

## Математичка анализа - увод

Пример:  $N = \{1, 2, \dots, n\}$

$$P = \{2, 6, 4, \dots\}$$

$f: N \rightarrow P$  је биекција

$$f(k) = 2k, \quad k \in N$$

①: Два скупа  $A$  и  $B$  имају исти кардинални број, тј. (исту моћ, еквивалентни су)  $\text{card} A = \text{card} B$ , ако постоји биекција  $f: A \rightarrow B$

Напомена: Једнакост кардиналних бројева из претходне дефиниције је релација еквиваленције.

①: Кардинални бројеви скупова јесу класе еквиваленције генерисане релацијом еквиваленције из претходне дефиниције

①:  $\text{card} N = \aleph_0$  (нума)

Каже се да је скуп  $N$  пребројив

①: Скуп  $Z$  је пребројив.

①: Скуп  $Q$  је пребројив.

①: Унија пребројиво много пребројивих скупова јесте пребројив скуп.

## Скуп реалних бројева $R$

①: Сваком реалном броју одговара једна и само једна тачка праве и обрнуто, свакој тачки праве одговара један и само један реалан број.



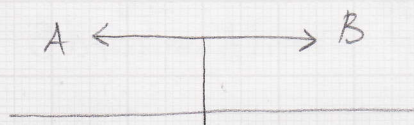


I) Алгебарска структура  $((\mathbb{R}, +, \cdot))$  је поље

II) Структура поретка

III) Особина непрекидности:

Ако скуп  $\mathbb{R}$  поделимо на два непразна дисјунктна подскупа  $A$  и  $B$  тако да  $(\forall a \in A) (\forall b \in B) a < b$ , тада или скуп  $A$  има највећи број или скуп  $B$  има најмањи број



①: Отворени интервал  $(a, b)$   $a < x < b$

Затворени интервал  $[a, b]$   $a \leq x \leq b$

Полуотворен  $[a, b)$ ,  $(a, b]$

Околина тогже  $a$  је сваки отворен интервал који је садржи.

$\varepsilon$ -околина (симетрична околина) тогже  $a$  је  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

①: Абсолютна вредност броја  $a = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

може и  $|a| = \sqrt{a^2}$

①:  $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$

Напомена:  $a = |a| \operatorname{sgn} a$

$|a| = a \operatorname{sgn} a$

①:  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  је проширени скуп реалних бројева

Напомена:  $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < +\infty$

$a \cdot +\infty = +\infty$ ,  $a > 0$ ,  $a(+\infty) = +\infty$

Недефинисани изрази  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$



- ①: Скуп  $R$  није пребројив.
- ①:  $\text{card } R = c$  ( $R$  има моћ континуума).
- ①:  $\text{card}(P(A)) > \text{card } A$
- ①: ако је  $\text{card } A =$  , тада је  $\text{card}(P(A)) = c$
- ①: Ако је  $A \subset R$ , минимум скупа  $A$  је:  
$$a = \min A \Leftrightarrow a \in A \wedge (\forall x \in A) a \leq x$$

Симетрично:  $\max A$ .

Пример:  $A = [1, 2)$   $\min A = 1$ ,  $\max A$  - не постоји

- ①: Ако је  $A \subset R$ , каже се да је  $p \in R$  доња граница (миноранта) скупа  $A$  ако је за  $(\forall x \in A)$   $x \geq p$ . Ако она постоји (коначна) каже се да је  $A$  ограничен одоздо.
- Симетрично: Горња граница (мајоранта), скуп ограничен одозго.

- ①: Скуп  $A$  је ограничен ако је ограничен и одоздо и одозго, тј. ако

$$(\exists m, M \in R)(\forall x \in A) m \leq x \leq M$$

- ①: Скуп  $A \subset R$  је ограничен ако  $(\exists M \in R, M > 0)(\forall x \in A) |x| < M$

- ①: Сваки коначан скуп је ограничен.

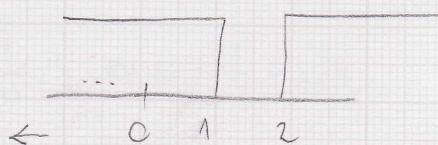
- ①: Инфинум скупа  $A \subset R$ ,  $\inf A$ , је максимум скупа његових минораната.

Симетрично: Супремум скупа  $A \subset R$ ,  $\sup A$  је минимум скупа мајораната.

