

III GLAVA

1. Numerička integracija

- Numerička integracija se zasniva na integraciji interpolacionih polinoma $P_n(x)$. Naime, ako je $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, tada je $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$, dok je greška ovakve integracije $R = \int_a^b R(x) dx$.

*) Pretpostavimo da je funkcija interpolirana Lagrange-ovim interpolacionim polinomom. Tada je:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} f_i \right) dx + \int_a^b R_n(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} dx \cdot f_i + \int_a^b R_n(x) dx\end{aligned}$$

Odnosno:

*) $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i + R$, za $A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x)} dx$. Formula oblika $\sum_{i=0}^n A_i f_i$ koja

aproximira vrednost integrala naziva se kvadratura formula. Imajući u vidu da ako je funkcija $f(x)$ polinom stepena $\leq n$, da je tada $R_n(x) = 0$, a samim tim je i $R = 0$, te je iz *)

za polinome stepena $\leq n$ zadovoljeno da je $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i$.

Uzimajući da je funkcija $f \in \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dobijamo sistem jednačina:

$$b-a = \sum_{i=0}^n A_i; \quad \frac{b^2-a^2}{2} = \sum_{i=0}^n A_i x_i; \quad \dots, \quad \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=0}^n A_i x_i^n,$$

iz kog odredjujemo koeficijente A_i .

*) U slučaju kada je $x_0 = a$, $x_n = b$, a ostali čvorovi su ekvidistantni, integracijom Lagrangeovog interpolacionog polinoma dobijamo Newton-Cotes-ove formule. Prethodna priča se odnosila na integraciju Lagranžovog interpolacionog polinoma. Integracijom nekih drugih interpolacionih polinoma mogu se dobiti razne integracione formule.

2. Newton – Cotes-ove formule

Neka su x_0, x_1, \dots, x_n ekvidistantni čvorovi, takvi da je $x_0 = a$ i $x_n = b$.

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{\prod_{n+1} (x)}{(x-x_i) \prod_{n+1} (x_i)} dx = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} dx$$

Zamenjujući da je $x = x_0 + th$ za $t \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ proizvoljno da bi obuhvatili sve čvorove, a $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) dobijamo

$$p_i(x) = \frac{th \cdot (t-1)h \cdots (t-n)h \leftarrow \text{bez } (t-i)h}{ih \cdot (i-1)h \cdots (i-n)h \leftarrow \text{bez } (i-i)h} = \left| \frac{t-i}{t-i} \right| \quad \begin{array}{l} i! \rightarrow \text{proističe iz prvog dela} \\ \text{činilaca u imeniocu} \\ (-1)^{n-i}(n-i)! \rightarrow \text{proističe iz drugog dela} \\ \text{činilaca} \end{array}$$

$$= \frac{t(t-i) \cdots (t-n)}{(t-i) \cdot i! \cdot (-1)^{n-i} (n-i)!}$$

Zbog poslednjeg imamo da je:

$$A_i = \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i) \cdot i! \cdot (n-i)!} h dt = \rightarrow h dt = dx,$$

$$= \frac{h(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i)} dt = \quad , h = \frac{b-a}{n}$$

$$= (b-a) \frac{(-1)^{n-i}}{ni!(n-2)!} \int_0^n \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(t-i)} dt = (b-a) C_i^n$$

$A_i = (b-a) C_i^n$, gde su C_i^n Newton-Cotes-ovi koeficijenti. Za njih važi $C_i^n = C_{n-i}^n$

Specijalni slučajevi:

1) Za $n=1$ dobijamo trapezno pravilo (jer imamo dva čvora)

$$C_0^1 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2}; \quad C_1^1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{(t-1)} dt = \frac{1}{2},$$

koje glasi:

$$\int_0^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{2} h (f_0 + f_1) + R_1, \quad h = b-a \text{ koje stoji ispred } C_i^n$$

Ako imamo n -čvorova, uopštavanjem prethodnog dobijamo da je

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} h (f_0 + f_1) + \frac{1}{2} h (f_1 + f_2) + \cdots + \frac{1}{2} h (f_{n-1} + f_n) \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} h (f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n) + R \end{aligned}$$

Što predstavlja **opšte trapezno pravilo**.

Pitanje greške: Kako je greška Lagrange-ovog interpolacionog polinoma

$$R_n = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)| \text{ tada će ukupna greška biti suma grešaka na pojedinim}$$

segmentima. Integralna greška za polayni slučaj iynosi

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{M_2}{2!} \left| \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx \right| = \quad , \text{ smena : } x = x_0 + th \\ &= \frac{M_2}{2!} h^3 \underbrace{\left| \int_0^1 (t^2 - t) dt \right|}_{\frac{1}{6}} = \frac{M_2}{12} h^3 \end{aligned}$$

Zato je ukupna greška R, za gornji niz zbira integrala $R = n \frac{M_2 h^3}{12}$, a kako je $\frac{b-a}{n} = h$

imamo da je greška metode $R = (b-a) \frac{M_2 h^2}{12}$

2) Za $n = 2$ dobijamo Simpsonovo pravilo:

$$C_0^2 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{f(t-1)(t-2)}{t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{6} = C_2^2 ; C_1^2 = \frac{2}{3}$$

