

6 Nelinearne jednačine

Tražimo rešenje nelinearne jednačine oblika:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Tačno rešenje jednačine (1) x^* aproksimiramo približnim \bar{x} , dobijenim jednom od metoda. Bez obzira na to koju metodu koristimo, potrebno je da odredimo koliko rešenja ima i da ih lokalizujemo. To radimo uz pomoć grafika, i određujemo interval $[a, b]$ u kome se nalazi rešenje x^* jednačine (1). Uslov da se rešenje nalazi u ovom intervalu je:

$$f(a)f(b) < 0 \quad (2)$$

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna, ovo će značiti da će grafik ove funkcije preseći x osu na intervalu $[a, b]$.

Procena greške, bez obzira na metodu kojom rešavamo jednačinu (1), biće:

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \quad (3)$$

gde je $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$.

6.1 Metoda polovljenja intervala

Polovimo interval $[a, b]$ na kome smo lokalizovali rešenje x^* jednačine (1), to radimo dok ne postignemo zadovoljavajuću tačnost. Na taj način dobijemo niz umetnutih intervala:

$$\dots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

Procena greške će biti:

$$|x^* - \bar{x}| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon \quad (4)$$

Odavde možemo da dobijemo dovoljan broj umetnutih intervala n koji će dati traženu tačnost ε .

23. Metodom polovljenja intervala rešiti jednačinu:

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \quad (5)$$

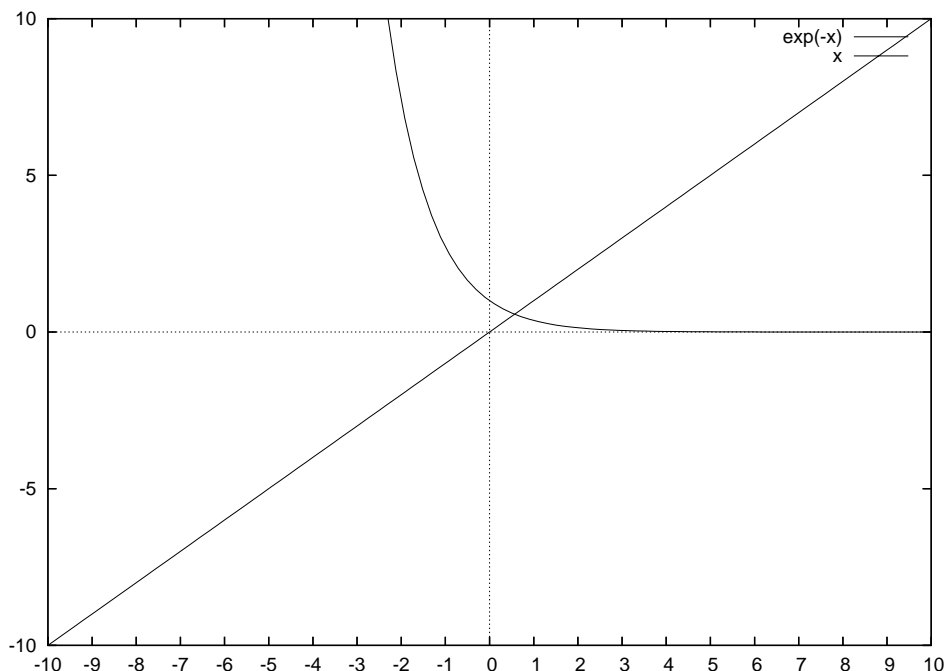
sa tačnošću $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$. Raditi sa 3 decimale.

