

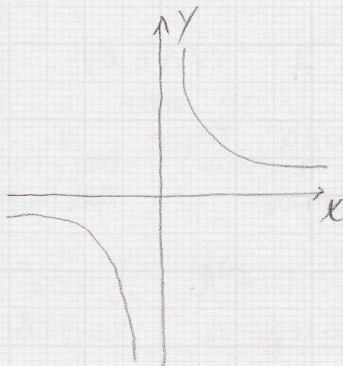
① Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и D је симетричан скуп (тј. заједно са тачком x у домену D налази се и тачка $-x$) и ако $(\forall x \in D) f(-x) = f(x)$ - тада за f кажемо да је парна функција, а ако:

$(\forall x \in D) f(-x) = -f(x)$ - тада за f кажемо да је непарна функција.

Пример

$y = x^2$ - парна

$y = \frac{1}{x}$ - непарна

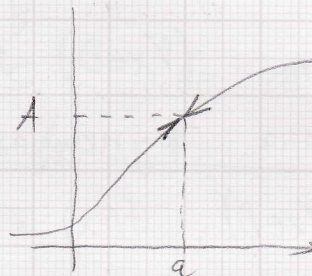
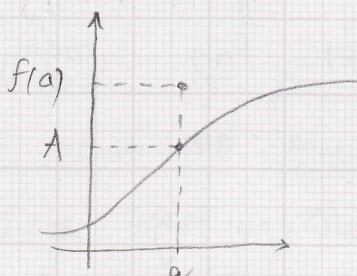
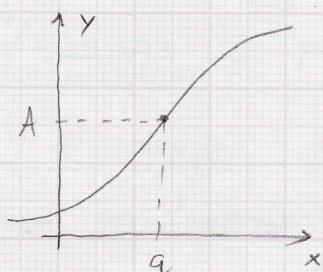


①: Ако постоји реални број $T \neq 0$ тако да:

$$(\forall x \in D) f(x+T) = f(x)$$

тада кажемо да је f периодична функција са периодом T .

- Елементарне функције -



Када $x \rightarrow a$ тада $f(x) = ?$

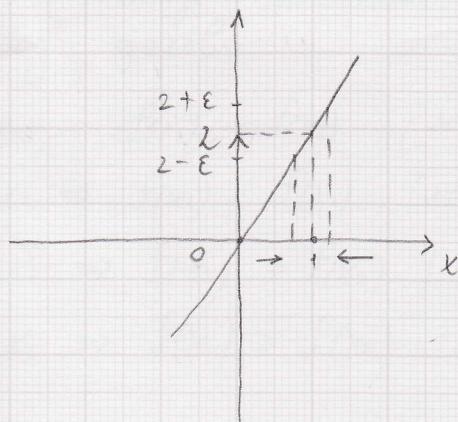
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$), јер за сваку ε околину тачке A постоји δ околна тачке a која се сва изабр еверуално тачке a функцијом f преликава у ε околину тачке A .

Δ : Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и f дефинисана у некој околини тачке a изабр, монса у a . функција f има, у тачки a граничну вредност $A \in \mathbb{R}$ (ознака $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$) ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \in D) (x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon))$$

Напомена: Може се показати (као и код кизба) ε у горњој дефиницији може да се замени са $C \cdot \varepsilon$, где је C произвољна константа.

Задатак



$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Доказ

Изаберемо произвољно $\varepsilon > 0$. Да ли постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да

$$x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow f(x) \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon \rightarrow \begin{matrix} x \rightarrow 1 \\ x \neq 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} |f(x)-2| < \varepsilon \\ |2x-2| < \varepsilon \end{matrix}$$

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|2x-2| < \varepsilon$$

$$2|x-1| < \varepsilon$$

$$|x-1| < \boxed{\frac{\varepsilon}{2}} \delta(\varepsilon)$$

$$(\forall x) |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

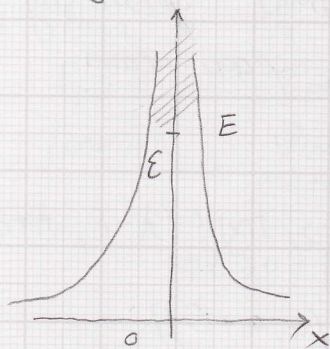
①: Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и нека је f дефинисана у некој околини тачке a , изузев, можда у a .

