

*Elektrotehnički fakultet
Beograd*

NUMERIČKA MATEMATIKA

Materijal sa predavanja

Autor Siniša N. Ješić

2004/05 god.

I GLAVA

1. Interpolacija

- Osnovni problem interpolacije je egzistencija funkcije koja interpolira funkciju zadatu u konačnom broju čvorova.
- Zbog jednostavnosti polinomske funkcije, najčešća intencija je da se formira funkcija polinomskog tipa koja interpolira polaznu funkciju.

Teorema:

- Neka je funkcija f zadata u $n+1$ čvorova tačkama (x_k, f_k) , $k=0, 1, \dots, n$. Tada postoji jedinstven polinom oblika

$$(1) \quad P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

takav da je $P_n(x) = f_k$ (2)

dokaz:

Ako u jednakost (1) zamenimo uslove (2) dobijamo sistem jednačina za određivanje koeficijenata a_0, a_1, \dots, a_n , koji glasi

$$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = f_0$$

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = f_1$$

...

$$a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = f_n,$$

odnosno u matricnom zapisu

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

- Kako je determinanta ovog sistema Vandermond-ova determinanta koja ima vrednost

$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$, sistem ima jedinstveno rešenje, za koeficijente traženog polinoma.

2. Lagranžov interpolacioni polinom

- Neka je funkcija f zadata u tačkama x_0, x_1, \dots, x_n , vrednostima f_0, f_1, \dots, f_n , pri čemu je $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $(n+1)$ puta diferencijabilna.

- Posmatrajmo pomoćne funkcije:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)$$

kao i funkciju

$$p_i(x) = \frac{1}{(x-x_i)} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_i)}$$

Lako se uočava da je $p_i(x_k) = 0$ za $i \neq k$, odnosno $p_i(x_k) \neq 0$ za $i = k$. (Oznaka: δ_{ik})

Takođe, funkcija

$$(3) P_n(x) = \sum p_i(x)f_i \equiv L_n(x), \text{ gde je } i = 0, 1, \dots, n$$

ima osobine da je $P_n(x_k) = f_k$, ($k = 0, 1, \dots, n$), što znači da jednakost (3) predstavlja interpolacioni polinom funkcije f , koji nazivamo Lagrange-ovim interpolacionim polinomom.

3. Opšta formula za grešku interpolacije

- Postavlja se pitanje greške pri izračunavanju vrednosti funkcije u nekoj međutački $x \in [x_0, x_n]$ pomoću njenog interpolacionog polinoma.

Definicija:

Greška interpolacije je definisana izrazom $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Teorema:

Greška interpolacije funkcije f koja je $(n+1)$ put diferencijabilna ima oblik:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

gde je $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(t)|$, $t \in I$, $I=[a, b]$, $a = \min\{x_0, x\}$, $b = \max\{x_n, x\}$.

dokaz:

Posmatrajmo pomoćnu funkciju

$$(4) \quad \varphi(s) = f(s) - P_n(s) - \frac{\Pi_{n+1}(s)}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

gde je $x \neq x_k$ (ako je $x = x_k$, greška je 0).

Nije teško uočiti da su x_0, x_1, \dots, x_n , kao i tačka x , nule funkcije $\varphi(s)$, jer je $f(x_k) - P_n(x_k) = 0$, i $\Pi_{n+1}(x_k) = 0$. Dakle, $\varphi(s)$ ima $(n+2)$ nule, odakle na osnovu Rolle-ove teoreme o srednjoj vrednosti zaključujemo da postoji ξ , za koje važi

$$(5) \quad \min\{x_0, x\} < \xi < \max\{x_n, x\}$$

i za koje je $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ (5')

Diferenciranjem jednakosti (4) po promenljivoj s i to $(n+1)$ put dobijamo da je

$$(6) \quad \varphi^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - \frac{(n+1)!}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

jer je $P_n^{(n+1)}(s) = 0$ (polinom stepena n) i $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(s) = (n+1)!$ (polinom stepena $(n+1)$ sa vodećim koeficijentom jednakim 1).

Zamenom $\xi \rightarrow s$ iz (6) dobijamo, zbog (5') da je

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

Kako je $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$ tvrđenje je dokazano.

Napomena: Postavlja se pitanje da li tačka x u kojoj izračunavamo vrednost funkcije mora biti na intervalu $[x_0, x_n]$. Odgovor je “NE”. Ako je tačka unutar intervala reč je o interpolaciji, a ako je tačka van intervala reč je o ekstrapolaciji. U slučaju interpolacije jednakost (5) postaje $x_0 < \xi < x_n$. Udaljavanjem tačke x od intervala povećava se greška računanja vrednosti funkcije.

