

1 Interpolacija

1.1 Lagranžov interpolacioni polinom

Lagranžov interpolacioni polinom $P_n(x)$ sa $(n+1)$ čvorova je oblika:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} y_k \quad (1)$$

pri čemu je $y_k = f(x_k)$

Greška interpolacije funkcije $f(x)$ Lagranžovim interpolacionim polinomom $P_n(x)$ data je sa:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|,$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Možemo da uvedemo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1}(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \\ \Pi'_{n+1}(x_k) &= (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) \\ D_k &= (x-x_k)\Pi'_{n+1}(x_k) \end{aligned}$$

Konstuišemo sledeću šemu:

$$\begin{array}{cccc|c} (x-x_0) & (x_0-x_1) & \dots & (x_0-x_n) & D_0 \\ (x_1-x_0) & (x-x_1) & \dots & (x_1-x_n) & D_1 \\ & \dots & & & \vdots \\ (x_n-x_0) & (x_n-x_1) & \dots & (x-x_n) & D_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline \Pi_{n+1}(x) - \text{proizvod elem. na dijagonali} \end{array}$$

Koristeći gornje oznake sada je Lagranžov polinom dat na sledeći način:

$$P_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{D_k}. \quad (2)$$

1. Konstruisati interpolacioni polinom $P_2(x)$ za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ ako su čvorovi interpolacije $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$. Izračunati $P_2(115)$ i oceniti grešku $|\sqrt{115} - P_2(115)|$.

Rešenje: Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je data u čvorovima $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$ sledećom tabelom:

x	100	121	144
$f(x)$	10	11	12

Lagranžov interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ je oblika:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 + \\ &\quad + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12 \\ &= -\frac{2}{21252}x^2 + \frac{1454}{21252}x + \frac{87120}{21252} \\ &= -0.000094x^2 + 0.068417x + 4.099379 \\ P_2(115) &= 10.724184 \end{aligned}$$

Odgovarajući izvodi funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ su:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}$$

Maksimum apsolutne vrednosti trećeg izvoda funkcije je

$$M_3 = \max_{[100,144]} |f'''(x)| = \frac{3}{8 \cdot 100^{5/2}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$$

Greška interpolacije u tački 115 je:

$$|R_2(115)| \leq \frac{3/8 \cdot 10^{-5}}{3!} |(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| \leq 1.63 \cdot 10^{-3}$$

Uzimajući u obzir postignutu tačnost,

$$P_2(115) = 10.724$$

$$\sqrt{115} = 10.723805 \dots$$

1.2 Njutnov interpolacioni polinom

Neka je funkcija $f(x)$ zadata čvorovima interpolacije (x_k, y_k) , pri čemu je $y_k = f(x_k)$. Definišemo konačne razlike prvog reda:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad (3)$$

Konačne razlike višeg reda definišemo rekursivno:

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \quad (4)$$

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k) \quad (5)$$

Neka su pri tom čvorovi ekvidistantni, tj. $x_{k+1} - x_k = h$, $k = 0, \dots, n-1$.

I Njutnov interpolacioni polinom (za interpolaciju unapred) je oblika:

$$N_n^I(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u-1)\dots(u-n+1),$$

pri čemu je $u = \frac{x-x_0}{h}$. Greška interpolacije funkcije $f(x)$ I Njutnovim interpolacionim polinomom $N_I(x)$ data je sa:

$$R_n^I \leq \frac{|\Delta^{n+1}y|}{(n+1)!} |u(u-1)\dots(u-n)|.$$

Za $\Delta^{n+1}y$ se uzima maksimalna vrednost po svim apsolutnim vrednostima konačne razlike $n+1$ -og reda u odgovarajućim čvorovima, $\max_k |\Delta^{n+1}y_k|$.

II Njutnov interpolacioni polinom (za interpolaciju unazad) je oblika:

$$N_n^{II}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}v(v+1)\dots(v+n-1),$$

pri čemu je $v = \frac{x-x_n}{h}$.

Greška interpolacije funkcije $f(x)$ II Njutnovim interpolacionim polinomom $N_{II}(x)$ data je sa:

$$R_n^{II} \leq \frac{|\Delta^{n+1}y|}{(n+1)!} |v(v+1)\dots(v+n)|$$

Ekstrapolacija se vrši kad tražimo procenu vrednosti funkcije $f(x)$ u tački \bar{x} , $\bar{x} < x_0$ ili $\bar{x} > x_n$. Ove procene greške ne važe za ekstrapolaciju. Greška ekstrapolacije je veća od greške interpolacije.

