

# Glava 1

## Interpolacija

### 1.1 Interpolacija

Osnovni problem interpolacije je egzistencija funkcije koja u tačkama  $x_k$  ima zadate vrednosti  $f_k$ . Tačke  $(x_k, f_k)$  nazivamo čvorovima interpolacije, a funkciju  $f$  interpolacionom funkcijom. Zbog jedinstvenosti polinomske funkcije, koja zadovoljava polazni uslov, najčešća intencija je da se formira funkcija polinomskeg tipa koja interpolira polaznu funkciju.

**Teorema 1.** Neka je funkcija  $f$  zadata u  $n + 1$  čvorova  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Tada postoji jedinstven polinom oblika

$$(1.1) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

takav da je

$$(1.2) \quad P_n(x_k) = f_k$$

**Dokaz.** Ako u jednkosti (1.1) zamenimo uslove (1.2) dobijamo sistem jednačina za određivanje koeficijenata  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , koji glasi

$$\begin{aligned} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n &= f_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_1 + a_n &= f_1 \\ &\vdots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_n + a_n &= f_n \end{aligned}$$

odnosno u matičnom zapisu

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Kako je determinantna ovog sistema VANDERMONDOVA, koja ima vrednost  $\prod_{i,j=0, i>j}^n (x_i - x_j) \neq 0$ , sistem ima jedinstveno rešenje, za koeficijente traženog polinoma.

## 1.2 LAGRANGEov interpolacioni polinom

Neka je funkcija  $f$  zadata u tačkama  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , vrednostima  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , pri čemu je  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ,  $(n+1)$  puta diferencijabilna.

Posmatrajmo pomoćne funkcije:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

kao i funkciju

$$p_i(x) = \frac{1}{x - x_i} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Lako se uočava da je  $p_i(x_k) = 0$  za  $i \neq k$ , odnosno  $p_i(x_k) = 1$ , za  $i = k$ . (Odnosno:  $p_i(x_k) = \delta_{ik}$ )

Funkcija

$$(1.3) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) f_i \equiv L_n(x), \text{ gde je } i = 0, 1, \dots, n$$

ima osobine da je  $P_n(x_k) = f_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), što znači da jednakost (1.3) predstavlja interpolacioni polinom funkcije  $f$ , koji nazivamo LAGRANGEovim interpolacionim polinomom.

## 1.3 Opšta formula za grešku interpolacije

Postavlja se pitanje greške pri izračunavanju vrednosti funkcije u nekoj međutački  $x$  pomoću njenog interpolacionog polinoma.

**Definicija 1.** Greška interpolacije je definisana izrazom

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

**Teorema 2.** Greška interpolacije funkcije  $f$  koja je  $(n + 1)$  puta diferencijabilna ima oblik:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

gde je  $M_{n+1} = \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$ , gde je  $a = \min\{x, x_0\}$ ,  $b = \max\{x, x_n\}$ .

**Dokaz.** Posmatrajmo pomoćnu funkciju

$$(1.4) \quad \varphi(s) = f(s) - P_n(s) - \frac{\Pi_{n+1}(s)}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

gde je  $x \neq x_k$  (ako je  $x = x_k$ , greška je 0).

Nije teško uočiti da su  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , kao i tačka  $x$ , nule funkcije  $\varphi(s)$ , jer je  $f(x_k) - P_n(x_k) = 0$  i  $\Pi_{n+1}(x_k) = 0$ . Dakle,  $\varphi(s)$  ima  $(n + 2)$  nule, odakle na osnovu ROLLEove teoreme o srednjoj vrednosti zaključujemo da postoji  $\varepsilon$  za koje važi

$$(1.5) \quad \min\{x_0, x\} < \varepsilon < \max\{x_n, x\}$$

i za koje je

$$(5') \quad \varphi^{(n+1)}(\varepsilon) = 0.$$

Diferenciranjem jednakosti (4) po promenljivoj  $s$  i to  $(n + 1)$  put dobijamo da je

$$(1.6) \quad \varphi^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - \frac{(n+1)!}{\Pi_{n+1}(x)} (f(x) - P_n(x))$$

jer je  $P_n^{(n+1)}(s) = 0$  (polinom stepena  $n$ ) i  $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(s) = (n+1)!$  (polinom stepena  $(n + 1)$  sa vodećim koeficijentom jednakim 1).

Zamenom  $s$  sa  $\varepsilon$  iz (6) dobijamo, zbog (5') da je

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

Kako je  $|f^{(n+1)}(\varepsilon)| \leq M_{n+1}$  tvrđenje je dokazano.

