

Grupe zadataka za Semestralne radove tipa B iz bloka Numerička analiza (Matematika 4)

UPUTSTVO ZA ODABIR SEMESTRALNOG RADA: U prvom delu dokumenta su date tri vrste zadataka. Iza spiska zadataka data je tabela kombinacija zadataka npr. B1(1,3,20) što znači da student koji odabere kombinaciju B1 radi zadatak 1. iz prvog dela Numerička interpolacija i diferenciranje, zadatak 3. iz drugog dela Numerička integracija i zadatak 20. iz trećeg dela Sistemi linearnih jednačina i nelinearne jednačine.

Preporučuje se korišćenje nekog od matematičkih programskih alata (MAPLE, MATLAB, MATHEMATICA, DERIVE) za izradu zadataka. Semestralni rad treba da sadrži i kod koji je korišćen za izračunavanja, i grafike ukoliko je to od koristi.

Studenti prijavljuju semestralni rad na mail studenta demonstratora Predraga Gušavca gp@etf.bg.ac.yu sa podacima ime, prezime, broj indeksa i željena kombinacija. Semestralni rad je prijavljen kada dobijete povratnu informaciju na mail da je prijava prihvaćena.

Jednu kombinaciju može da prijavi najviše 4 studenta. Spisak kombinacija za koje je završeno prijavljivanje nalaziće se na sajtu <http://numer.etf.bg.ac.yu>.

I. Numerička interpolacija i diferenciranje

1. Funkciju $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ tabelirati na $[0, 1]$ sa korakom $h = 0.1$ na 5 decimala. Zatim, inverznom interpolacijom, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, rešiti jednačinu

$$f(x) = 1.2.$$

2. Odrediti maksimalan korak h numeričkog diferenciranja po formuli:

$$f'(x_0 + \frac{2h}{3}) = \frac{y_2 - y_0}{2h},$$

za $y_i = f(x_i)$.

3. Tablicom je zadana funkcija $f(x)$

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
$f(x)$	0.901951	0.978432	1.052661	1.124724	1.194703	1.262688	1.328751

Inverznom interpolacijom izračunati x za koje je $f(x) = 1$.

4. Funkciju $f(x) = \ln x \cdot \cos 2x$ tabelirati na $[1, 3.7]$ sa korakom $h = 0.3$ sa 5 decimala. Zatim, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, naći obe koordinate maksimuma funkcije $f(x)$.

5. Naći optimalan korak h za numeričko diferenciranje po formuli

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0)],$$

pri čemu su vrednosti funkcije određene u ekvidistantnim čvorovima.

6. Funkcija $f(x)$ je data tabelom:

x	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9
$f(x)$	-0.00375	0.00471	0.011729	0.017627	0.022641	0.026946	0.030673

Inverznom interpolacijom naći nulu funkcije $f(x)$.

7. Polinom trećeg stepena dat je tablicom vrednosti u čvorovima

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$P_3(x)$	-24	-6	0	-2	0	6	24	60	120

Ako se zna da je jedna vrednost pogrešno izračunata, ispraviti grešku i napisati eksplicitni izraz za polazni polinom.

8. Funkcija je zadana tabelom

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	1.71828	1.79417	1.88012	1.97930	2.09520	2.23169

Koristeći konačne razlike, zaključno sa četvrtim redom, izračunati $f(1.43)$ i proceniti grešku.

9. Primenjujući inverznu interpolaciju rešiti jednačinu $7f(x) = 23$, za funkciju $f(x)$, koja je zadana tabelom

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	2.62188	2.79665	2.95358	3.09518	3.22383	3.34138	3.44926	3.54864

10. Odrediti maksimalan korak h numeričkog diferenciranja po formuli

$$f'(x_0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$

za $y_i = f(x_i)$.

11. Odrediti maksimalan korak h za numeričko difrenciranje po formuli

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}.$$

12. Funkciju $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{4-x}$ tabelirati na intervalu $[2.1, 2.8]$ na 4 decimale sa korakom $h = 0.1$. Koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, izračunati $f(2.15)$ i proceniti grešku.

13. Funkcija $f(x)$ je data tabelom:

x	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	2.1272	1.5167	1.7044	3.3285	5.0229	7.2814

Uz pomoć inverzne interpolacije približno odrediti tačku ekstremuma funkcije $f(x)$, a zatim i vrednost funkcije u toj tački.