Гранична вредност функције f у тачки a је $+\infty$

(ознака $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$) ако:

$$(\forall E > 0) (\exists \delta(E) > 0) (\forall x \in D) (x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) > E) \\ (|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > E)$$

Задача



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Доказ

Изаберемо произвољно $E > 0$

$$\delta(E) = ? \quad x \in (0-\delta, 0+\delta) \Rightarrow f(x) > E$$

$$\delta(E) = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$f(x) > E$$

$$\frac{1}{x^2} > E$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{E}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\Leftrightarrow |x-0| < \frac{1}{\sqrt{E}} \} \delta(E)$$

Ⓜ: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = -\infty$ ако:

$$(\forall s > 0) (\exists \delta(s) > 0) (\forall x \in D) (x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) < s)$$

$$(|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < s)$$

Лева гранична вредност функције f

Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и нека постоји неки интервал лево од тачке a $(a - \theta, a)$ у коме је f дефинисана.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$$

$$\text{ако } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \in D \cap (a - \theta, a), (x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)))$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty \text{ ако } (\forall E > 0) (\exists \delta(E) > 0) (\forall x \in D \cap (a - \theta, a))$$

$$(x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > E)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty \text{ ако } (\forall s < 0) (\exists \delta(s) > 0) (\forall x \in D \cap (a - \theta, a))$$

$$(x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < s)$$

Десна гранична вредност функције f

Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и нека постоји интервал десно од тачке a , $(a, a + \theta)$, у коме је функција f дефинисана.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \text{ ако:}$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \in D \cap (a, a + \theta)) (x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon))$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty \text{ ако: } (\forall E > 0) (\exists \delta(E) > 0) (\forall x \in D \cap (a, a + \theta))$$

$$(x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > E)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \text{ ако: } (\forall s < 0) (\exists \delta(s) > 0) (\forall x \in D \cap (a, a + \theta))$$

$$(x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < s)$$

Важно: (из дефиниција лево)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ако и само ако} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

($A \in \bar{\mathbb{R}}$)

Задатак

Одреди $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{не постоји}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{не постоји}$$

①: Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека скуп D није ограничен одозго.
 Гранична вредност функције f кад $x \rightarrow +\infty$ је $A \in \mathbb{R}$
 (ознака $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$) ако:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists k(\varepsilon) > 0) (\forall x \in D) \left(x > k \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right)$$

$x \in (k, +\infty)$

②: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ако:

$$(\forall E > 0) (\exists k > 0) (\forall x \in D) \left(x \in (k, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (E, +\infty) \right)$$

$(x > k \Rightarrow f(x) > E)$

Ⓐ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ако:

$$(\forall s < 0) (\exists k > 0) (\forall x \in D) (x \in (k, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (s, -\infty))$$

$$(x > k \Rightarrow f(x) < s)$$

Ⓐ: Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и D је скуп који није ограничен одозго. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$) ако:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists k(\varepsilon) < 0) (\forall x \in D) (x < k \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Ⓐ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ако:

$$(\forall E > 0) (\exists k < 0) (\forall x \in D) (x \in (k, -\infty) \Rightarrow f(x) \in (E, +\infty))$$

Ⓐ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ако:

$$(\forall s < 0) (\exists k < 0) (\forall x \in D) (x \in (k, -\infty) \Rightarrow f(x) \in (s, -\infty))$$

$$(x < k \Rightarrow f(x) < s)$$

Ⓙ: Хајнеова теорема

Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ и нека је f дефинисана у некој околини тачке a , изузев можда у самој тачки a

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($A \in \bar{\mathbb{R}}$) ако и само ако за сваки низ

(x_n) ($x_n \neq a$, $n > n_0$) који тежи a (тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$)

одговарајући низ $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots = (f(x_n))$ тежи A .