Odakle sledi da je zbog $\frac{b-a}{2} = h \Leftrightarrow b-a = 2h$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = 2h \left(\frac{1}{6} f_0 + \frac{2}{3} f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2). \text{ Uprošćavanjem dobijamo da je:}$$

Ako je dato $2n+1$ čvorova, i to x_0, x_1, \dots, x_{2n} , deljenjem na integrale gornjeg tipa dobijamo da je:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3} (f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) = \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}) \end{aligned}$$

Poslednji izraz predstavlja uopšteno Simpsonovo pravilo.

Pitanje greške: Za jedan segment imamo da je:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{M_3}{3!} \left| \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) dx \right| = \quad , \text{ smena : } x = x_0 + th \\ &= \frac{M_3}{3!} \left| \int_0^2 th \cdot (t-1)h \cdot (t-2)h \cdot h dt \right| = \\ &= \frac{M_3}{3!} h^4 \underbrace{\left| \int_0^2 (t^3 - 3t^2 + 2t) dt \right|}_0 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow R = 0$, što je nemoguće, jer su funkcija f i njen interpolacioni polinom različiti!

Dobijeni rezultat $R = 0$ znači da je formula tačna i za polinom stepena 3, te će greška biti četvrtog reda. Pokazalo se da je greška nula za polinome 0,1,2 i čak 3-eg stepena što je

$$\begin{aligned} \text{izuzetak te je } R_L &= \frac{f^{iv}(\xi)}{4!} |\Pi_{n+1}(x)| \Rightarrow R_1 = \frac{M_4}{24} \left| \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)^2 (x-x_1)(x-x_2) dx \right| = \frac{M_4}{90} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R = \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \end{aligned}$$

- Kod određivanja integrala **ukupna tj. totalna greška** je $R^T = R_M + r$, gde je greška r greška računa i ona iznosi $r = \varepsilon_r \cdot (\text{broj sabiranja}) = \varepsilon_r (b-a)$, a R_M greška metode.

- Kod trapeznog pravila to je $r = nh \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$, ako se radi sa k decimala, pri čemu je

$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$, a $nh = b-a$ tako da se uklapaju oba koncepta.

- Kod Simpsonovog pravila iste su formule za r kao kod trapeznog pravila.

(Izvesti za domaći)

3. Rungeova ocena greške za procenu greške metode

- U opštem slučaju greška Newton-Cotes-ovih formula ima oblik, za korak tabeliranja h , funkciju f :

$$R^h(f) = c \cdot (b-a) M_n \cdot h^n \quad \begin{cases} \text{Simpson: } R^h(f) = \frac{b-a}{180} M_4 h^4 \\ \text{Trapezna: } R^h(f) = \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \end{cases}$$

Vidimo, da se greška integracije smanjuje ako se smanji korak h . Neka je integral I funkcije f izračunat za dva koraka h_1 i h_2 pri čemu je $h_1 < h_2$. Imamo da je:

$$\left. \begin{aligned} R^{h_1}(f) &= c \cdot (b-a) M_n h_1^n \\ R^{h_2}(f) &= c \cdot (b-a) M_n h_2^n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{za neku odabranu} \\ \text{Newton-Cotesovu formulu,} \\ \text{i fiksirano } n \end{array}$$

Imamo da je:

$$\left. \begin{aligned} R^{h_1}(f) &= I - I_{h_1} \\ R^{h_2}(f) &= I - I_{h_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} I_{h_1}, I_{h_2} \text{ su izračunati nekom} \\ \text{kvadraturnom formulom} \end{array}$$

Iz gornjeg sledi:

$$I_{h_2} - I_{h_1} = R^{h_1}(f) - R^{h_2}(f) = c \cdot (b-a) M_n h_1^n \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right) = (I - I_{h_1}) \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right) = R^{h_1}(f) \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n \right)$$

Iz čega dobijamo da je:

$$R^{h_1}(f) = \frac{I_{h_1} - I_{h_2}}{\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n - 1}$$

Zbog pozitivnosti greške važi da je:

$$R^{h_1}(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^n - 1}$$

Dakle, grešku metode za određeni korak h_1 ne moramo računati pomoću maksimuma izvoda, nego „upoređivanjem“ razlike vrednosti dobijenih integrala za taj korak i za veći korak h_2 . Najčešće se grška smanjuje, do postizanja potpuno zadovoljavajućeg rešenja, duplim smanjivanjem koraka. U specijalnim slučajevima greške Rungea imaju oblik:

$$\text{Simpson: } R(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4 - 1}; \quad \text{Trapezna: } R(f) = \frac{|I_{h_1} - I_{h_2}|}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1}$$

Napomena: Podelu „usitnjujemo“ sve dok konačna greška ne bude manja od unapred zadate greške metode.