Пример  $A = [1, 2)$

$$\inf A = 1$$

$$\sup A = 2$$



← све миноранте                      све мајоранте →



①:  $S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x \in A) x \leq S \wedge (\forall \varepsilon > 0) (\exists a \in A) a > S - \varepsilon$

②: Сваки скуп  $A \subset \mathbb{R}$  који је ограничен одозго, тј он има (коначну) мајоранту има супремум (Аксманова супремума).

### Низови

①: Низ (реалан)  $(a_n)$  је прелиминација  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Нагини задавања низа:

- 1) аналитички  $a_n = (a_n) = \frac{(-1)^n}{n}$
- 2) математичка индукција (рекурзивно):  
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  ;  $a_1 = 1$  ,  $a_2 = 1$
- 3) на било који други начин

②: Тачка најближања низа  $(a_n)$  је тачка у чијој се произвољној околини налази бесконачно много чланова низа.

Пример:  $a_n = 2$

1)  $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

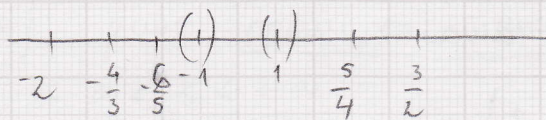
2)  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$(-1)^n$

тачка најближања

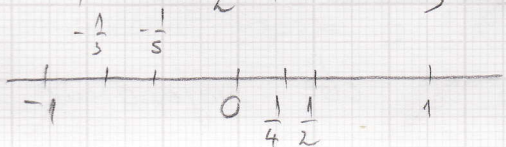
1)  $a_1 = -2$  ,  $a_2 = \frac{3}{2}$  ,  $a_3 = -\frac{4}{3}$  ,

$a_4 = \frac{5}{4}$  ,  $a_5 = -\frac{6}{5}$  , ...



тачка најближања  
су: -1, 1

2)  $a_1 = -1$  ,  $a_2 = \frac{1}{2}$  ,  $a_3 = -\frac{1}{3}$  ,  $a_4 = \frac{1}{4}$  ,  $a_5 = -\frac{1}{5}$



т.н. је 0



①: Број  $A \in \mathbb{R}$  је гранична вредност неког задатог низа  $(a_n)$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ), ако се у произвојној околини тачке  $A$  налазе сво сви чланови низа.

$$\begin{array}{c} \text{---} ( \quad | \quad ) \text{---} \\ A-\varepsilon \quad A \quad A+\varepsilon \end{array}$$

②: Низ  $(a_n)$  има граничну вредност  $A \in \mathbb{R}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ) ако  
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) |a_n - A| < \varepsilon$  постоји индекс  $n_0$   
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon)) (\forall n) (n > n_0) \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$   
 $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Пример:  $(a_n)$ ,  $a_n = \frac{n+1}{n}$ , одредити  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}, a_5 = \frac{6}{5}, a_6 = \frac{7}{6}, a_7 = \frac{8}{7}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \text{---} \\ 1 \quad \frac{7}{6} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad 2 \end{array}$$

Изаберимо произвојно  $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{c} \text{---} ( \quad | \quad ) \text{---} \\ 1-\varepsilon \quad 1 \quad 1+\varepsilon \end{array}$$

$$|a_{n+1}| < \varepsilon$$

$$a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

нпр. за  $\varepsilon = 10^{-2}$

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = 10^2$$

$$\text{за } n > 10^2 \Rightarrow a_n \in (1 - 10^{-2}, 1 + 10^{-2})$$

нпр.  $\varepsilon = 10^{-5}$

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5$$

$$n > 10^5 \Rightarrow a_n \in (1 - 10^{-5}, 1 + 10^{-5})$$



Пример: 1)  $a_n = \sqrt[n]{c}$ ,  $c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

3)  $a_n = q^n$ ,  $|q| < 1 \rightarrow -1 < q < 1$

2)  $a_n = \sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

3) показује да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , пошто дефинише граничне вредности

Пример:

$$q = \frac{1}{2}$$

$a_n = q^n$  - геометрички низ

$$a_n: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

$$a_n: \left(-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

- за  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline 0-\varepsilon \quad 0 \quad 0+\varepsilon \end{array}$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

$$q^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \log |q| < \log \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \quad \text{по } (\varepsilon)$$

4)  $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline -1 \quad 1 \end{array}$$

низ има две тачке најближања, па низ нема граничну вредност, тј. не постоји  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

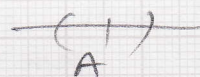


5)  $a_n = n^2$

$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots$

Не постоји коначан

број  $A$  такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = A$

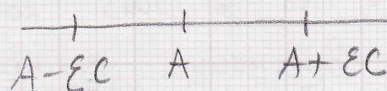


①: Низ који има коначну граничну вредност, зове се конвергентан низ.

②:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall n > n_0) |a_n - A| < \varepsilon \cdot c$

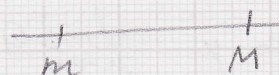
Доказ:  $\Rightarrow c = 1$

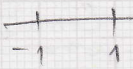
$\Leftarrow$   $c$  је дата константа  
 $\varepsilon$  је произвољно  
 $\varepsilon c$  је произвољно



③: Низ  $(a_n)$  је ограничен ако важи:  $(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall n) m < a_n < M$

④: Низ  $(a_n)$  је ограничен ако важи:  $(\exists M \in \mathbb{R}, M > 0) |a_n| < M$



Пример: 1)  $a_n = (-1)^n$    $-3 < a_n < 5$  за свако  $n$   
 $m$   $M$

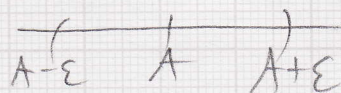
2)  $a_n = \frac{n+1}{n}$  - за свако  $n$ :  $0 < a_n < 3$

3)  $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$  -  $(\forall n) -10 < a_n < 17$

⑤: Сваки конвергентан низ је ограничен низ.

Доказ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (A \in \mathbb{R})$

изаберемо произвољно  $\varepsilon > 0$





Поштом индекса по такав да сви чланови низа  $(a_n)$  са индексом  $n > n_0$  припадају околини  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ , а изван обе околине налазе се чланови  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, \dots$

Одредио  $m = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A - \varepsilon, A + \varepsilon\} = m$

$M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A - \varepsilon, A + \varepsilon\} = M$

$(\forall n) \quad m \leq a_n \leq M$

конвергентан  $\Rightarrow$  ограничен

ограничен  $\nRightarrow$  конвергентан

Ⓙ: Ако је низ конвергентан, тада је његова гранична вредност јединствена.

Ⓣ: Ако је низ  $a_n = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) за скоро свако  $n$ , тада је  
 (за  $n > n_0$ )

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$

Ⓣ: Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , тада је:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ , (за  $b_n \neq 0$  и  $B \neq 0$ )

доказ: 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

Изаберимо произвољно  $\varepsilon > 0$

$\frac{(\quad)}{A - \varepsilon \quad A \quad A + \varepsilon}$

$\frac{(\quad)}{B - \varepsilon \quad B \quad B + \varepsilon}$



Тада постоји индекс  $n_1$  почевши од ког сви чланови низа  $a_n$  са индексом  $n > n_1$  припадају  $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$

Тада постоји индекс  $n_2$  тада: за  $n > n_2$   $|b_n - B| < \varepsilon$

Означимо са  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ .

$$\begin{aligned} \text{Тада за } n > n_0 \text{ важи: } |(a_n + b_n) - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon \quad (\text{неједнакост троугла}) \\ &< \varepsilon \quad < \varepsilon \end{aligned}$$

$$(a_n + b_n) \in ((A+B) - 2\varepsilon, (A+B) + 2\varepsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$\text{Последица: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - A) = 0$$

Ⓐ: Нула низ је низ чија је гранична вредност једнака 0.

Ⓣ: Нека је  $(a_n)$  нула низ, нека је  $(b_n)$  ограничен низ.

Тада је низ  $(c_n)$  где је  $c_n = a_n \cdot b_n$ , нула низ.

Доказ: (домати) ✓

пример  $c_n = \frac{\sin n!}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ?$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = \sin n! \quad -3 < b_n < 3 \quad \Rightarrow (a_n) \text{ је нула низ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

### Бесконачне граничне вредности

Ⓐ: Гранична вредност низа  $(a_n)$  је  $+\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ) ако се у произвољној околини  $+\infty$  налазе скоро сви елементи низа  $(a_n)$ .

$$\begin{array}{c} \text{---} +\infty \\ | \\ E \end{array} \quad (E, +\infty)$$



①':  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ако  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon)) (\forall n > n_0) \underbrace{a_n \in (E, +\infty)}_{a_n > E}$

①: Гранична вредност низа  $(a_n)$  је  $-\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ) ако...