*Napomena:* Postavlja se pitanje da li tačka  $x$  u kojoj izračunavamo vrednost funkcije mora biti na intervalu  $[x_0, x_n]$ . Odgovor je „NE”. Ako je tačka unutar intervala reč je o interpolaciji, a ako je tačka van intervala reč je o ekstrapolaciji. U slučaju interpolacije jednakost (1.5) postaje  $x_0 < \varepsilon < x_n$ . Udaljavanjem tačke  $x$  od intervala povećava se greška računanja vrednosti funkcije.

## 1.4 Konačne razlike funkcije

Definišimo konačne razlike prvog reda (funkcija je zadata čvorovima  $(x_k, f_k)$ ):

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

Konačne razlike višeg reda definišemo induktivno:

$$\begin{aligned} \text{II reda: } \Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III reda: } \Delta^3 f_i &= \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\ &= f_{i+3} - f_{i+2} - 2f_{i+2} + 2f_{i+1} + f_{i+1} - f_i \\ &= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \end{aligned}$$

...

$$n\text{-tog reda: } \Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i)$$

Osobine konačnih razlika:

$$1) \Delta(f_k - f_j) = \Delta f_k - \Delta f_j$$

$$2) \Delta(C \cdot f_k) = C \cdot \Delta f_k$$

Definisane konačne razlike neki autori nazivaju i konačnim razlikama unapred. Konačne razlike unazad, u iznaci  $\nabla^k f_j$  mogu se definisati pomoću navedenih, sa  $\nabla^k f_j = \Delta^k f_{j-k}$ , te je u pitanju samo druga notacija.

## 1.5 NEWTONOVI interpolacionu polinomi

Neka je funkcija  $f$  zadana čvorovima  $(x_k, f_k)$  koji su ekvidistantni, tj.  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .

**I NEWTONov interpolacioni polinom** je polinom oblika:

$$(1.7) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

gde su  $a_0, a_1, \dots, a_n$  koeficijenti koje treba odrediti. Kako mora važiti  $P_n(x_k) = f_k$ . Uzimajući da je  $x = x_0$  dobijamo da je  $a_0 = f_0 = \frac{\Delta^0 f_0}{0!h^0}$ . Nastavljajući postupak za  $x = x_1$  imamo da je  $a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$  odakle zbog  $x_1 - x_0 = h$  dobijamo da je  $a_1 = \frac{f_1 - f_0}{h}$ , odnosno  $a_1 = \frac{\Delta^1 f_0}{1!h^1}$ . Slično za  $x = x_2$  nalazimo da je  $f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{h}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$  odakle imajući u vidu da je  $x_2 - x_0 = 2h$  i  $x_2 - x_1 = h$  dobijamo da je  $a_2 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$ . Indukcijom dobijamo da je:

$$a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Dakle, I NEWTONov interpolacioni polinom ima oblik:

$$(1.8) \quad N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

odnosno, uvodeći smenu  $\frac{x-x_0}{h} = u$ , imamo da je:

$$N_I(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}u(u-1) \dots (u-n+1).$$

**Napomena:**  $N_I(x)$  je dobro primeniti u slučaju kada se tačka  $x$  nalazi u prvoj polovini intervala  $[x_0, x_n]$ .

**II NEWTONov interpolacioni polinom** je oblika:

$$(1.9) \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n) \dots (x - x_1),$$

gde su  $a_0, a_1, \dots, a_n$  koeficijenti koje treba odrediti. Uzimajući da je  $x = x_n$  dobijamo da je  $a_0 = f_n$ , zatim za  $x = x_{n-1}$  nalazimo da je  $a_1 = \frac{\Delta f_{n-1}}{1!h^1}$ . Za  $x = x_{n-2}$  dobijamo da je  $a_2 = \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!h^2}$ . Indukcijom zaključujemo da je  $a_n = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$ .

Dakle,

$$N_{II}(x) = f_n + \frac{\Delta^1 f_{n-1}}{1!h^1}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_n) \dots (x - x_1),$$

odnosno uzimajući smenu  $v = \frac{x-x_n}{h}$  dobijamo da je:

$$N_{II}(x) = f_n + \frac{\Delta^1 f_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!}v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}v(v+1) \dots (v+n-1).$$

Postavlja se pitanje greške kod NEWTONovih interpolacionih polinoma? Greška je ista kao kod uopštene interpolacije. Ako nije poznat analitički oblik funkcije tada izraz  $f^{(n+1)}(\xi)$  treba zameniti sa  $\frac{\Delta^{n+1}(\xi)}{h^{n+1}}$ , gde je  $\Delta^{n+1}(\xi)$  maksimalna vrednost, po apsolutnoj vrednosti, konačne razlike  $(n+1)$  reda.