I Njutnov interpolacioni polinom je pogodan za interpolaciju čvorova koji se nalaze u prvoj polovini intervala $[x_0, x_n]$ i za ekstrapolaciju tačaka $\bar{x} < x_0$. II Njutnov interpolacioni polinom je pogodan za interpolaciju čvorova koji se nalaze u drugoj polovini intervala $[x_0, x_n]$ i za ekstrapolaciju tačaka $\bar{x} > x_n$.

2. Tablicom je zadana funkcija $f(x)$:

x	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$f(x)$	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

Koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, izračunati $f(18)$, $f(53)$, $f(12)$.

Rešenje: Popunimo tablicu vrednostima konačnih razlika koje računamo iz odgovarajućih formula (??) i (??).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
15	<u>0.2588</u>				
		<u>0.0832</u>			
20	0.3420		<u>-0.0026</u>		
		0.0806		<u>-0.0006</u>	
25	0.4226		-0.0032		0
		0.0774		-0.0006	
30	0.5000		-0.0038		0
		0.0736		-0.0006	
35	0.5736		-0.0044		0.0001
		0.0692		-0.0005	
40	0.6428		-0.0049		0
		0.0643		-0.0005	
45	0.7071		-0.0054		0.0002
		0.0589		<u>-0.0003</u>	
50	0.7660		<u>-0.0057</u>		
		<u>0.0532</u>			
55	<u>0.8192</u>				

Za izračunavanje vrednosti $f(18)$ koristimo I Njutnov interpolacioni polinom pošto se tačka 18 nalazi u prvoj polovini intervala $[15, 55]$.

$$N_3^I(x) = 0.2588 + 0.0832u - 0.0026 \frac{u(u-1)}{2} - 0.0006 \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \quad (6)$$

pri čemu je $u = \frac{x-x_0}{h}$, $h = 5$, $x_0 = 15$, $x = 18$, pa je $u = \frac{18-15}{5} = 0.6$.
Dakle, približna vrednost funkcije $f(x)$ u tački 18 je

$$f(18) \approx N_3^I(18) = 0.3090.$$

Greška je procenjena sledećim izrazom:

$$R_3^I \leq \frac{|\Delta^4 y|}{4!} |u(u-1)(u-2)(u-3)| = \frac{0.0002}{24} 0.6 \cdot 0.4 \cdot 1.4 \cdot 2.4 = 6.7 \cdot 10^{-6}$$

Računanje vrednosti $f(12)$ vršimo ekstrapolacijom pomoću I Njutnovog interpolacionog polinoma. Sada je $x = 12$, pa je $u = \frac{12-15}{5} = -0.6$.

Iz jednačine (??) dobija se da je približna vrednost $f(x)$ u tački 12

$$f(12) \approx N_3^I(12) = 0.2079.$$

Pošto se radi o ekstrapolaciji, greška računa je veća nego pri interpolaciji i formula procene greške I Njutnovim interpolacionim polinomom ne važi.

Za približno izračunavanje vrednosti $f(53)$ koristimo II Njutnov interpolacioni polinom:

$$N_3^{II}(x) = 0.8192 + 0.0532v - 0.0057 \frac{v(v+1)}{2} - 0.0003 \frac{v(v+1)(v+2)}{6}$$

pri čemu je $v = \frac{x-x_8}{h}$, $h = 5$, $x_8 = 55$, $x = 53$, pa je $v = \frac{53-55}{5} = -0.4$.

$$f(53) \approx N_3^{II}(53) = 0.7980.$$

Grešku procenjujemo izrazom:

$$R_3^{II} \leq \frac{|\Delta^4 y|}{4!} |v(v+1)(v+2)(v+3)| = \frac{0.0002}{24} 0.4 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 2.6 = 8.3 \cdot 10^{-6}.$$

3. Polinom trećeg stepena $p_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-20	-5	1	1	4	15	40	85	156

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, odrediti polinom $p_3(x)$.

Napomena: Pretpostavimo da je tabeliran polinom n -tog stepena. Tada konačne razlike reda $n+1, n+2, \dots$ moraju biti 0, jer bi u suprotnom polinom $(n+1)$ -og stepena mogao Njutnovim polinomom biti aproksimiran polinomom većeg stepena od n , što je nemoguće.

Rešenje: Popunimo datu tablicu konačnim razlikama zaključno sa četvrtim stepenom, pošto se radi o polinomu trećeg stepena, a u skladu sa napomenom.

