

# Predlozi zadataka za semestralne radove iz diskretne matematike (III semestar 2005)

## Kombinacija 1.

1. Izračunati vrednost  $f_2(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_2(x, y) = x \cdot y$  ( $f_2(x, 0) = 0$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_1(x, y) = x + y$ .

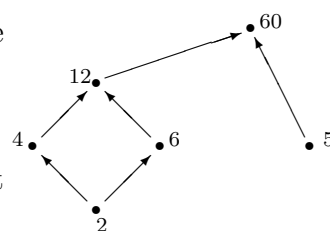
2. Ilustrovati kodiranje formula predikatskog računa na primeru sledeće formule:

$$(\forall x_1) R_1^2(x_1, a_2).$$

3. Na slici je prikazan HASSEov dijagram strukture  $(A, \rho)$ , gde je skup  $A = \{2, 4, 5, 6, 12, 60\}$ .

a) Ispitati da li je uredjen par  $(A, \rho)$  mreža.

b) Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture  $(A, \rho)$ .



## Kombinacija 2.

1. Izračunati vrednost  $f_3(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_3(x, y) = x^y$  ( $f_3(x, 0) = 1$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_2(x, y) = x \cdot y$ .

2. Ilustrovati kodiranje formula predikatskog računa na primeru sledeće formule:

$$(\exists x_2) R_2^1(x_2).$$

3. Neka je  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  nacrtati HASSEov dijagram strukture  $(D, |)$ , gde je  $|$  relacija deljivosti prirodnih brojeva. Ispitati da li je uredjen par  $(D, |)$  mreža. Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture  $(D, |)$ .

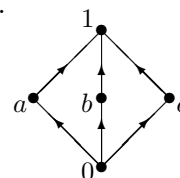
## Kombinacija 3.

1. Izračunati vrednost  $f_4(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_4(x, y) = x^{x^{\dots^x}}$  gde se vrednost  $x$  javlja  $y+1$  puta ( $f_4(x, 0) = x$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_3(x, y) = x^y$ .

2. Transformisati sledeću formulu u preneks normalan oblik:

$$(\forall x)(\forall y) \left( (\exists u) Q(x, y, u) \implies (\exists z) (P(x, z) \wedge P(y, z)) \right).$$

3. Na slici je prikazan HASSEov dijagram  $\mathcal{S}$ -mreže  $(A, \rho)$ , gde je skup  $A = \{0, a, b, c, 1\}$ . Formirati odgovarajuću  $\mathcal{A}$ -mrežu.



## Kombinacija 4.

1. Izračunati vrednost  $f_5(4, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_6(x, y) = x \div y = \begin{cases} x-y & : x \geq y, \\ 0 & : x < y; \end{cases}$  ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_5(x) = x \div 1$ .
2. Transformisati sledeću formulu u preneks normalan oblik:

$$(\forall x)(\forall y) \left( (\exists z)P(x, y, z) \wedge ((\exists v)\neg Q(y, v) \implies (\exists u)\neg Q(x, u)) \right).$$

3. U aditivnoj grupi  $\mathbf{Z}_6 = (Z_6, +_6)$  odrediti red svakog elementa i generatore grupe.

## Kombinacija 5.

1. Izračunati vrednost  $f_{10}(5)$  aritmetičke funkcije  $f_{10}(x) = x!$ , ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_2(x, y) = x \cdot y$ .
2. Odrediti skup sastavaka formule:

$$(\forall y)(\forall x)A(x, y) \implies (\exists x)(\forall y)A(x, y).$$

3. U multiplikativnoj grupi  $\mathbf{Z}_{11} = (Z_{11} \setminus \{0\}, \cdot_{11})$  odrediti red svakog elementa i generatore grupe.