Пример:

1) Користити Хајнеову теорему доказати:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{7}{2}, \text{ где је } f(x) = \frac{2x+5}{5x-1}$$

Изабралимо произвољан низ (x_n) тако да $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

$(f(x_n))$

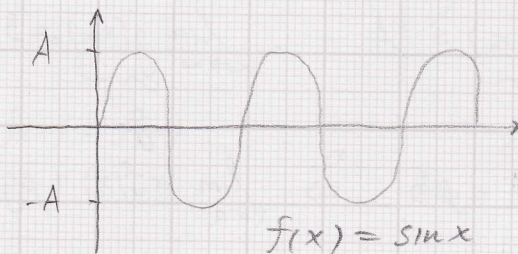
$$f(x_n) = \frac{2 \cdot x_n + 5}{3 \cdot x_n + 1}$$

Да ли је $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{7}{2}$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + 5}{3x_n + 1} = \frac{7}{2}$$

Због производа низа $(x_n) \xrightarrow{\text{X.T.}} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{7}{2}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ не постоји



(x_n)

$$x_n = n \cdot \bar{u}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{u} = +\infty$$

$(f(x_n))$

$$f(x_n) = \sin n \bar{u} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

(x_n)

$$x_n = \frac{\bar{u}}{2} + 2n\bar{u}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{u}}{2} + 2n\bar{u} \right) = +\infty$$

$(f(x_n))$

$$f(x_n) = \sin \left(\frac{\bar{u}}{2} + 2n\bar{u} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$$

ДОМАЋИ

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ не постоји

Рачунске операције са граничним вредносним функција

попир

(T₂) а) Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ($A, B \in \mathbb{R}$) и ако су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$$

доказ: Узaberимо произвољни низ (x_n) ($x_n \neq a$, за $n > n_0$)

такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$f(x_n) \rightarrow A \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{f_n} = A \quad \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{g(x_n)}_{g_n} = B$$

$$\text{Тада} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f_n + \beta g_n) \stackrel{(\text{T})}{=} \alpha A + \beta B \quad \xrightarrow{\text{х.т.}} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha A + \beta B$$

Неодређени изрази:

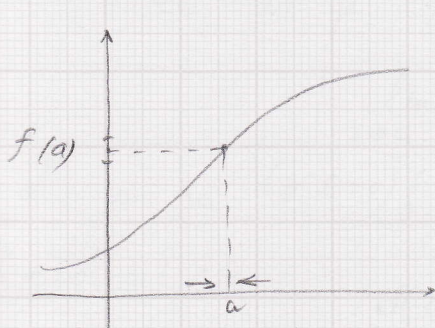
$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Непрекидност реалне функције

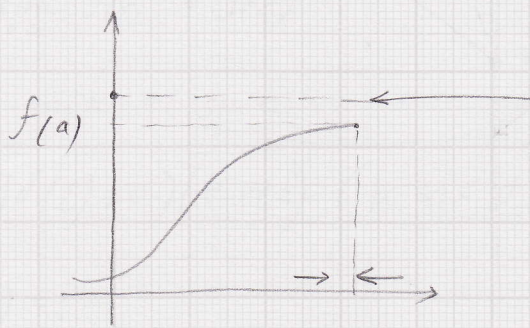
①: Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ и $a \in D$ и нека је f дефинисана у некој околини тачке a .

Функција f је непрекидна у тачки a ако

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ не постоји}$$

није непрекидна у тачки a

②: Ако је $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ кажемо да је f непрекидна са леве стране у тачки a .

Ако је $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ кажемо да је f непрекидна са десне стране у тачки a .

f је непрекидна у тачки a ако и само ако је f непрекидна и са леве и са десне стране у тачки a .

③: Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на скупу S ($S \subseteq D$) ако је f непрекидна у свакој тачки скупа S .