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20				
		15			
-2	-5		-9		
		6		3	
-1	1		-6		6
		0		9	
0	1		3		-4
		3		5	
1	4		8		1
		11		6	
2	15		14		0
		25		6	
3	40		20		0
		45		6	
4	85		26		
		71			
5	156				

Prema napomeni, konačne razlike četvrtog reda treba da imaju vrednost 0, pošto je tabeliran polinom trećeg stepena. Pošto su $\Delta^4 p_3(x_3)$ i $\Delta^4 p_3(x_4)$ jednake 0 možemo pretpostaviti da nije bilo greške u cvorovima koji učestvuju u formiranju ove dve vrednosti. Kako je

$$\Delta^4 p_3(x_3) = p_3(x_7) - 4p_3(x_6) + 6p_3(x_5) - 4p_3(x_4) + p_3(x_3)$$

$$\Delta^4 p_3(x_4) = p_3(x_8) - 4p_3(x_7) + 6p_3(x_6) - 4p_3(x_5) + p_3(x_4)$$

to smatramo da su vrednosti polinoma u čvorovima x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 i x_8 izračunati bez greške. Treba da dobijemo da je $\Delta^4 p_3(x_2) = 0$, pa na tom mestu pišemo 0. Pošto je

$$\Delta^4 p_3(x_2) = \Delta^3 p_3(x_3) - \Delta^3 p_3(x_2)$$

i smatramo da je $p_3(x_3)$ tačna, iz ove relacije ispravljamo vrednost $\Delta^3 p_3(x_2) = 6$. Na ovaj način se vraćamo kroz tablicu ispravljajući $\Delta^2 p_3(x_2) = 2$, $\Delta p_3(x_2) = 1$ i $p_3(x_2) = 0$. Formiramo novu tablicu u kojoj je ispravljeno $p_3(x_2) = 0$.

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20				
		15			
-2	-5		-10		
		5		6	
-1	0		-4		0
		1		6	
0	1		2		0
		3		6	
1	4		8		0
		11		6	
2	15		14		0
		25		6	
3	40		20		0
		45		6	
4	85		26		
		71			
5	156				

Sad su sve konačne razlike četvrtog reda 0, što znači da je polinom $p_3(x)$ tačno tabeliran. Koristeći I Njutnov interpolacioni polinom, uz $h = 1$, imamo:

$$\begin{aligned}
N_3^I(x) &= -20 + 15(x+3) + \frac{-10}{2!}(x+3)(x+2) + \frac{6}{3!}(x+3)(x+2)(x+1) \\
&= -20 + 15x + 45 - 5x^2 - 25x - 30 + x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
&= x^3 + x^2 + x + 1 \equiv p_3(x)
\end{aligned}$$

1.3 Inverzna interpolacija

Rešavamo problem tipa:

Naći tačku x^* tako da je $f(x^*) = y^*$, pri čemu je y^* unapred poznat broj.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ zadata ekvidistantnom mrežom, možemo da koristimo Njutnov interpolacioni polinom. U suprotnom, invertujemo tablicu i koristimo Lagranžov interpolacioni polinom.

4. Tablicom je zadana funkcija $f(x)$

x	10	20	30	40
$f(x)$	0.1763	0.3640	0.5774	0.8391

Inverznom interpolacijom izračunati x^* i x^{**} za koje važi $f(x^*) = 0.25$ i $f(x^{**}) = 0.8$

Rešenje: Popunimo tablicu konačnim razlikama, $y_k = f(x_k)$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	0.1763			
		0.1877		
20	0.3640		0.0257	
		0.2134		0.0226
30	0.5774		0.0483	
		0.2617		
40	0.8391			

Pošto je $f(x^*) = 0.25$, prema vrednostima za y_k , očekujemo da bude $x^* \in [10, 20]$, pa koristimo I Njutnov interpolacioni polinom.

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad (7)$$

Kako je $u = \frac{x-x_0}{h}$, $h = 10$, $y = 0.25$, tražimo u . Iz (??) sledi:

$$u = \frac{y}{\Delta y_0} - \frac{y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} \quad (8)$$

$$u = \frac{0.25}{0.1877} - \frac{0.1763}{0.1877} - \frac{u(u-1)}{2} \frac{0.0257}{0.1877} - \frac{u(u-1)(u-2)}{6} \frac{0.0226}{0.1877} \quad (9)$$

$$u = 0.39265 - u(u-1) \cdot 0.06846 - u(u-1)(u-2) \cdot 0.02007 \quad (10)$$

Sada formiramo iterativni proces po u na sledeći način. Za poznatu vrednost u_n sledeću iteraciju u_{n+1} računamo po formuli:

$$u_{n+1} = 0.39265 - u_n(u_n - 1) \cdot 0.06846 - u_n(u_n - 1)(u_n - 2) \cdot 0.02007, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Može se pokazati da je ovo preslikavanje kontrakcija, pa kao takvo, po Banahovoj teoremi ima nepokretnu tačku, koja je rešenje jednačine (??). Početna vrednost u iterativnom postupku (??) je $u_0 = 0$. Kada zamenimo tu vrednost u desnu stranu jednačine dobićemo sledeću vrednost u_1 .