## Kombinacija 6.

1. Neka je na traci TURINGove mašine kodiran broj 7 sa uzastopnih 8 jedinica i neka je glava za čitanje i pisanje na poziciji prve jedinice sa leve strane. Šta je rezultat programa  $f$ :

$$\begin{aligned} f(q_0, 1) &= (q_1, 1, 1), \\ f(q_1, 1) &= (q_1, 1, 1), \\ f(q_1, b) &= (q_2, 1, 1), \\ f(q_2, b) &= (q_+, 1, -1). \end{aligned}$$

2. Odrediti skup sastavaka formule:

$$(\forall y)(\exists x)A(x, y) \implies (\exists x)(\exists y)A(x, y).$$

3. Neka je dat polinom  $P(x) = x^4 + x^2 + 1$  nad prstenom  $\mathbf{Z}_4$ . Dokazati da je posmatrani polinom svodljiv nad datim prstenom i da nema ni jednu nulu u datom prstenu.

## Kombinacija 7.

1. Neka je na traci TURINGove mašine broj 17 binarno kodiran i neka je glava za čitanje i pisanje na poziciji jedinice najveće težine. Šta je rezultat programa  $f$ :

$$\begin{aligned}f(q_0, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, 0) &= (q_1, 0, 1), \\f(q_1, b) &= (q_2, 0, 1), \\f(q_2, b) &= (q_+, 0, -1).\end{aligned}$$

2. Odrediti kompoziciju  $\alpha\beta$  supstitucija:

$$\alpha = \{x \rightarrow a, y \rightarrow f(x), z \rightarrow y\}, \beta = \{x \rightarrow f(a), y \rightarrow z\}.$$

3. Dokazati da nad poljem  $\mathbf{GF}(3)$  polinomi  $P(x) = x + 1$  i  $Q(x) = 2x^3 + 2x + 1$  imaju iste vrednosti u svakoj tački polja.

## Kombinacija 8.

1. Neka je data regularna matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  i vektor  $b = [b_i] \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ . Odrediti maksimalni broj elementarnih operacija koji se koristi prilikom određivanja rešenja sistema  $Ax = b$ , ukoliko se rešenje traži po formuli  $x = A^{-1}b$ .

2. Primenom pravila izvođenja modus ponens i generalizacija iz sledećeg skupa formula:

$$\mathcal{S} = \{A(x) \wedge B(x), (A(x) \wedge B(x)) \implies A(x), (A(x) \wedge B(x)) \implies B(x)\}$$

izvesti formule  $(\forall x)A(x)$  i  $(\forall x)B(x)$ .

3. Konstruisati polje  $\mathbf{GF}(4)$  sa elementima  $0, 1, \alpha, \beta$ . Ispitati da li su polinomi  $P(x) = x^2 + x + 1$  i  $Q(x) = x^2 + x + \alpha$  ireducibilni nad datim poljem.

## Kombinacija 9.

1. Predložiti jedan algoritam za sortiranje niza  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  realnih brojeva u neopadajući poredak. Za predloženi algoritam proceniti maksimalni broj zamena u nizu.

2. Primenom pravila izvođenja rezolucija iz sledećeg skupa sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{A(a), B(x), \neg A(y) \vee \neg B(y)\}$$

izvesti prazan sastavak  $\square$ .

3. Faktorizirati polinom  $P(x) = x^5 - x$  na nesvodljive faktore u polju  $\mathbf{GF}(5)$ .

## Kombinacija 10.

1. Izračunati vrednost  $f_2(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_2(x, y) = x \cdot y$  ( $f_2(x, 0) = 0$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_1(x, y) = x + y$ .

2. Transformisati sledeću formulu u preneks normalan oblik:

$$(\forall x)(\forall y) \left( (\exists u) Q(x, y, u) \implies (\exists z) (P(x, z) \wedge P(y, z)) \right).$$

3. Neka je dat skup kodnih reči  $\mathcal{C} = (Z_2)^3$ . Za zadane tri kodne reči:  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  i  $C = (0, 0, 1)$  odrediti skup kodnih reči  $\mathcal{P}$  koji se sastoji od kodnih reči  $P \in \mathcal{C}$  takvih da za  $d_1 = d(A, P)$ ,  $d_2 = d(B, P)$  i  $d_3 = d(C, P)$  važi:

$$d_1 + d_2 > d_3 \quad \text{i} \quad d_2 + d_3 > d_1 \quad \text{i} \quad d_3 + d_1 > d_2.$$

## Kombinacija 11.

1. Izračunati vrednost  $f_4(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_4(x, y) = x^{x^{\dots^x}}$  gde se vrednost  $x$  javlja  $y+1$  puta ( $f_4(x, 0) = x$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_3(x, y) = x^y$ .