Rešenje: Najpre procenimo koliko rešenje ima. Predstavimo jednačinu (5) u sledećem obliku:

$$e^{-x} = x$$

i označimo sa

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = x$$



Sl. 1: Lokalizacija rešenja jednačine (5)

Presečna tačka funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ je nula funkcije $f(x)$. Sa gornjeg grafika vidimo da postoji jedna presečna tačka koja se nalazi u intervalu $[0, 1]$. Zaista, funkcija $f(x)$ u krajevima intervala $[0, 1]$ uzima vrednosti suprotnog znaka:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 1/e - 1 = -0.632 < 0$$

$$f(0)f(1) < 0$$

Označimo sa x^* tačno rešenje jednačine (5). Formiraćemo niz umetnutih intervala:

$$\dots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

pri čemu smo sa $[a, b]$ označili interval $[0, 1]$. Ako je n broj umetnutih intervala, tada važi procena (4), pri čemu je $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ unapred zadata tačnost. Iz procene (4) možemo da izračunamo n , broj iteracija potrebnih za dostizanje tačnosti ε . Kako je $b - a = 1 - 0 = 1$, biće:

$$\begin{aligned} \frac{1-0}{2^{n+1}} < 5 \cdot 10^{-2} &\Rightarrow 2^{n+1} > \frac{1}{5} \cdot 10^2 = 20 \\ \Rightarrow n+1 > 4.322 &\Rightarrow n+1 = 5 \Rightarrow \boxed{n=4} \end{aligned}$$

Dakle, dovoljna su 4 polovljena intervala da bi se dobila tražena tačnost.

Označimo sa \bar{x}_n približno rešenje u n -toj iteraciji koje je određeno sa

$$\bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Odredimo polovljene intervale na sledeći način:

$$\underline{n=0}: \quad [a, b] = [0, 1], \quad \bar{x}_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f(\bar{x}_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.106 > 0$$

$$f(1)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_1, b_1] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\underline{\mathbf{n=1}}: \quad [a_1, b_1] = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \bar{x}_1 = \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f(\bar{x}_1) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -0.278 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\underline{\mathbf{n=2}}: \quad [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad \bar{x}_2 = \frac{1/2 + 3/4}{2} = \frac{5}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) < 0, \quad f(\bar{x}_2) = f\left(\frac{5}{8}\right) = -0.090 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{5}{8}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_3, b_3] = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$$

$$\underline{\mathbf{n=3}}: \quad [a_3, b_3] = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \quad \bar{x}_3 = \frac{1/2 + 5/8}{2} = \frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad f\left(\frac{5}{8}\right) < 0, \quad f(\bar{x}_3) = f\left(\frac{9}{16}\right) = 0.007 > 0$$

$$f\left(\frac{9}{16}\right)f\left(\frac{5}{8}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad [a_4, b_4] = \left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right]$$

$$\underline{\mathbf{n=4}}: \quad [a_4, b_4] = \left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right], \quad \bar{x}_4 = \frac{9/16 + 5/8}{2} = \frac{19}{32}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_4 = \frac{19}{32} \approx 0.594$$

Sada je vrednost funkcije $f(x)$ u približnom rešenju jednačine (5):

$$f(\bar{x}) = f(0.595) = -0.04$$

Vrednost funkcije $f(x)$ u tački x^* je 0, pošto je x^* tačno rešenje jednačine, pa je greška računa:

$$|f(x^*) - f(\bar{x})| = |0 - (-0.04)| = 0.04 < 0.05 = 5 \cdot 10^{-2}$$

Dakle, postignuta je tražena tačnost.

□

6.2 Njutnova metoda (Metoda tangente)

Njutnova metoda je definisana iterativnim postupkom:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

Da bi metoda konvergirala početnu tačku iterativnog postupka biramo tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. Nađemo interval $[a, b]$ za koji je zadovoljeno:

$$f(a)f(b) < 0$$

$$f'(x) \neq 0, \quad \text{za svako } x \in [a, b]$$

$$f''(x) \text{ ne menja znak na intervalu } [a, b]$$

2. Odaberemo tačku $x_0 \in [a, b]$ tako da je

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

Pod ovim uslovima niz x_n dobijen iterativnim postupkom (6) konvergira ka rešenju x^* jednačine oblika (1), tj. $f(x^*) = 0$.

Postupak zaustavljamo kad je zadovoljen uslov:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}} \quad (7)$$

Modifikovana Njutnova metoda: Umesto $f'(x_n)$, u svakoj iteraciji koristimo $f'(x_0)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (8)$$

Ova modifikacija usporava proces konvergencije, ali smanjuje račun.