4. Konačne razlike funkcije

- Definišimo konačne razlike prvog reda (funkcija je zadata čvorovima (x_k, f_k)):

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

- Konačne razlike višeg reda definišemo rekursivno:

$$\text{II reda : } \Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\text{III reda : } \Delta^3 f_i = \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) = f_{i+3} - f_{i+2} - 2f_{i+2} + 2f_{i+1} + f_{i+1} - f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

...

$$\text{n-reda : } \Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i)$$

Osobine konačnih razlika:

$$1) \quad \Delta(f_k - f_j) = \Delta f_k - \Delta f_j$$

$$2) \quad \Delta(C \cdot f_k) = C \cdot \Delta f_k$$

* Definisane konačne razlike neki autori nazivaju i konačnim razlikama unapred.

Konačne razlike unazad, u oznaci $\nabla^k f_j$ mogu se definisati pomoću navedenih, sa

$\nabla^k f_j = \Delta^k f_j$, te je u pitanju samo druga notacija.

5. Njutnovi interpolacioni polinomi

- Neka je funkcija f zadata čvorovima (x_k, f_k) koji su ekvidistantni, tj. $x_{i+1} - x_i = h$, $i=0, \dots, n-1$

I Njutnov interpolacioni polinom je polinom oblika:

$$(7) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}),$$

gde su a_0, a_1, \dots, a_n koeficijenti koje treba odrediti. Kako mora važiti $P_n(x_k) = f_k$, primenimo sledeći postupak:

$$x=x_0 : a_0 = f_0 = \frac{\Delta^0 f_0}{0! h^0}$$

$$x=x_1 : a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f_1 - f_0}{h} \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta^1 f_0}{1! h^1}, \quad x_1 - x_0 = h$$

$$x=x_2 : f_0 + \frac{\Delta f_0}{h} (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f_2 - 2\Delta f_0 - f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2},$$

$$x_2 - x_0 = 2h, \quad x_2 - x_1 = h$$

Indukcijom dobijamo da je

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$$

Dakle I Njutnov interpolacioni polinom ima oblik:

$$(8) \quad N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1! h^1} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2} (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n} (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

odnosno (zbog računanja) uvodeći smenu $\frac{(x-x_0)}{h} = u$, imamo da je:

$$N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!} u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} u(u-1)\dots(u-n+1)$$

Napomena: $N_I(x)$ je dobro primeniti u slučaju kada se tačka x nalazi u prvoj polovini intervala $[x_0, x_n]$

II Njutnov interpolacioni polinom je polinom oblika:

$$(9) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + a_n(x-x_n)\dots(x-x_1),$$

analogno postupku iz prethodnog paragrafa uzimajući da je:

$$x=x_n : a_0 = f_n$$

$$x=x_{n-1} : a_1 = \frac{\Delta f_{n-1}}{1! h^1}$$

$$x=x_{n-2} : a_2 = \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{1! h^2}$$

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$$

Dakle,

$$N_{II}(x) = f_n + \frac{\Delta^1 f_{n-1}}{1! h^1} (x-x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2! h^2} (x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n} (x-x_n) \dots (x-x_1)$$

Odnosno uzimajući smenu $v = \frac{x-x_n}{h}$ dobijamo:

$$N_{II}(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!} u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} u(u-1) \dots (u-n+1)$$

Postavlja se pitanje greške kod Njutnovih interpolacionih polinoma? Greška je ista kao kod uopštene interpolacije. Ako nije poznat analitički oblik funkcije tada izraz

$$f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{treba zameniti sa} \quad \frac{\Delta^{n+1}(\xi)}{h^{n+1}},$$

odnosno $\Delta^{n+1}(\xi)$ je maksimalna vrednost konačne razlike iz zadnje kolone tablice.

6. Tablice konačnih razlika i greške u njima

Predpostavimo da je tabeliran polinom n-tog stepena. Tada konačne razlike reda $n+1$, $n+2, \dots$ moraju biti 0, jer bi u suprotnom polinom n-tog stepena mogao da se aproksimira Njutnovm polinomom većeg stepena od n, što je nemoguće.

Zadatak: Polinom $p_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

$$(p_3(x) = x^3 + x^2 + 1)$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p_3(x)$	-20	-5	1	1	4	15	40	85	156

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, odrediti taj podatak i odrediti polinom $p_3(x)$.