2. Odrediti kompoziciju  $\alpha\beta$  supstitucija:

$$\alpha = \{x \rightarrow a, y \rightarrow f(x), z \rightarrow y\}, \quad \beta = \{x \rightarrow f(a), y \rightarrow z\}.$$

3. Faktorisati polinom  $P(x) = x^5 - x$  na nesvodljive faktore u polju  $\mathbf{GF}(5)$ .

## Kombinacija 12.

1. Izračunati vrednost  $f_{10}(5)$  aritmetičke funkcije  $f_{10}(x) = x!$ , ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_2(x, y) = x \cdot y$ .

2. Primenom pravila izvođenja modus ponens i generalizacija iz sledećeg skupa formula:

$$\mathcal{S} = \{A(x) \wedge B(x), (A(x) \wedge B(x)) \implies A(x), (A(x) \wedge B(x)) \implies B(x)\}$$

izvesti formule  $(\forall x)A(x)$  i  $(\forall x)B(x)$ .

3. Neka je dat skup kodnih reči  $\mathcal{C} = (Z_2)^3$ . Za zadane tri kodne reči:  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  i  $C = (0, 0, 1)$  odrediti skup kodnih reči  $\mathcal{P}$  koji se sastoji od kodnih reči  $P \in \mathcal{C}$  takvih da za  $d_1 = d(A, P)$ ,  $d_2 = d(B, P)$  i  $d_3 = d(C, P)$  važi:

$$d_1 + d_2 > d_3 \quad \text{i} \quad d_2 + d_3 > d_1 \quad \text{i} \quad d_3 + d_1 > d_2.$$

## Kombinacija 13.

1. Neka je na traci TURINGove mašine kodiran broj 7 sa uzastopnih 8 jedinica i neka je glava za čitanje i pisanje na poziciji prve jedinice sa leve strane. Šta je rezultat programa  $f$ :

$$\begin{aligned}f(q_0, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, b) &= (q_2, 1, 1), \\f(q_2, b) &= (q_+, 1, -1).\end{aligned}$$

2. Primenom pravila izvođenja rezolucija iz sledećeg skupa sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{A(a), B(x), \neg A(y) \vee \neg B(y)\}$$

izvesti prazan sastavak  $\square$ .

3. Dokazati da nad poljem  $\mathbf{GF}(3)$  polinomi  $P(x) = x + 1$  i  $Q(x) = 2x^3 + 2x + 1$  imaju iste vrednosti u svakoj tački polja.

## Kombinacija 14.

1. Neka je na traci TURINGove mašine broj 17 binarno kodiran i neka je glava za čitanje i pisanje na poziciji jedinice najveće težine. Šta je rezultat programa  $f$ :

$$\begin{aligned}f(q_0, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, 1) &= (q_1, 1, 1), \\f(q_1, 0) &= (q_1, 0, 1), \\f(q_1, b) &= (q_2, 0, 1), \\f(q_2, b) &= (q_+, 0, -1).\end{aligned}$$

2. Transformisati sledeću formulu u preneks normalan oblik:

$$(\forall x)(\forall y)\left((\exists u)Q(x, y, u) \implies (\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z))\right).$$

3. U aditivnoj grupi  $\mathbf{Z}_6 = (Z_6, +_6)$  odrediti red svakog elementa i generatore grupe.

## Kombinacija 15.

1. Izračunati vrednost  $f_3(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_3(x, y) = x^y$  ( $f_3(x, 0) = 1$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_2(x, y) = x \cdot y$ .

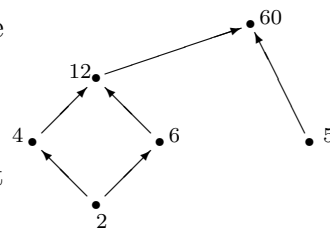
2. Odrediti skup sastavaka formule:

$$(\forall y)(\forall x)A(x, y) \implies (\exists x)(\forall y)A(x, y).$$

3. Na slici je prikazan HASSEov dijagram strukture  $(A, \rho)$ , gde je skup  $A = \{2, 4, 5, 6, 12, 60\}$ .

a) Ispitati da li je uredjen par  $(A, \rho)$  mreža.

b) Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture  $(A, \rho)$ .



