

Универзитет у Београду
Електротехнички факултет

Семинарски рад
Задаци из дискретне математике

Професор:

Mr Бранко Малешевић

Илија Ивошевић

05/0150

Београд, 2007.

Комбинација 5

Задатак 1.

Израчунати вредност аритметичке функције $f_{10}(5)$, ако претпоставимо да је дата аритметичка функција $f_2(x, y)$.

Решење задатка.

Задатак решавамо под претпоставком да нам је дата аритметичка функција $f_2(x, y) = x \cdot y$ и да нам је познат скуп полазних функција. Скуп полазних функција чине:

- нула функција $N(x) = 0$
- следбеник функција $S(x) = x + 1$
- функција пројекције $U_i^n(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$

Користећи дату аритметичку функцију f_2 и функције из полазног скупа прво ћемо доказати да је аритметичка функција $f_{10}(x) = x!$ рекурзија:

По договору имамо да је $f_{10}(0) = 0! = 1$ (*const*).

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &= x! = x(x-1)! = f_2(x, f_{10}(x-1)) = \\ &= f_2(S \cdot U_1^2(x-1, f_{10}(x-1)), U_2^2(x-1, f_{10}(x-1))) = \\ &= f_2(S \cdot U_1^2 \cdot U_2^2)(x-1, f_{10}(x-1)) \\ &\rightarrow f_{10} = \text{rec}(1, f_2(S \cdot U_1^2 \cdot U_2^2)). \end{aligned}$$

На исти начин одредићемо и тражену аритметичку функцију $f_{10}(5)$:

$$\begin{aligned} f_{10}(5) &= 5 \cdot 4! = f_2(S \cdot U_1^2(4, f_{10}(4)), U_2^2(4, f_{10}(4))) \\ &= f_2(5, f_2(S \cdot U_1^2(3, f_{10}(3)), U_2^2(3, f_{10}(3)))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(S \cdot U_1^2(2, f_{10}(2)), U_2^2(2, f_{10}(2)))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(3, f_2(S \cdot U_1^2(1, f_{10}(1)), U_2^2(1, f_{10}(1))))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(3, f_2(2, f_2(S \cdot U_1^2(0, f_{10}(0)), U_2^2(0, f_{10}(0))))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(3, f_2(2, f_2(1, 1)))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(3, f_2(2, 1)))) \\ &= f_2(5, f_2(4, f_2(3, 2))) \\ &= f_2(5, f_2(4, 6)) \\ &= f_2(5, 24) \\ &= 120. \end{aligned}$$

Задатак 2.

Одредити скуп саставака формуле:

$$(\forall y)(\forall x)A(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)A(x, y).$$

Решење задатка.

У циљу одређивања саставака, дату предикатску формулу ћемо пребацити у пренекс нормалан облик, користећи следећи алгоритам:

1. корак: Извршава се презначавање свих везаних променљивих, тако да не постоје два квантификатора који везују исту променљиву. Добијамо:

$$(\forall y)(\forall x)A(x, y) \rightarrow (\exists u)(\forall v)A(u, v).$$

2. корак: Врши се елиминација импликације и еквиваленције на основу следећих правила:

$$\begin{aligned}A \rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \\ A \equiv B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).\end{aligned}$$

Добијамо:

$$\neg((\forall y)(\forall x)A(x, y)) \vee ((\exists u)(\forall v)A(u, v)).$$

3. корак: Врши се померање негације према релационим словима, користећи следеће законе:

$$\begin{aligned}\neg\neg A &\equiv A \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\ \neg(\forall x)A(x) &\equiv (\exists x)A(x) \\ \neg(\exists x)A(x) &\equiv (\forall x)A(x).\end{aligned}$$

Користећи наведене законе, добијамо:

$$\begin{aligned}((\exists y)\neg(\forall x)A(x, y)) \vee ((\exists u)(\forall v)A(u, v)) \\ ((\exists y)(\exists x)\neg A(x, y)) \vee ((\exists u)(\forall v)A(u, v)).\end{aligned}$$

4. корак: Квантификатори се помоћу везаних формула, по произвољном редоследу, извлаче у префикс формуле.

$$(\exists y)(\exists x)(\exists u)(\forall v)(\neg A(x, y) \vee A(u, v)).$$

деф: Саставак је дисјункција литерала.

На основу ове дефиниције, закључујемо да у датом примеру постоји само један саставак

$\neg A(x, y) \vee A(u, v)$, односно да је скуп саставака формуле

$$S = \neg A(x, y) \vee A(u, v).$$

Задатак 3.

У мултипликативној групи одредити $Z_{11} = (Z_{11} \setminus 0, \cdot_{11})$ ред сваког елемента и генераторе групе.

Решење задатка:

Скуп носилац мултипликативне групе Z_{11} је $Z_{11} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Одредићемо ред сваког од елемената групе:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \quad 1^1 = 1 \rightarrow r(e_1) = 1 \\ e_2 &= 2 \rightarrow r(e_2) = 10 \\ e_3 &= 3 \rightarrow r(e_3) = 5 \\ e_4 &= 4 \rightarrow r(e_4) = 5 \\ e_5 &= 5 \rightarrow r(e_5) = 5 \\ e_6 &= 6 \rightarrow r(e_6) = 10 \\ e_7 &= 7 \rightarrow r(e_7) = 10 \\ e_8 &= 8 \rightarrow r(e_8) = 10 \\ e_9 &= 9 \rightarrow r(e_9) = 5 \\ e_{10} &= 10 \rightarrow r(e_{10}) = 2. \end{aligned}$$

Генератори дате мултипликативне групе су:

$$G = \langle 2 \rangle, \quad G = \langle 6 \rangle, \quad G = \langle 7 \rangle, \quad G = \langle 8 \rangle.$$