14. Funkciju $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ tabelirati na $[0, 2]$ sa korakom 0.2 sa 5 decimala. Zatim, koristeći konačne razlike zaključno sa četvrtim redom, rešiti jednačinu

$$f'(x) = 0.5.$$

II. Numerička integracija

1. Odrediti A, B i x_1 tako da kvadratura formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A(f(-1) + f(1)) + B(f(-x_1) + f(x_1)) + R(f),$$

ima što je moguće veću tačnost, a zatim proceniti grešku $R(f)$.

2. Odrediti brojeve A, B, C i x_1 tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = Af(0) + Bf(x_1) + Cf(1) + R(f)$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule.

3. Izvesti kvadraturu formulu oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(-1) + A_2 f(-\sqrt{\frac{3}{7}}) + A_3 f(0) + A_4 f(\sqrt{\frac{3}{7}}) + A_5 f(1) + R(f),$$

tako da ona bude tačna za polinome što je moguće višeg stepena, a zatim proceniti grešku $R(f)$ tako dobijene formule.

4. Radeći sa sedam decimala, Simpson-ovom formulom, izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x}.$$

5. Metodom po izboru odrediti vrednost integrala

$$\int_{-2}^1 \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} dx,$$

sa tačnošću 10^{-4} .

6. Sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$, izračunati vrednost integrala

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x^3} dx.$$

7. Izračunati, sa tačnošću 10^{-4} , integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{1+x} dx.$$

8. Sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$, izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

9. Izvesti kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f),$$

gde su x_1 i x_2 i x_3 nule Ležandrovog polinoma trećeg stepena, tako da ona bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i proceniti grešku. Primenjujući dobijeni rezultat odrediti vrednost integrala $\int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \cos x dx$.

10. Odrediti brojeve A , B i C tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx = A f(1/4) + B f(1/2) + C f(3/4) + R(f)$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule.

11. Izračunati trapeznom i Simpsonovom metodom, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, integral

$$\int_0^3 \frac{dx}{3-2\sin x}$$

12. Odrediti brojeve A, B, C i a tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A(f(a) + f(-a)) + B f(0) + C f''(0) + R(f),$$

bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena i odrediti stepen tačnosti dobijene formule. Primenjujući dobijeni rezultat odrediti vrednost integrala $\int_1^2 x^x \sin x dx$.

13. Izračunati sa tačnošću 10^{-4}

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

III. Sistemi linearnih jednačina i nelinearne jednačine.

1. Metodom LU dekompozicije rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 8.30x_1 + 2.62x_2 + 4.10x_3 + 1.90x_4 &= -10.65 \\ 3.92x_1 + 8.45x_2 + 7.78x_3 + 2.46x_4 &= 12.210 \\ 3.77x_1 + 7.21x_2 + 8.04x_3 + 2.28x_4 &= 15.450 \\ 2.21x_1 + 3.65x_2 + 1.69x_3 + 6.99x_4 &= -8.350 \end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

2. Gauss–Seidel-ovom metodom rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17 \\0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36 \\0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.12 \\0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48\end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

3. Metodom LU dekompozicije naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.19 & 0.89 \\ 0.19 & 1.36 & 0.19 \\ 0.89 & 0.19 & 1.47 \end{bmatrix}$$

radeći sa pet decimala.

4. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem:

$$\begin{aligned}0.83x_1 - 0.10x_2 - 0.11x_3 - 0.12x_4 &= 1 \\-0.13x_1 + 0.85x_2 - 0.10x_3 - 0.11x_4 &= 2 \\-0.11x_1 - 0.12x_2 + 0.88x_3 - 0.10x_4 &= 3 \\-0.10x_1 - 0.11x_2 - 0.12x_3 + 0.86x_4 &= 4\end{aligned}$$

5. Sa tačnošću 10^{-3} Gauss–Seidel-ovom i Jakobi-jevom metodom rešiti sistem

$$\begin{aligned}2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 &= 2.1 \\3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 &= 1.7 \\4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 &= 0.8\end{aligned}$$

6. Gauss-ovom metodom sa izborom glavnog elementa, naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.63 & 1.44 \\ 1.64 & -0.83 & -2.45 \\ 0.58 & 1.55 & 3.18 \end{bmatrix}$$

radeći sa pet decimala.