## Kombinacija 16.

1. Izračunati vrednost  $f_5(4, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_6(x, y) = x \div y = \begin{cases} x-y & : x \geq y, \\ 0 & : x < y; \end{cases}$  ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_5(x) = x \div 1$ .

2. Primenom pravila izvođenja rezolucija iz sledećeg skupa sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{\neg A(x, y) \vee A(y, x), \neg A(x, y) \vee \neg A(y, z) \vee A(x, z), A(x, f(x))\}$$

izvesti sastavak  $A(x, x)$ .

3. Neka je  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  nacrtati HASSEov dijagram strukture  $(D, |)$ , gde je  $|$  relacija deljivosti prirodnih brojeva. Ispitati da li je uredjen par  $(D, |)$  mreža. Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture  $(D, |)$ .

## Kombinacija 17.

1. Predložiti jedan algoritam za sortiranje niza  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  realnih brojeva u neopadajući poredak. Za predloženi algoritam proceniti maksimalni broj zamena u nizu.

2. Ilustrovati kodiranje formula predikatskog računa na primeru sledeće formule:

$$(\forall x_1) R_1^2(x_1, a_2).$$

3. Neka je dat skup kodnih reči  $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}_2)^3$ . Za zadane tri kodne reči:  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  i  $C = (0, 0, 1)$  odrediti skup kodnih reči  $\mathcal{P}$  koji se sastoji od kodnih reči  $P \in \mathcal{C}$  takvih da za  $d_1 = d(A, P)$ ,  $d_2 = d(B, P)$  i  $d_3 = d(C, P)$  važi:

$$d_1 + d_2 > d_3 \quad \text{i} \quad d_2 + d_3 > d_1 \quad \text{i} \quad d_3 + d_1 > d_2.$$

## Kombinacija 18.

1. Neka je data regularna matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  i vektor  $b = [b_i] \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ . Odrediti maksimalni broj elementarnih operacija koji se koristi prilikom određivanja rešenja sistema  $Ax = b$ , ukoliko se rešenje traži po formuli  $x = A^{-1}b$ .

2. Odrediti skup sastavaka formule:

$$(\forall y)(\exists x)A(x, y) \implies (\exists x)(\exists y)A(x, y).$$

3. Neka je  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  nacrtati HASSEov dijagram strukture  $(D, |)$ , gde je  $|$  relacija deljivosti prirodnih brojeva. Ispitati da li je uredjen par  $(D, |)$  mreža. Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture  $(D, |)$ .

## Kombinacija 19.

1. Izračunati vrednost  $f_5(4, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_6(x, y) = x \div y = \begin{cases} x - y & : x \geq y, \\ 0 & : x < y; \end{cases}$  ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_5(x) = x \div 1$ .

2. Primenom pravila izvođenja rezolucija iz sledećeg skupa sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{A(a), B(x), \neg A(y) \vee \neg B(y)\}$$

izvesti prazan sastavak  $\square$ .

3. U multiplikativnoj grupi  $\mathbf{Z}_{11} = (Z_{11} \setminus \{0\}, \cdot_{11})$  odrediti red svakog elementa i generatore grupe.

## Kombinacija 20.

1. Izračunati vrednost  $f_2(2, 2)$  aritmetičke funkcije  $f_2(x, y) = x \cdot y$  ( $f_2(x, 0) = 0$ ), ukoliko pretpostavimo da je data aritmetička funkcija  $f_1(x, y) = x + y$ .

2. Primenom pravila izvođenja rezolucija iz sledećeg skupa sastavaka:

$$\mathcal{S} = \{\neg A(x, y) \vee A(y, x), \neg A(x, y) \vee \neg A(y, z) \vee A(x, z), A(x, f(x))\}$$

izvesti sastavak  $A(x, x)$ .

3. Na slici je prikazan HASSEov dijagram  $\mathcal{S}$ -mreže  $(A, \rho)$ , gde je skup  $A = \{0, a, b, c, 1\}$ . Formirati odgovarajuću  $\mathcal{A}$ -mrežu.

