{ij}| \leq \|A\|$
- (6) $|a_{ij}| \leq |b_{ij}| \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$

- Postoji nekoliko osnovnih normi definisanih nad matricama.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \rightarrow \text{Sabiramo po kolonama i uzimamo max.}$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \rightarrow \text{Sabiramo po vrstama i uzimamo max.}$$

$$\|A\|_3 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Teorema: Dovoljni uslovi konvergencije iterativnog procesa.

- Ako je u iterativnom procesu (3), bilo koja norma matrice B , manja od 1, tada iterativni proces konvergira ka rešenju sistema (2), koje glasi $X = (I - B)^{-1} \cdot C$

Dokaz: Kako je:

$$\left. \begin{aligned} X(1) &= BX(0) + C \\ X(2) &= BX(1) + C \\ &\dots \\ X(k+1) &= BX(k) + C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X(2) &= B^2 X(0) + BC + C \\ &\dots \\ X(k+1) &= B^k X(0) + B^{k-1}C + \dots + B^2C + BC + C \end{aligned}$$

konačno: $X(k+1) = (I + B + \dots + B^k)C + B^{k+1}X(0)$

Kako je $(I + B + \dots + B^k)(I - B) = I - B^{k+1} \Rightarrow (I - B^{k+1})(I - B)^{-1} = I + B + \dots + B^k$. Dakle,

$$(4) \quad X(k+1) = (I - B^{k+1})(I - B)^{-1} \cdot C + B^{k+1}X(0)$$

Kako je $\|B\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B\|^{k+1} = 0 \xRightarrow{\text{osob. (1), (4)}} \lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = 0$. Puštajući da $k \rightarrow \infty$, u (4) dobijamo da

je $\boxed{X = (I - B)^{-1} C}$, što znači da iterativni proces konvergira ka rešenju sistema.

Teorema: (Potrebni i dovoljni uslovi konvergencije iterativnog procesa)

- Iterativni proces definisan sa (3) konvergira ka rešenju ako su sve sopstvene vrednosti matrice B , po apsolutnoj vrednosti, manje od 1.

6. Gaus–Seidelov metod

- Postavlja se pitanje da li se proces konvergencije može ubrzati. To se može učiniti tako što se u okviru jednog kruga iteracije koriste već dobijeni podaci iz prethodnog reda istog ciklusa. Naime, ako matricu B napišemo kao zbir dve matrice:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \dots 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \dots 0 \\ & & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots b_{3n} \\ & & \dots \\ 0 & 0 & \dots b_{nn} \end{bmatrix} \equiv B_1 + B_2$$

tada iterativni postupak možemo formirati pomoću:

$$(5) \quad X(k+1) = B_1(k+1) + B_2(k) + C,$$

koji brže konvergira od prethodnog, Jakobijevog, iterativnog postupka.

- Uslovi konvergencije Gaus-Seidelovog i Jakobijevog iteracionog postupka su ekvivalentni (dokazati za *Domaći Zadatak*) samo je matrica čije λ -vrednosti treba da budu < 1 u ovom slučaju drugačija, tj. $\det(\lambda B_1 + B_2 - \lambda I) = 0$, odnosno λ su rešenja jednačine:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \lambda b_{21} & b_{22} - \lambda & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots & \\ \lambda b_{n1} & \lambda b_{n2} & \cdots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Objašnjenje: Iz iteracionog postupka (5) sledi da je:

$$(I - B_1) \cdot X(k+1) = B_2 \cdot X(k) + C,$$

odnosno: $X(k+1) = (I - B_1)^{-1} \cdot B_2 \cdot X(k) + C,$

te je u ovom slučaju iteraciona matrica $(I - B_1)^{-1} \cdot B_2$ i njene sopstvene vrednosti treba da budu < 1 , tj.

$$\det\left((I - B_1)^{-1} B_2 - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\overbrace{(I - B_1)^{-1}}^1 \cdot \det(B_2 - \lambda(I - B_1))\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{\det(B_2 - \lambda(I - B_1)) = 0}}$$