Rešenje:

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-9	3	6
-2	-5	6	-6	9	-4
-1	0 ← -1	1 ← 0	2 ← -3	6 ← 5	1
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

} → Pretpostavlja se da je ovo tačno jer i treba da bude 0. Na dobijene nule, utiču vrednosti $p_3(x)$, u tačkama 0,1,2,3,4,5 te pretpostavljamo da su one tačne.

Problem je broj 1. Prva vrednost funkcije koja utiče na dobijenu 1 je vrednost u tački $x = -1$ i pretpostavljamo da je ona netačna ispravljajući unazad tablicu dobijamo da je $p_3(-1) = 0$. Tako ispravljeno dobijamo da je

x	$p_3(x)$	Δp_3	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-10	6	0
-2	-5	5	-4	6	0
-1	0	1	2	6	0
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

$$\begin{aligned}
 N_I(x) &= -20 + 15(x+3) - \\
 &\quad 5(x+3)(x+2) + \\
 &\quad (x+3)(x+2)(x+1) = \\
 &= -20 + 15x + 45 - 5x^2 - 25x \\
 &\quad - 30 + x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
 &= \underline{x^3 + x^2 + 1} \equiv p_3(x)
 \end{aligned}$$

7. Pitanje inverzne interpolacije

Postavlja se pitanje određivanja originala, ako je poznata vrednost funkcije. Suština je da se iz interpolacionog polinoma izvede iterativni proces koji konvergira.

Zadatak: Funkcija $y = f(x)$ data je tablicom. Odrediti x za koje je $f(x) = 2$.

Rešenje:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.65	1.91554	0.20146	0.02119	0.00216
0.75	2.11700	0.22265	0.02335	0.00253
0.85	2.33965	0.24606	0.02588	0.00272
0.95	2.58571	0.27194	0.0286	
1.05	2.85765	0.30054		
1.15	3.15819			

Kako $2 \in [1.191554; 2.11700]$
 $\Rightarrow x \in [0.65, 0.75]$

te ćemo uzeti I Njutnov
 interpolacioni polinom:

$$\begin{aligned}
 &\quad x - 0.65 \\
 h = 0.1 ; \quad u &= \frac{x - 0.65}{0.1} ;
 \end{aligned}$$

$$N_I(x) = 1.91554 + \frac{0.20146}{1!}u + \frac{0.02119}{2!}u(u-1) + \frac{0.00216}{3!}u(u-1)(u-2) = 2$$

Formirajmo iterativni proces:

$$u = \frac{1}{0.20146} \left[2 - 1.91554 - \frac{0.02119}{2}u(u-1) - \frac{0.00216}{6}u(u-1)(u-2) \right]$$

$$\text{odnosno: } u = 4.96376 [0.08446 - 0.0106u(u-1) - 0.00036u(u-1)(u-2)]$$

Polazeći od $u_0 = 0$ dobijamo niz iteracija

$$u_1 = 0.41924; \quad u_2 = 0.43136; \quad u_3 = 0.43146; \quad \boxed{u_4 = 0.43146} \Rightarrow x = 0.1u + 0.65$$

$$\boxed{x = 0.69315}$$

Napomena: Ovo je praktično tablica funkcije $f(x) = e^x$, dok je vrednost izraza $\ln 2$.

II GLAVA

1. Numeričko diferenciranje

(1) Neka je $P_n(x)$ interpolacioni polinom a $R_n(x)$ greška interpolacije. Tada je

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Rightarrow f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x)$$

dakle, približna vrednost izvoda funkcije može se odrediti diferenciranjem interpolacionih polinoma, dok je greška tako dobijene vrednosti izvoda jednaka izvodu greške. Kako je:

$$R_n(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \Pi_{n+1}(x) |, \text{ tada je } R_n^{(k)}(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \Pi_{n+1}^{(k)}(x) |$$

Potržimo izvode Njutnovih interpolacionih polinoma:

* Ako funkcija zavisi od u , ili od v , tada je $g'_x = g'_u \cdot u'_x$ ili $g'_x = g'_v \cdot v'_x$, a kako je

$$u = \frac{x-x_0}{h}, \quad v = \frac{x-x_u}{h} \Rightarrow u'_x = v'_x = \frac{1}{h}$$