Напомена:

$$f \text{ је непрекидна у тачки } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$$

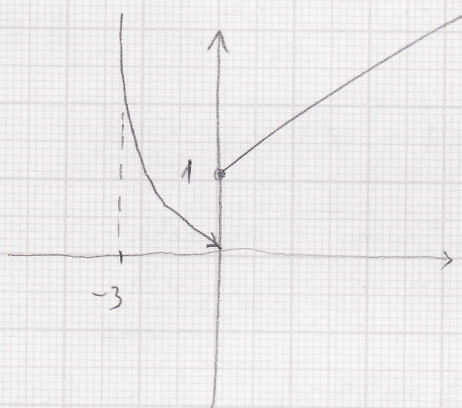
(инверзија f и \lim)

Испитати непрекидност функције f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

1) у тачки $a = -3$

2) у тачки $a = 0$



1) $a = -3$

да ли је $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$$

\Rightarrow f је непрекидна у тачки $a = -3$

2) $a = 0$

да ли је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ не постоји}$$

$\Rightarrow f$ није непрекидна у тачки $a = 0$.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+1} f(x) = 1$$

$\Rightarrow f$ је непрекидна са десне стране у тачки $a=0$

Ⓙ: Све основне елементарне функције непрекидне су на демену на коме су дефинисане.

Доказ: $f(x) = \sin x$ - дефинисана на \mathbb{R}
и непрекидна

$$\text{да ми је } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \right|$$

$$\text{да ми за } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (|x-a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon)$$

Изаберемо $\varepsilon > 0$

$$\delta(\varepsilon) = ?$$

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} \cdot 1$$

$$(\forall t \in \mathbb{R}) |\sin t| \leq |t|$$

$$|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$|x-a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

Ⓙ: $a \in \mathbb{R}$ је тачка прекида функција f ако $a \notin D$ (D је демен функције f) или ($a \in D$ и функција f није непрекидна у тој тачки a).

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
не постоји

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ постоји
али $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Ⓙ: Нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка прекида функције f . Кажемо да је a тачка прекида I врсте ако су лева и десна гранична вредности функције f у тачки a коначне.

Свака друга тачка прекида због се прекид II врсте

Примери:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \text{није} \\ \text{дефинисано}, & x = 1 \end{cases}$$

$a=1$ је тачка прекида функције

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \quad (\text{прекид I врсте})$$

2) $y = \frac{1}{x}$ није дефинисано у тачки $a=0$
прекид

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{II врсте}$$

$$3) g(x) = \begin{cases} x, & \text{за } x \neq 1 \\ 2, & \text{за } x = 1 \end{cases}$$

$a=1$ је прекид функције f

$$\lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 \quad (\text{I врсте})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} x = 1$$

$$4) y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$a=0$ је тачка прекида
(II врста)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не постоји

Ⓙ: Ако су функције f и g непрекидне у тачки a (на скупу S) тада су функције $\alpha f(x) + \beta g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\left(\begin{matrix} g(x) \neq 0 \\ g(a) \neq 0 \end{matrix} \right)$ непрекидне функције у тачки a (непрекидне на скупу S)

Доказ:

$$A = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x))$$

$$B = g(a)$$

Ⓙ: Нека је функција: $h(x) = g(x) \circ f(x) = f(g(x))$ дефинисана у некој околини тачке $a (a \in \mathbb{R})$ и нека је:

1) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad (b \in \mathbb{R})$

2) у некој околини тачке a за $x \neq a$ $g(x) \neq b$

3) $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = A \quad (A \in \mathbb{R})$

Тада је $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = A$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = A$$

сл. $g(x) = t$

Доказ: Нека је (x_n) произвољан низ такав да $x_n \neq a$, за $n > n_0$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

1) \Rightarrow низ $(\underbrace{g(x_n)}_{t_n})$ тежи b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$$

2) $\Rightarrow t_n \neq b$ за $n > n_0$

3) \Rightarrow низ $(f(t_n))$ тежи A , кад $n \rightarrow \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = A$$

Х.Т.

\Rightarrow

због произвољности нива (x_2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = A$$

Прейходна ① обрађује 3 важне случаја

I Смену у \lim сложене функције

II Ако је f непрекидна функција у тачки b имамо:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = f(b) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

сл. $g(x) = t$

тј инверзија \lim и f .

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{x+1}{x-1}} = ?$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = 2^x$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = f(g(x)) = 2^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

III Ако је f непрекидна у тачки b и g непрекидна у тачки a , тада:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = f(b) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = \\ &= f(g(a)) = h(a) \end{aligned}$$

$\Rightarrow h = g \circ f$ је непрекидна функција

⊕: Све елементарне функције су непрекидне на свим где су дефинисане.