Zadatak 1. Koristeći Simpsonovu formulu izračunati $\int_0^1 \cos(x^2) dx$ sa tačnošću

$R = 0.5 \times 10^{-4}$, radeći sa 5 decimala.

Rešenje:

$R^T = R_M + r_R$, gde je $r_R = \frac{1}{2} \cdot (1-0) \cdot 10^{-5}$ te je

$R_M = R^T - r_R \Rightarrow R_M = 0.0005 - 0.00005 = 0.00045$. Dakle $R_M = 4.5 \times 10^{-4}$

Osnovno pitanje je koliki je korak h . Uzmimo da je $h = 0.1$, a zatim $h = 0.05$ i primenimo Rungeovu ocenu greške. (Računamo u rad - radijanima)

$h = 0.1$			
x	y_0, y_{2n}	y_{2k-1}	y_{2k}
0	1		
0.1		0.99995	
0.2			0.99920
0.3		0.99595	
0.4			0.98723
0.5		0.96891	
0.6			0.93590
0.7		0.88233	
0.8			0.80210
0.9		0.68950	
1.0	0.54030		
Σ	1.54030	4.53664	3.72443

$h_1 = 0.05$	
x	y_{2k-1}
0.05	1.00000
0.15	0.99995
0.25	0.99805
0.35	0.99251
0.45	0.97957
0.55	0.95460
0.65	0.91207
0.75	0.84592
0.85	0.75015
0.95	0.61965
Σ	9.05247

$$I_h = \frac{0.1}{3} [1.54030 + 4 \times 4.53664 + 2 \times 3.72443]$$

$$\underline{\underline{I_h = 0.90452}}$$

$$I_{h_1} = \frac{0.05}{3} [1.54030 + 4 \times 9.05247 + 2 \times 8.26107]$$

$$\underline{\underline{= 0.90454}}$$

*Uočimo da umanjnjem koraka svi čvorovi iz prethodnog dela postaju čvorovi sa parnim indeksom u narednom! Imamo da je ya drugu tabelu

$$\sum_{y_{2k}} 4.53664 + 3.72443 = 8.26107$$

Procena greške Rungeovom metodom:

$$R_{h_1} = \frac{0.90454 - 0.90452}{2^4 - 1} = 1.3 \times 10^{-6} < 4.5 \times 10^{-4}$$

Dakle, postignuta je tačnost, te je:

$$\underline{\underline{I \approx 0.90454}}$$

***Maple daje rezultat $I \approx 0.9045242448$ ***

5. Gausove kvadrature formule

- Formule oblika $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ nazivamo kvadraturnim formulama.

- Koeficijente A_i određujemo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Zamenom $f \in \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dobijamo koeficijente A_0, A_1, \dots, A_n . Greška je

tada:
$$R \leq \int_a^b \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0) \cdots (x-x_n)| dx.$$

- Ako se uoči da je dobijena formula tačna i za x^{n+1}, \dots, x^{n+k} , a da ne važi za x^{n+k+1} , tada je

greška
$$R \leq \int_a^b \frac{M_{n+k+1}}{(n+k+1)!} |(x-x_0)^{k+1} (x-x_1) \cdots (x-x_n)| dx.$$

- Formule oblika $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R_n(f)$, gde su $x_i, (i = \overline{1, \dots, n})$ nule Ležandrovog

polinoma n -tog stepena $L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)}$ nazivamo Gausovim kvadraturnim

formulama i pri tome je $R_n(f) \leq \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \cdot M_{2n}$

Napomena: Ako imamo integraciju na intervalu $[a, b]$, a želimo da primenimo Gausove

kvadraturene formule, prvo uvodimo smenu: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, t \in [-1, 1]$

Zadatak 2. Izvesti formulu za numeričku integraciju oblika

$$\int_0^h f(x) dx = Af(0) + Bf\left(\frac{2h}{3}\right) + R(h)$$

Tako da bude tačna za polinome što većeg stepena. Proceniti grešku integracije $R(h)$.

Rešenje:

$$f(x) = 1: A + B = h$$

$$f(x) = x: B = \frac{3}{4}h \Rightarrow A = \frac{1}{4}h$$

$$\text{- Formula glasi: } \int_0^h f(x) dx = \frac{1}{4}hf(0) + \frac{3}{4}hf\left(\frac{2h}{3}\right)$$

Provera za grešku:

$$f(x) = x^2: \frac{h^3}{3} = \frac{3}{4}h \cdot \frac{4h^2}{9} \Rightarrow \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3}$$

$$f(x) = x^3: \frac{h^4}{4} \neq \frac{2h^4}{9}$$

Dakle greška je trećeg reda:

$$R(h) \leq \int_0^h \frac{M_3}{3!} \left[(x-0)^2 \left(x - \frac{2h}{3} \right) \right] dx = \frac{M_3}{6} \int_0^h \left(x^3 - \frac{2h}{3}x^2 \right) dx = \frac{M_3}{6} \left(\frac{h^4}{4} - \frac{2}{9}h^4 \right) = \underline{\underline{\frac{M_3 h^4}{216}}}$$