Tada je:

$$N'_{I(x)} = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} (2u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!} (3u^2 - 6u + 2) + \frac{\Delta^4 f_0}{4!} (4u^3 - 18u^2 + 22u - 6) + \dots \right]$$

$$N'_{II(x)} = \frac{1}{h} \left[\Delta f_{n-1} + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!} (2v-1) + \frac{\Delta^3 f_{n-3}}{3!} (3v^2 - 6v + 2) + \frac{\Delta^4 f_{n-4}}{4!} (4v^3 - 18v^2 + 22v - 6) + \dots \right]$$

Zadatak: Odrediti tačku x maksimuma funkcije, koja je zadata tablicom.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.1	0.284605	0.073166	-0.047531	0.017963	-0.010382
0.2	0.357771	0.025635	-0.029568	0.007581	-0.003388
0.3	0.383406	-0.003933	-0.021987	0.004193	-0.001526
0.4	0.379473	-0.02592	-0.017794	0.002667	
0.5	0.353553	-0.043714	-0.015127		
0.6	0.309839	-0.058841			
0.7	0.250998				

$h = 0.1$

Kako se od $0.2 \rightarrow 0.3$ vrednost funkcije uvećava, a od $0.3 \rightarrow 0.4$ umanjuje, tada nezavisno promenljivu u kojoj je maksimum treba tražiti u okolini tačke $x = 0.3$. Stoga, napišimo $N_I(x)$, polazeći od vrednosti $x = 0.3$ kao da je ona početak tablice.

$$N'_I(x) = \frac{1}{h} [-0.003933 + \frac{-0.021987}{2!}(2u - 1) + \frac{0.004193}{3!}(3u^2 - 6u + 2)] ; (h=0.1 \Rightarrow 1/h=10)$$

Kako bi ovaj izvod bio 0, formirajmo iterativni proces.

$$-0.003933 - (0.021987 + 0.004193)u + 0.0109935 + 0.001398 + 0.002097u^2 = 0$$

$$\text{odnosno, } 0.02618u = 0.008459 + 0.002097u^2$$

$$u = \frac{1}{0.02618} [0.008459 + 0.002097u^2]$$

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 0.323077; \quad u_2 = 0.322858; \quad \boxed{u_3 = 0.322858} \equiv u$$

$$u = \frac{x - 0.3}{0.1} \Rightarrow x = 0.3 + 0.1u = > \boxed{x = 0.332286} \text{ je tačka maksimuma}$$

2. Izvođenje formula za numeričko diferenciranje

Često se zahteva određivanje izvoda funkcije tako da se greška minimizira. To se postiže menjanjem koraka h , koji se naziva optimalan korak, ukoliko minimizira grešku.

Greška numeričkog diferenciranja predstavlja zbir dve greške, i to:

- (1) Greške metode (R_M)
- (2) Greške zaokrugljivanja (r)

Dakle, $R = R_M + r$. Diferenciranjem po h (korak interpolacije), nalaženjem minimuma funkcije $R(h)$ dobijamo optimalan korak. Razne formule za numeričko diferenciranje nastaju primenom Tajlorove, tačnije Meklorenove formule.

1) Neka je funkcija $f(x) \in C^2[a, b]$ dva puta neprekidno diferencijabilna, čije su poznate vrednosti u ekvidistantnim čvorovima $a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n = b$. Dokazati da je:

$$f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h \quad \text{za } \xi \in (x_k, x_{k+1}); \quad x < x_{k+1}$$

dokaz:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h) \stackrel{\text{Taylor}}{=} f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{k+1} - x_k)^2$$

odnosno

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

tj.
$$f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h$$

Tajlorova formula:

$$F_{Xk}(h) = F_{Xk}(0) + \frac{F'_{Xk}(0)}{1!}h + \frac{F''_{Xk}(0)}{2!}h^2 + \dots$$

Funkcija $F_{Xk}(h)$ je razvijena u okolini $h = 0$, a x_k u indeksu je fiksiran parametar. Postavlja se pitanje "Da li je moguće izračunati vrednost izvoda u tačkama koje nisu čvorovi?"