Пример: $y = \arctg x^{-1}$ је непрекидна за $x \neq 0$. Објаснићу

елементарна функција дефинисана за $x \neq 0$

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

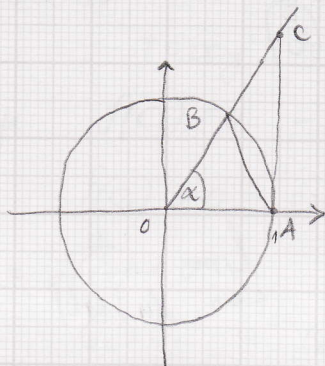
$$f(x) = \arctg x$$

$$g(x) = x^{-1}$$

Вански милош

⊕: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 $\left(\frac{0}{0}\right)$

За $x > 0$ тј. $x \rightarrow 0+$



$$P_{\triangle OAB} < P_{\triangle OAB} < P_{\triangle OAC}$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin x}{x}$ је парна функција

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Тодан

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Помоћница

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

(0/0)

Ⓣ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Помоћнице :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$$

(0/0)

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

или $e^x - 1 = t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

Ⓣ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x \cdot \alpha \ln(1+x)} \cdot \alpha \ln(1+x) = \alpha$$

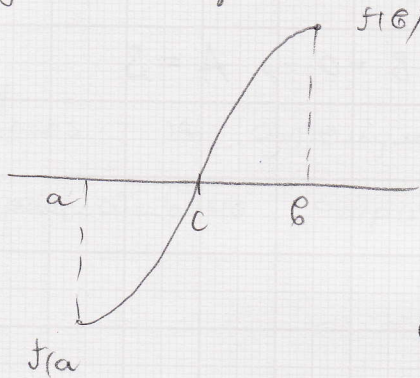
(0/0)

$\alpha \in \mathbb{R}$

Особине непрекидне функције на одсечку $[a, b]$.

Ⓙ: (Болцано - Кошијева)

Ако је f непрекидна на $[a, b]$ и ако $f(a) \cdot f(b) < 0$
 Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = 0$.



Доказ:

Нека је $f(a) < 0$ $f(b) > 0$.

Означимо са $a_1 = a$, $b_1 = b$, а средишњу тачку сегмента $[a_1, b_1]$.

Ако је $f(c_1) = 0$ - крај доказа.

Ако је $f(c_1) > 0$ - означимо $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$
 c_2 - средиште $[a_2, b_2]$

Ако је $f(c_1) < 0$ -

$a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$ и c_2 средиште $[a_2, b_2]$

$[a_2, b_2]$ Ако је $f(c_2) = 0$ - крај доказа

Ако је $f(c_2) > 0$...

Ако је $f(c_2) < 0$...

$[a_3, b_3]$

Понављањем поступка добијемо тачку c_n тако да

$f(c_n) = 0$ или низ $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, ..., $\{a_n, b_n\}$

низ улећнутих интервала.

Заклеちなмо: (a_n) монотонно опадајући

(b_n) монотонно растући

$$\boxed{a_1} \leftarrow a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b_{n-2} \leq \dots \leq \boxed{b_1}$$

Низови (a_n) и (b_n) су ограничени низови.

$$\textcircled{T} \quad (M+0 \Rightarrow K) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

$$(A, B \in \mathbb{R})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(учетнути интервали)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B \end{array} \right\} A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

Означимо $A = B = C$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \quad / f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = C \quad / f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(C)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(C)$$

$$\begin{array}{l} f(a_n) < 0 \Rightarrow f(C) \leq 0 \\ f(b_n) > 0 \Rightarrow f(C) \geq 0 \end{array} \rightarrow f(C) = 0$$

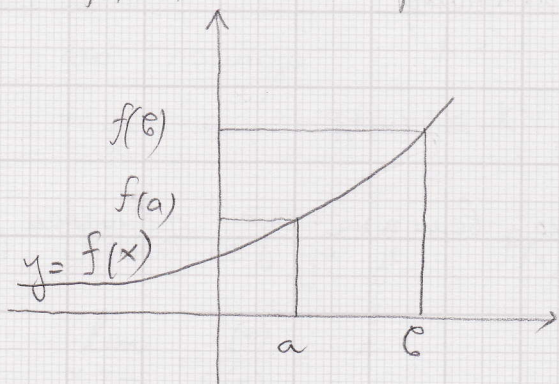
Последица:

\textcircled{T} : Нека је f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тада за сваки реални број s између $f(a)$ и $f(b)$ постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = s$.