$$u_1 = 0.39265 - u_0(u_0 - 1) \cdot 0.06846 - u_0(u_0 - 1)(u_0 - 2) \cdot 0.02007$$

Sada je $u_1 = 0.39265$. Ponavljamo postupak tako što na desnoj strani dobijenu vrednost za u_1 .

$$u_2 = 0.39265 - u_1(u_1 - 1) \cdot 0.06846 - u_1(u_1 - 1)(u_1 - 2) \cdot 0.02007$$

Na ovaj način dobijamo sledeći niz:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 0.39265 \\ u_2 &= 0.40128 \\ u_3 &= 0.40139 \\ u_4 &= 0.40139 \end{aligned}$$

Vrednosti za u_3 i u_4 su iste, pa tu zaustavljamo proces, i za traženu vrednost u uzimamo $u = u_4 = 0.40139$. Ovu vrednost za u smo dobili za $y = 0.25$, pa ona odgovara vrednosti x^* . Sada je

$$x = uh + x_0 = 0.40139 \cdot 10 + 10 = 14.0139$$

tj. $\mathbf{x}^* = 14.0139$.

Vrednost $y = 0.8$ se nalazi pri kraju tabele, pa ćemo za nalaženje vrednosti x^{**} , za koju važi $f(x^{**}) = 0.8$, koristiti II Njutnov interpolacioni polinom:

$$y = y_3 + v\Delta y_2 + \frac{v(v+1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{v(v+1)(v+2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad (12)$$

Sada je:

$$v = \frac{y}{\Delta y_2} - \frac{y_3}{\Delta y_2} - \frac{v(v+1)}{2} \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta y_2} - \frac{v(v+1)(v+2)}{6} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_2} \quad (13)$$

$$v = -0.14941 - v(v+1) \cdot 0.09228 - v(v+1)(v+2) \cdot 0.01439 \quad (14)$$

Iz (??) formiramo iterativni proces:

$$v_{n+1} = -0.14941 - v_n(v_n+1) \cdot 0.09228 - v_n(v_n+1)(v_n+2) \cdot 0.01439, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Za početnu vrednost uzimamo $v_0 = 0$ i koristeći (??) dobijamo niz:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_1 &= -0.14941 \\ v_2 &= -0.13430 \\ v_3 &= -0.13556 \\ v_4 &= -0.13546 \\ v_5 &= -0.13546 \end{aligned}$$

Vrednosti v_4 i v_5 su se poklopile, pa stajemo sa iterativnim procesom. Sada je $v = v_5 = -0.13546$, $v = \frac{x-x_3}{h}$ i

$$x = vh + x_3 = -0.13546 \cdot 10 + 40 = 38.6454$$

tj. $\mathbf{x}^{**} = 38.6454$.

5. Naći nule funkcije:

x	2	2.5	3.5	4
$f(x)$	0.9093	0.5985	-0.3508	-0.7568

Rešenje:

Tražimo tačku x^* takvu da je $f(x^*) = 0$, tj. $f^{-1}(0) = x^*$, gde je f^{-1} funkcija data sledećom tabelom:

y	-0.7568	-0.3508	0.5985	0.9093
x	4	3.5	2.5	2

Sada su čvorovi u tačkama y_k poređanim u rastućem poretaku. Koristimo Lagranžov interpolacioni polinom (??), gde je $y = 0$.

0.7568	-0.4060	-1.3553	-1.6661	-0.693815
0.4060	0.3508	-0.9493	-1.2601	0.170370
1.3553	0.9493	-0.5985	-0.3108	0.239323
1.6661	1.2601	0.3108	-0.9093	-0.593327
				0.144481

$$\begin{aligned}
P_3(0) &= 0.144481 \left[\frac{4}{-0.693815} + \frac{3.5}{0.170370} + \frac{2.5}{0.239323} + \frac{2}{-0.593327} \right] \\
&= 3.157431
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{3.157431}$$