24. Njutnovom metodom naći sva pozitivna rešenja jednačine

$$f(x) = e^x + e^{-3x} - 4 = 0 \quad (9)$$

sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Rešenje: Najpre lokalizujemo rešenje na interval $[a, b]$. Predstavimo jednačinu (9) u sledećem obliku:

$$e^x = 4 - e^{-3x}$$

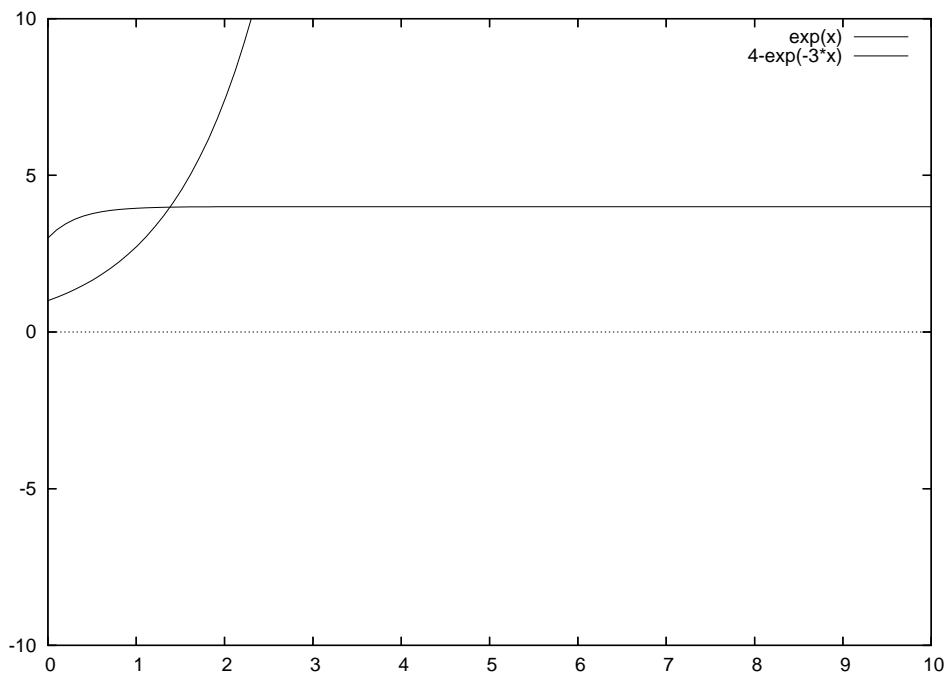
i označimo sa

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = 4 - e^{-3x}$$

Skiciramo grafike ovih funkcija, pošto se traže pozitivna rešenja, samo za $x > 0$. Koristimo da je:

$$f_1(0) = 1, \quad f_1(1) = 2.71828, \quad f_1(2) = 7.38906$$

$$f_2(0) = 3, \quad f_2(1) = 3.95021, \quad f_2(2) = 3.99752$$



Sl. 2: Lokalizacija pozitivnog rešenja jednačine (9)

Sa gornjeg grafika vidimo da postoji jedno pozitivno rešenje jednačine (9) koje se nalazi u intervalu $[1, 2]$. Zaista, na krajevima ovog intervala funkcija $f(x)$ uzima vrednosti suprotnog znaka:

$$f(1) = -1.23193, \quad f(2) = 3.39153 \quad \Rightarrow \quad f(1)f(2) < 0$$

Prvi i drugi izvod funkcije $f(x)$ su:

$$f(x) = e^x + e^{-3x} - 4$$

$$f'(x) = e^x - 3e^{-3x}$$

$$f''(x) = e^x + 9e^{-3x}$$

Proverimo ostale uslove 1. za interval $[1, 2]$. Pošto je $f''(x) > 0$ za svako x , prvi izvod $f'(x)$ je rastuća funkcija, i važi:

$$m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = f'(1) = 2.56892$$

Dakle, prvi izvod je različit od 0 na intervalu $[1, 2]$, i drugi izvod ne menja znak na tom intervalu. Pri tom je:

$$M_2 = \max_{[1,2]} |f''(x)| = \max_{[1,2]} |e^x + 9e^{-3x}| \leq e^2 + 9e^{-3} = 7.83714$$

Odaberimo početnu vrednost iteracije x_0 tako da je ispunjen uslov 2. Najpre proverimo krajeve intervala:

$$f(2) = 3.39153$$

Kako je $f''(x)$ uvek pozitivan, za $x_0 = 2$ će važiti uslov 2.:

$$f(2)f''(2) > 0$$

Sada su zadovoljeni svi uslovi konvergencije iterativnog procesa (6).