17-20h

22.12.09 → 28.12.09

Т Вајерштрассова теорема



Доказ:

По (Т₄) $f(x)$ је ограничена на $[a, b]$, па према аксмами супремума постоји $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ и $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

Доказ за супремум:

Претпоставимо супротно, да $f(x)$ није није једнака M .
 $x \in [a, b]$

$$\Rightarrow M - f(x) > 0$$

$\Rightarrow M - f(x)$ је непрекидна на $[a, b]$.

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ је непрекидна на $[a, b]$.

По (Т₄) $g(x)$ је ограничена, па је

$$0 < g(x) < G$$

$$\frac{1}{M - f(x)} < G$$

$$\Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{G}, \text{ тј } f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{G}}_{M_1}, \quad G > 0$$

контрадикција

$$x_1 = \frac{1}{2n}, x_2 = \frac{1}{n}$$

$n \in \mathbb{N}$

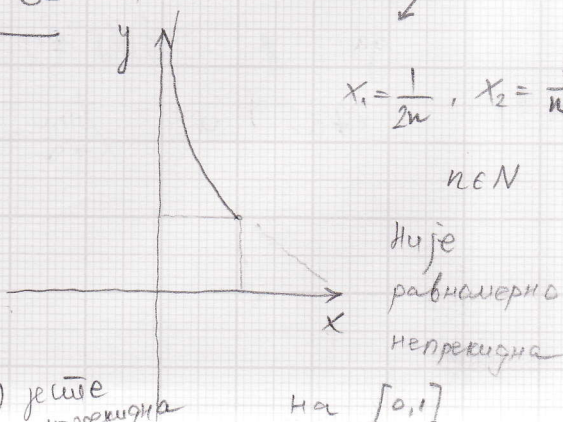
Пример: $f(x) = \frac{1}{x}, I = (0, 1)$

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{2n} < \delta \text{ за довољно велико } n$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |2n - n| = n$$

$f(x)$ још је непрекидна

на $[0, 1]$



није равномерно непрекидна

— Реалне функције —

①: Преликавање $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, где је $D \subseteq \mathbb{R}$ зове се реална функција једне независно променљиве.

Начин задавања: $f(x) = y$ (експлицитно)

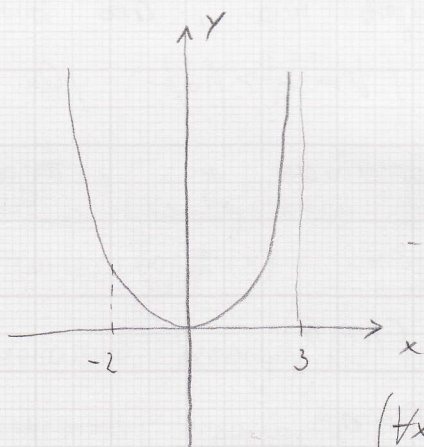
$F(x, y) = 0$ (имплицитно)

$x = \varphi(t)$, $y = \theta(t)$ (параметрично)

①: Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је ограничена на скупу A ($A \subseteq D$) ако:
($\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) ($\forall x \in A$) $c_1 \leq f(x) \leq c_2$

Пример

$$y = x^2$$



дефинисана на \mathbb{R}

- на \mathbb{R} није ограничена

- на $A = [-2, 3]$ $f(x) = x^2$

је и ограничена

$$(\forall x \in [-2, 3]) \quad 0 \leq f(x) \leq 10$$

①: Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је монотона на скупу A ($A \subseteq D$) ако задовољава један од делова:

1) ($\forall x_1, x_2 \in A$) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (монотонно растућа)

2) ($\forall x_1, x_2 \in A$) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (монотонно опадајућа)

3) ($\forall x_1, x_2 \in A$) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (монотонно неопадajuћа)

4) ($\forall x_1, x_2 \in A$) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (монотонно нерастућа)