7. Koristeći metodu LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, naći inverznu matricu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.1 & 1.0 \\ 1.2 & 4.1 & 1.1 \\ 0.1 & 0.9 & 3.7 \end{bmatrix}$$

8. Numeričkom metodom po izboru, rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}1.7x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 &= 2.35 \\1.1x_1 + 1.6x_2 - 1.9x_3 &= -0.94 \\2.7x_1 - 2.2x_2 + 1.5x_3 &= 2.70\end{aligned}$$

9. Jacobi-jevom metodom rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}2.46x_1 + 0.28x_2 + 0.26x_3 &= 0.76 \\0.38x_1 + 3.57x_2 + 0.36x_3 &= 1.72 \\0.50x_1 + 0.48x_2 + 4.68x_3 &= 3.11\end{aligned}$$

10. Gauss-ovom metodom sa izborom glavnog elementa odrediti inverznu matricu matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

11. Izračunati vrednost determinante, radeći sa 5 decimala:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1.46 & 1.41 & 1.29 & 1.43 \\ 1.21 & 2.40 & 2.18 & 2.48 \\ 0.29 & 1.19 & 2.14 & 2.33 \\ 1.19 & 1.61 & 2.70 & 5.46 \end{vmatrix}$$

12. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}8x_1 + 7x_2 - x_3 &= 13 \\6x_1 + 2.5x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\3x_1 + 4x_2 + 6.1x_3 - 2x_4 &= 3 \\x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 7\end{aligned}$$

13. Metodom LU dekompozicije, računajući sa 5 decimala, rešiti sistem

$$\begin{aligned}20x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= 1 \\7x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 3 \\8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 5 \\7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 7\end{aligned}$$

14. Metodom LU dekompozicije rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}2.0x_1 - 4.0x_2 - 3.25x_3 + 1.0x_4 &= 4.84 \\3.0x_1 - 3.0x_2 - 4.3x_3 + 8.0x_4 &= 8.8 \\1.0x_1 - 5.0x_2 + 3.3x_3 - 20.0x_4 &= -14.05 \\2.5x_1 - 4.0x_2 + 2.0x_3 - 3.0x_4 &= -20.09\end{aligned}$$

radeći sa 5 decimala.

15. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, odrediti sva rešenja jednačine:

$$\operatorname{ch}(2x) = 2e^x$$

16. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću 10^{-5} naći sva rešenja jednačine

$$\operatorname{sh}(x^2) + x - 1 = 0$$

17. Metodom sečice sa tačnošću $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$\operatorname{ch}x + x - 2 = 0.$$

18. Radeći sa pet decimala izračunati dva rešenja jednačine

$$x(1 + \cos x) = 1.$$

19. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$15x - 10\operatorname{sh}x = 1$$

proizvoljno odabranom metodom.

20. Sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, primenjujući dva različita metoda rešiti jednačinu:

$$(1 + x^2)e^x = 10.$$

21. Primenjujući dve različite metode, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, odrediti sva pozitivna rešenja jednačine:

$$6 \sin x = x^3 + 0.2.$$

22. Primenjujući dve različite metode sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, odrediti sva rešenja jednačine

$$3^x = 2x + 2.$$

23. Njutnovom metodom, sa tačnošću 10^{-5} , naći sva rešenja jednačine:

$$x^3 - 3.5x^2 - 4x + 0.5 = 0.$$

24. Odrediti najmanji pozitivan koren jednačine

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{th}x = 0,$$

radeći sa pet decimala.

SPISAK KOMBINACIJA ZA IZBOR:

Kombinacija	I	II	III
B1	1	3	20
B2	2	5	10
B3	3	7	15
B4	4	9	8
B5	5	11	22
B6	6	13	1
B7	7	1	21
B8	8	2	2
B9	9	4	16
B10	10	6	1
B11	11	8	17
B12	12	10	3
B13	13	12	18
B14	14	3	6
B15	1	11	19
B16	2	13	8
B17	3	1	23
B18	4	3	10
B19	5	5	24
B20	6	7	2
B21	7	9	15
B22	8	10	3
B23	9	12	20
B24	10	2	6
B25	11	4	21
B26	12	6	4
B27	13	8	23
B28	14	7	5
B29	1	9	22
B30	2	11	7
B31	3	13	24
B32	4	1	9
B33	5	3	12
B34	6	5	16
B35	7	6	17
B36	8	8	18
B37	9	10	19
B38	10	12	13
B39	11	2	6
B40	12	4	1
B41	13	6	5
B42	14	8	20