2) Pod istim pretpostavkama kao u prethodnom primeru dokazati da je:

$$f'(x_k + \frac{h}{2}) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f'''(\xi)}{24}h^2 ; \quad (\text{ali ovde je } f(x) \in C^3[a,b] !!!)$$

dokaz: Označimo sa $\underline{x} = x_k + \frac{h}{2}$. Tada je:

$$x_k = \underline{x} - \frac{h}{2}, \quad a \quad x_{k+1} = \underline{x} + \frac{h}{2}$$

Na osnovu Tajlorovih formula imamo da je:

$$f(x_k) = f(\underline{x} - \frac{h}{2}) = f(\underline{x}) - \frac{h}{2} \frac{f'(\underline{x})}{1!} + \frac{h^2}{2^2} \frac{f''(\underline{x})}{2!} - \frac{h^3}{2^3} \frac{f'''(\xi)}{3!}$$

$$f(x_{k+1}) = f(\underline{x} + \frac{h}{2}) = f(\underline{x}) + \frac{h}{2} \frac{f'(\underline{x})}{1!} + \frac{h^2}{2^2} \frac{f''(\underline{x})}{2!} - \frac{h^3}{2^3} \frac{f'''(\xi)}{3!}$$

Oduzimanjem prve formule od druge dobijamo da je:

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = hf'(\underline{x}) + \frac{h^3}{24}f'''(\xi) ; \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta f_k \Rightarrow f'(\underline{x}) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{h^2}{24}f'''(\xi)$$

Napomena: Uočimo da su približne vrednosti izvoda, u tačkama x_0 i $x_0+h/2$ iz prethodna dva zadatka iste i iznose $\Delta f_k/h$, ali se greške razlikuju.

Domaći zadatak: Za $f(x) \in C^3[a,b]$ izvesti formulu za diferenciranje $f'(x_k+h/n)$ gde je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji prirodan broj, $n > 1$.

3) Neka se vrednosti funkcije f mogu izraziti sa tačnošću ε i neka je $\max |f^{(n)}(x)| = M_n$. Naći optimalan korak za numeričko diferenciranje po formuli:

$$a) f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h}; \quad b) f'(x_k + \frac{h}{2}) \approx \frac{\Delta f_k}{h}; \quad c) f''(x_k) \approx \frac{\Delta^2 f_{k-1}}{h^2} = \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{h^2}$$

Rešenje:

a) Zbog zadatka 1) $R_M = |f''(\xi)h/2| \leq M_2 h/2$, a greška zaokrugljivanja vrednosti izraza je $r = 2\varepsilon/h$, odakle sledi da je ukupna greška $R = M_2 h/2 + 2\varepsilon/h$. Diferenciranjem po h dobijamo da je:

$$R'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4\varepsilon}{M_2}$$

$$b) \text{ Slično } R = \frac{h^2 M_3}{24} - \frac{2\varepsilon}{h} \Rightarrow R'(h) = \frac{h M_3}{12} - \frac{2\varepsilon}{h^2} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow h^3 = \frac{24\varepsilon}{M_3}$$

c) Posmatrajmo desnu stranu predložene formule:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} [f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))] &= \frac{1}{h^2} [f(x_{k+h}) - 2f(x_k) + f(x_{k-h}))] = \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{1}{h^2} \left[f(x_k) + h \frac{f'(x_k)}{1!} + h^2 \frac{f''(x_k)}{2!} + h^3 \frac{f'''(x_k)}{3!} + h^4 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} + 2f(x_k) + f(x_k) - h \frac{f'(x_k)}{1!} + h^2 \frac{f''(x_k)}{2!} - h^3 \frac{f'''(x_k)}{3!} + h^4 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \right] = \\ &= f''(x_k) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \text{ čime je dokazana predložena formula sa greškom } R_M = \frac{h^2}{12} M_4, \text{ a} \end{aligned}$$

greškom računa $r = \frac{2\varepsilon}{h^2}$, te je:

$$R = \frac{h^2}{12} M_4 + \frac{2\varepsilon}{h^2} \Rightarrow R'(h) = \frac{h M_4}{6} - \frac{4\varepsilon}{h^3} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow h^4 = \frac{48\varepsilon}{M_4}$$

Domaći zadatak:

1) Izvesti formule za nalaženje sledećih izvoda

$$\{ f'''(x_k), f^{(4)}(x_k); f'(x_k + h/n), f'''(x_k + h/n), f^{(4)}(x_k + h/n) \}$$

i odrediti optimalan korak takvog diferenciranja.

2) Neka se vrednosti funkcije mogu odrediti sa tačnošću ε i neka je $M_n = \max |f^{(n)}(x)|$, $x \in [a, b]$. Naći optimalan korak za numeričko diferenciranje po formuli (čvorovi su ekvidistantni).