## 1.6 Tablice konačnih razlika i greške u njima

Pretpostavljamo da je tabeliran polinom  $n$ -tog stepena. Tada konačne razlike reda  $n+1, n+2, \dots$  moraju biti 0, jer bi u suprotnom polinom  $n$ -tog stepena mogao da se aproksimira polinomom većeg stepena od  $n$ , što je nemoguće.

**Zadatak:** Polinom  $p_3(x)$  tabeliran je na sledeći način:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p_3(x)$	-20	-5	1	1	4	15	40	85	156

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, odrediti taj podatak i odrediti polinom  $p_3(x)$ .

**Rešenje:** Konačne razlike funkcije predstavljene su u sledećoj tablici

$x$	$p_3(x)$	$\Delta p_3$	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-9	3	6
-2	-5	6	-6	9	-4
-1	$0 \leftarrow 1$	$1 \leftarrow 0$	$2 \leftarrow 3$	$6 \leftarrow 5$	1
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Pretpostavljamo da je tablica za  $x = 0$  i  $x = 1$  tačna jer je  $\Delta^4 p_3 = 0$ . Na dobijene nule utiču vrednosti  $p_3(x)$  u tačkama 0, 1, 2, 3, 4 i 5 te pretpostavljamo da su one tačne.

Prva vrednost funkcije koja utiče na dobijenu jedinicu u poslednjoj koloni je vrednost u tački  $x = -1$  i pretpostavljamo da je ona netačna. Ispravljajući unazad tablicu dobijamo da je  $p_3(-1) = 0$ . Tako ispravljeno dobijamo da je

$x$	$p_3(x)$	$\Delta p_3$	$\Delta^2 p_3$	$\Delta^3 p_3$	$\Delta^4 p_3$
-3	-20	15	-10	6	0
-2	-5	5	-4	6	0
-1	0	1	2	6	0
0	1	3	8	6	0
1	4	11	14	6	0
2	15	25	20	6	
3	40	45	26		
4	85	71			
5	156				

Formirajmo NEWTONov interpolacioni polinom

$$\begin{aligned}
 N_I(x) &= -20 + 15(x+3) - 5(x+3)(x+2) + (x+3)(x+2)(x+1) \\
 &= -20 + 15x + 45 - 5x^2 - 25x - 30 + x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
 &= x^3 + x^2 + 1 \equiv p_3(x)
 \end{aligned}$$

## 1.7 Pitanje inverzne interpolacije

Postavlja se pitanje određivanja originala, ako je poznata vrednost funkcije. Suština je da se iz interpolacionog polinoma izvede iterativni proces koji konvergira.

**Zadatak:** Funkcija  $y = f(x)$  data je tablicom. Odrediti  $x$  za koje je  $f(x) = 2$ .

**Rešenje:**

$k$	$x_k$	$f_k$	$\Delta f_k$	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	0.75	2.11700	0.22265	0.02335	0.00253
1	0.85	2.33965	0.24606	0.02588	0.00272
2	0.95	2.58571	0.27194	0.02860	
3	1.05	2.85765	0.30054		
4	1.15	3.15819			

Kako  $2 \in [1.191554, 2.11700] \Rightarrow x \in [0.65, 0.75]$  te ćemo uzeti I NEWTONov interpolacioni polinom za  $h = 1$  i  $u = \frac{x-0.65}{0.1}$ ,

$$N_I(x) = 1.91554 + \frac{0.20146}{1!}u + \frac{0.02119}{2!}u(u-1) + \frac{0.00216}{3!}u(u-1)(u-2) = 2$$

Formirajmo iterativni proces:

$$u = \frac{1}{0.20146} \left[ 2 - 1.91554 - \frac{0.02119}{2}u(u-1) - \frac{0.00216}{6}u(u-1)(u-2) \right]$$

odnosno  $u = 4.96376[0.08446 - 0.00106u(u-1) - 0.0036u(u-1)(u-2)]$ .

Polazeći od  $u_0 = 0$  dobijamo niz iteracija

$$u_1 = 0.41924;$$

$$u_2 = 0.43136;$$

$$u_3 = 0.43146;$$

$$u_4 = 0.43146 \Rightarrow x = 0.1u + 0.65 \Rightarrow x = 0.69315$$

**Napomena:** Ovo je praktično tablica funkcije  $f(x) = e^x$ , dok je vrednost izraza  $\ln 2$ .