Kriterijum zaustavljanja iteracija je određen sa (7):

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 2.56892}{7.83714}} = 0.00573$$

Formiramo tabelu:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2	3.39153	7.38162
1	1.54054	0.67695	4.63760
2	1.39457	0.04848	3.98751
3	1.38241	0.00030	3.93707
4	1.38233		

Kriterijum za zaustavljanje iteracija je zadovoljen posle 4 iteracije:

$$|x_4 - x_3| = |1.38241 - 1.38233| = 0.00008 < 0.00573.$$

Približno rešenje je:

$$\bar{x} = x_4 = \mathbf{1.38233}$$

$$f(\bar{x}) = f(1.38233) = -0.00001$$

□

6.3 Metoda sečice

Koristimo aproksimaciju prvog izvoda funkcije $f(x)$ koja važi na osnovu Tejlorovog razvoja:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Ovom aproksimacijom zamenimo $f'(x_n)$ u izrazu za Njutnovu metodu (6). Na taj način dobijamo metodu sečice:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (10)$$

Ova metoda sporije konvergira od Njutnove metode.

Kriterijum zaustavljanja iterativnog procesa je:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1} \quad (11)$$

Rešenje lokalizujemo na intervalu $[a, b]$ na kome $f'(x)$ i $f''(x)$ ne menjaju znak, i važi:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Za početnu tačku x_0 možemo da uzmemo a ili b , i to u zavisnosti od znaka $f'(x)f''(x)$ na intervalu $[a, b]$:

I. $f'(x)f''(x) > 0$ za svako x na intervalu $[a, b]$ uzimamo da je $x_0 = a$, a metodu možemo da modifikujemo na sledeći način:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} \quad (12)$$

II. $f'(x)f''(x) < 0$ za svako x na intervalu $[a, b]$ uzimamo da je $x_0 = b$, a metodu možemo da modifikujemo na sledeći način:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \quad (13)$$

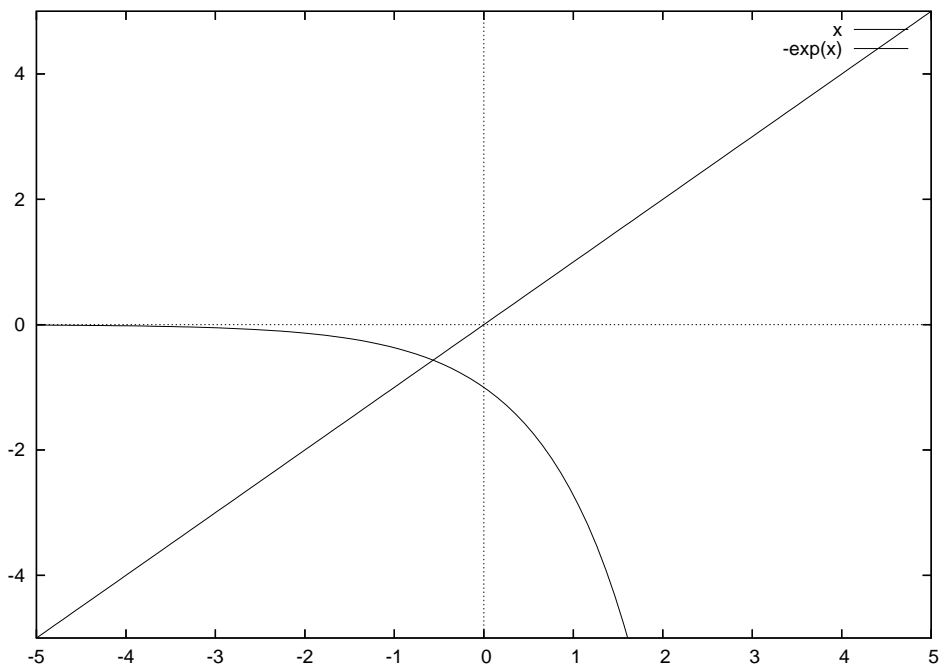
25. Metodom sečice rešiti jednačinu

$$f(x) = x + e^x = 0 \quad (14)$$

sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Rešenje: Lokalizujemo rešenje na interval $[a, b]$.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -e^x$$