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h} [-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2}))]$$

Rešenje:

$$2) \quad R = h^2 M_3 + \frac{4\varepsilon}{h} ;$$

$$R'(h) = 2hM_3 - \frac{4\varepsilon}{h^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow h^3 = \frac{2\varepsilon}{M_3}$$

- Postavlja se pitanje da li je u opštem slučaju moguće izvesti “najbolju” formulu za određivanje izvoda u obliku:

$$f'(x) = \frac{1}{h} (a_1 f(x + b_1 h) + a_2 f(x + b_2 h))$$

Rešenje: Pretpostavimo da je ovaj problem normalizovan, tj. da je $|b_2 - b_1| = 1$. Primenimo Tajlorovu formulu tako da ostatak bude oblika $O(h^r)$, pri čemu je r što je moguće veće. U tom slučaju imamo da je ostatak najmanji moguć.

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left\{ a_1 \left(f(x) + \frac{f'(x)}{1!} (b_1 h)^1 + \frac{f''(x)}{2!} (b_1 h)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (b_1 h)^3 + O(h^3) \right) + a_2 \left(f(x) + \frac{f'(x)}{1!} (b_2 h)^1 + \frac{f''(x)}{2!} (b_2 h)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (b_2 h)^3 + O(h^3) \right) \right\}$$

Iz poslednjeg dobijamo da je:

$$f'(x) = \frac{a_1 + a_2}{h} f(x) + (a_1 b_1 + a_2 b_2) f'(x) + \frac{h}{2} (a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2) f''(x) + \frac{h^2}{3!} (a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) f'''(x) + \left\{ \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} (b_1 h)^4 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!} (b_2 h)^4 \right\}$$

Da bi leva strana bila “jednaka” desnoj zahtevamo da je:

$$a_1 = -a_2, \quad b_1 - b_2 = 1, \quad b_1 = -b_2, \quad 2a_1 b_1 = 1$$

$$tj. : a_1 = -a_2 = 1, \quad b_1 = -b_2 = 1/2$$

Dakle, najbolja od “dvotačkastih” formula za izračunavanje izvoda je:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right), \quad \text{agreška } R_M = \frac{h^4}{2^3 \cdot 4!} M_4$$

Napomena: J. M. Ash i R. L. Jones su pokazali da je u klasi “trotačkastih” formula, polazeći od:

$$1$$

$$f'(x) = \frac{-(a_1 f(x + b_1 h) + a_2 f(x + b_2 h) + a_3 f(x + b_3 h))}{h},$$

uz uslov normalizacije $\min\{|b_1 - b_2|, |b_2 - b_3|, |b_1 - b_3|\} = 1$, najbolja ona za koju je:

$$\begin{aligned} a_1 &= 32/120 & b_1 &= 3 \\ a_2 &= -27/120 & b_2 &= -2 \\ a_3 &= -5/120 & b_3 &= 6 \end{aligned}$$

(Ispitni zadatak): Funkcija $x \rightarrow f(x)$ tabelirana je sa korakom $h > 0$, u ekvidistantnim čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . Dokazati aproksimacije: $(f_k \equiv f(x_k))$

$$a) \quad f'(x_0) = \frac{1}{12h} (-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4)$$

$$b) \quad f'(x_1) = \frac{1}{12h} (-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4)$$

$$c) \quad f'(x_2) = \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4)$$

Rešenje: Iskoristimo I Njutnov interpolacioni polinom:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	$f_1 - f_0$	$f_2 - 2f_1 + f_0$	$f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$	$f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$
x_1	f_1	$f_2 - f_1$	$f_3 - 2f_2 + f_1$	$f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$	
x_2	f_2	$f_3 - f_2$	$f_4 - 2f_3 + f_2$		
x_3	f_3	$f_4 - f_3$			
x_4	f_4				

$$u = (x - x_0)/h$$

$$N_I(x) = f_0 + (f_1 - f_0)u + (f_2 - 2f_1 + f_0)(u^2 - u) + (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)(u^3 - 3u^2 + 2u) + (f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)(u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 6u)$$

odnosno:

$$N'_I(x) = \frac{1}{h} [(f_1 - f_0) + (f_2 - 2f_1 + f_0)(2u - 1) + (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)(3u^2 - 6u + 2) + (f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)(4u^3 - 18u^2 + 22u - 6)]$$

Zamenom:

$x = x_0 \Rightarrow u = 0$...dobijamo prvu formulu (a)

$x = x_1 \Rightarrow u = 1$...dobijamo drugu formulu (b)

$x = x_2 \Rightarrow u = 2$...dobijamo treću formulu (c)

Domaći zadatak: Formiranjem drugog interpolacionog Njutnovog polinoma odrediti iz datih podataka $f'(x_3)$ i $f'(x_4)$.