

Matematika 1 - Prvi kolokvijum

06.12.2003.

Grupa 2.

Pogledati rešenja odgovarajućih zadataka grupe 1.
Ovde dajemo samo konačne rezultate.

1. [5] Izračunati $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin(\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Trazeni limes jednak je $\arcsin(\frac{1}{2})$ tj. $\frac{\pi}{6}$.

2. [5] Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} + \sqrt[3]{1+3x} - 2}{\sqrt[6]{1+6x} - 1}$.

Trazeni limes jednak je $\frac{6}{5}$.

3. [5] Ispitati ograničenost i monotonost niza čiji je opšti član

$$b_n = \frac{5}{5+1} + \frac{5}{5^2+2} + \dots + \frac{5}{5^n+n}.$$

Niz je monotonno rastući i ograničen: $(\forall n) \ 0 < b_n < \frac{5}{4}$.

4. [5] Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{\cos 1 \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{1}{n}}$.

Primenom teoreme Štolca dobija se da je limes jednak 0.

5. [5] Odrediti realne brojeve c i d tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ cx + d, & x > 2 \end{cases}$ bude diferencijabilna u tački $x = 2$.

$$c = 4, \quad d = -4.$$

6. [5] Odrediti parametar n tako da prava $y = x + n$ bude tangenta krive $y = \frac{x}{x+4}$.

$$n = 1 \quad \text{ili} \quad n = 9.$$

7. [10] Odrediti oblast definisanosti funkcije $f(x) = \sqrt{-\arcsin(\log_{\frac{1}{2}}|x|)}$.

$$x \in [-2, -1] \cap [1, 2].$$

8. [10] Odrediti asimptote funkcije $f(x) = x \ln \frac{2x}{x+1}$.

Prava $x = -1$ je vertikalna asimptota.

Prava $y = x \ln 2 - 1$ je obostrana kosa asimptota funkcije.

9. [10] Odrediti intervale monotonosti, lokalne ekstremne vrednosti, konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije $f(x) = \frac{|x-1|}{(x+1)^3}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2-x)}{(x+1)^4}, & x > 1 \\ \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}, & x < 1 \end{cases}$$

$f'(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$. Tada $f(x)$ monotonno opada.

$f'(x) \geq 0$ za $x \in (1, 2]$. Tada $f(x)$ monotonno raste.

Zbog toga je tačka $(1, f(1))$ tačka lokalnog minimuma funkcije, a tačka $(2, f(2))$ je tačka lokalnog maksimuma.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6(x-3)}{(x+1)^5}, & x > 1 \\ \frac{6(3-x)}{(x+1)^5}, & x < 1 \end{cases}$$

$f''(x) \geq 0$ za $x \in (1, 3]$.

$f''(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

Prevojne tačke su tačke $(1, 0)$ i $(3, \frac{1}{32})$.