Sl. 3: Lokalizacija rešenja jednačine (14)

Sa gornjeg grafika vidimo da se nula funkcije $f(x)$ nalazi u intervalu $[-1, 0]$. Zaista, na krajevima intervala funkcija ima vrednosti različitog znaka:

$$f(-1) = -0.63212, \quad f(0) = 1.$$

Prvi i drugi izvod funkcije $f(x)$ su:

$$f(x) = x + e^x$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Obe funkcije $f'(x)$ i $f''(x)$ su pozitivne za svako x pa je $f'(x)f''(x) > 0$. Dakle, možemo da koristimo modifikaciju I. metode sečice:

$$x_0 = -1, \quad b = 0, \quad f(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - 0}{f(x_n) - f(0)} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n f(x_n)}{f(x_n) - 1} \\
\boxed{x_{n+1} &= \frac{x_n}{1 - f(x_n)}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Kriterijum zaustavljanja je (11), pri čemu je:

$$m_1 = \min_{[-1,0]} |f'(x)| = |f'(-1)| = 1.36788,$$

pošto je $f''(x) > 0$, pa je $f'(x)$ rastuća funkcija koja minimalnu vrednost na intervalu $[-1, 0]$ dostiže u levom kraju intervala. Iz istog razloga:

$$M_1 = \max_{[-1,0]} |f'(x)| = |f'(0)| = 2$$

Sada je:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1.36788 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4}}{2 - 1.36788} = 0.00011$$

Računajući prema (15) formiramo tabelu:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-1	-0.63212
1	-0.61270	-0.07081
2	-0.57218	-0.00789
3	-0.56770	-0.00087
4	-0.56721	-0.00010
5	-0.56712	-0.00004

Kako je kriterijum (11) ispunjen:

$$|x_5 - x_4| = 0.00009 < 0.00011$$

približno rešenje jednačine (14) koje zadovoljava traženu tačnost bice:

$$\bar{x} = x_5 = -0.56712.$$

Zaista:

$$|f(x^*) - f(\bar{x})| = 0 - (-0.00004) < 0.00005 = 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

□

6.4 Kombinovana metoda Njutna i sečice

Metoda sečice se može kombinovati sa Njutnovom metodom, tako da se za definisanje sečice, umesto tačke $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, koristi aproksimacija određena Njutnovom metodom. Imamo dva slučaja:

I. Ako je $f'(x)f''(x) > 0$:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - f(\underline{x}_n) \frac{\overline{x}_n - \underline{x}_n}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)} \tag{16}$$

$$\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})} \quad (17)$$

II. Ako je $f'(x)f''(x) < 0$:

$$\underline{x_{n+1}} = \underline{x_n} - \frac{f(\underline{x_n})}{f'(\underline{x_n})} \quad (18)$$

$$\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - f(\overline{x_n}) \frac{\overline{x_n} - \underline{x_n}}{f(\overline{x_n}) - f(\underline{x_n})} \quad (19)$$

Pri tom je u oba slučaja $\underline{x_0} = a, \overline{x_0} = b$, gde je $[a, b]$ interval na kome smo lokalizovali rešenje, takav da je $f(a)f(b) < 0$.

Tačnost se postiže kad je

$$|\overline{x_n} - \underline{x_n}| < 2\varepsilon, \quad (20)$$

dok za približno rešenje uzimamo

$$\bar{x} = \frac{\underline{x_n} + \overline{x_n}}{2} \quad (21)$$

26. Kombinovanom metodom sečice i Njutna odrediti najmanje pozitivno rešenje jednačine

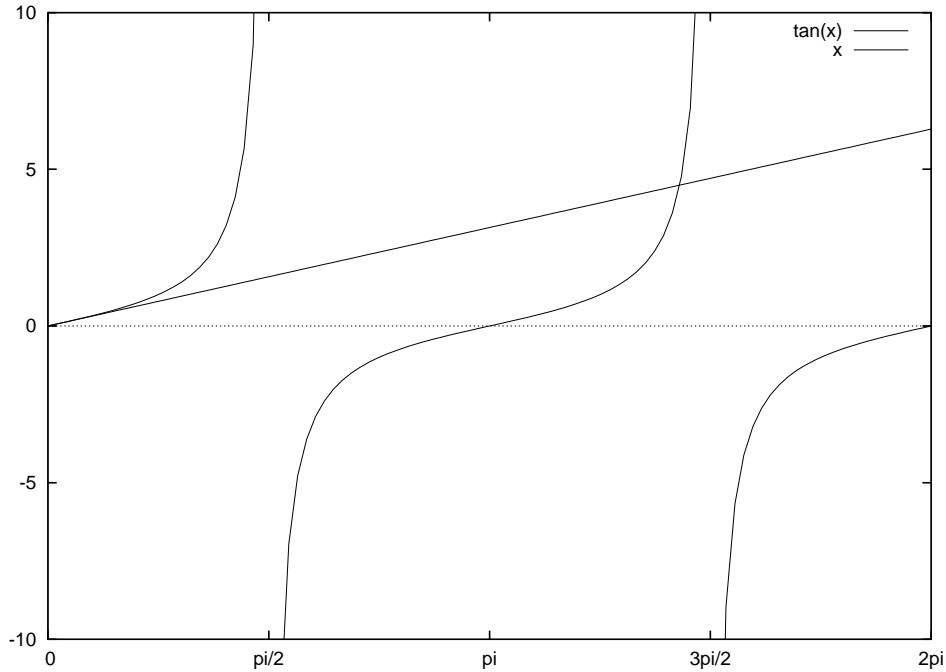
$$\operatorname{tg} x = x \quad (22)$$

sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rešenje: Posmatrajmo funkcije:

$$f_1(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f_2(x) = x$$



Sl. 4: Lokalizacija najmanjeg pozitivnog rešenja jednačine (22)

Najmanje pozitivno rešenje se nalazi u intervalu $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Odredimo ovo rešenje kao nulu funkcije:

$$f(x) = \sin x - x \cos x \quad (23)$$

$$f'(x) = x \sin x$$

$$f''(x) = \sin x + x \cos x$$

Sada je

$$f(\pi)f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3.14159 \cdot (-1) = -3.14159 < 0$$

Kako je $x^* \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ to je $x > 0, \sin x < 0, \cos x < 0$, pa je

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Dakle, $f'(x)f''(x) > 0$ na intervalu $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, pa za iterativni proces uzimamo **I.**:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - f(\underline{x}_n) \frac{\overline{x}_n - \underline{x}_n}{f(\overline{x}_n) - f(\underline{x}_n)} \quad (24)$$

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)} \quad (25)$$

i $\underline{x}_0 = \pi, \overline{x}_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Kriterijum zaustavljanja je, prema (20):

$$|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < 2 \cdot 10^{-4}. \quad (26)$$

Sada na osnovu ovih iteracionih formula formiramo tabelu:

n	\underline{x}_n	\overline{x}_n	$f(\underline{x}_n)$	$f(\overline{x}_n)$
0	3.14159	4.71239	3.14159	-1.00000
1	3.14159	4.50018	3.14159	-0.02974
2	4.48744	4.49342	0.02615	-0.00005
3	4.49341	4.49341	0	0

i tačnost je zadovoljena:

$$|\overline{x}_3 - \underline{x}_3| = 0$$

pa je približno rešenje jednačine (22):

$$\bar{x} = \mathbf{4.49341}$$

Napomena: Iako je u tabeli vrednost $f(\overline{x}_3) = f(\underline{x}_3) = 0$ ovo ipak nije tačno rešenje, već približno u odnosu na zahtevanu tačnost. Ako bi zahtevana tačnost bila veća (tj. dopuštena greška manja) vrednost funkcije u približnom rešenju ne bi bila 0. \square