①':  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  ако  $(\forall s > 0) (\exists n_0(s)) \dots$

①: Ако је гранична вредност низа  $+\infty$  или  $-\infty$  за такав низ кансело да је одређено дивергентан.

①: Ако низ нема ни коначну ни бесконачну граничну вредност за такав низ кансело да је неодређено дивергентан.

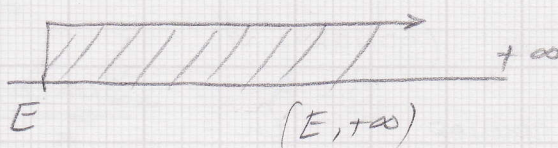
Реални низ може да буде конвергентан или дивергентан.  
(одређено, неодређено)

Пример:

1)  $a_n = \frac{n+1}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} = 1$  (конвергира)

2)  $a_n = n^2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (одређено дивергира)

Изаберемо произвољно  $E > 0$



$$a_n > E$$

$$\Leftrightarrow n^2 > E \Leftrightarrow n > \sqrt{E}$$

3)  $a_n = (-1)^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  - не постоји

Пример:

1)  $a_n = n^k$  ( $k > 0$ )

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n} = +\infty$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_s n = \begin{cases} +\infty, & s > 1 \\ -\infty, & s < 1 \end{cases}$



Лемма: За које вредности  $q \in \mathbb{R}$  је конвергентан геометрички низ  $a_n = q^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, & q \in (-1, 1) & (\text{конвертира}) \\ 1, & q = 1 & & (\text{конвертира}) \\ \text{не постоји}, & q = -1 & & (\text{неодређено дивертира}) \end{cases}$$

Ⓙ: Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , онда је:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm \infty$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(A) \cdot \infty, & \text{за } A \neq 0 \\ \text{неодређено личес}, & \text{за } A = 0 \end{cases}$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = 0$

Ⓣ: Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $a_n > 0$  за скоро свако  $n$ , тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $a_n < 0$  за скоро свако  $n$ , тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty \quad \left( \frac{1}{0+} = +\infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty \right)$$

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \log \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right)} \quad \text{не постоји}$$

↓  
 $\frac{1}{0}$

(лимити и са леве и са десне стране)

Неодређени изрази:  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$



Пример:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{+\infty} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_0 \right) = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left( \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 \right)}{3^n \left( \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right)} = \frac{3(0+1)}{0+1} = 3$$

Личажи:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0 \checkmark$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}) = +\infty \checkmark$$

Ⓙ:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n \pm b_n)$	$\lim(a_n b_n)$	$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$	$\lim(a_n^{b_n})$
A	B				
A	$+\infty$				
A	$-\infty$				
$+\infty$	B				
$+\infty$	$+\infty$				
$+\infty$	$-\infty$				
$-\infty$	B				
$-\infty$	$+\infty$				
$-\infty$	$-\infty$				

Пример:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad (\text{за } q > 1) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{q^n} = 0 \quad (\text{за } q > 1, p \in \mathbb{R}) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

дрге теене  $\infty$  нб  $n^p$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log a n)^s}{n^p} = 0 \quad (p > 0, a > 1, s \in \mathbb{R}) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Рангирате функција по брзини теенења  $\infty$ :

$$n!, \quad q^n, \quad n^p, \quad \log a n$$



Ⓣ (теорема о два хсандард) - Нега су  $a_n, b_n, c_n$  три низа реалних бројева, тако да важи:

- 1)  $b_n \leq a_n \leq c_n$  за скоро свако  $n$  ( $\exists n_0$  за  $n > n_0$ )
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$  ( $A \in \mathbb{R}$ )

Тада  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

Доказ: домаћи

Пример:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n} \stackrel{(\infty^0)}{=} \underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{b_n = 7} \leq \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{7^n + 7^n}}_{c_n = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 7}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7$

$a_n = 7 \cdot \sqrt[n]{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7$

### Монотони низови

Ⓣ: Низ  $(a_n)$  је монотон низ ако задовољава један од следећа четири услова:

- 1)  $a_n < a_{n+1}$  ( $\forall n$ ) (монотонно растући)
- 2)  $(\forall n) a_n > a_{n+1}$  (монотонно опадајући)
- 3)  $(\forall n) a_n \leq a_{n+1}$  (монотонно неопадajuћи)
- 4)  $(\forall n) a_n \geq a_{n+1}$  (монотонно нерастући)

Пример:

- 1)  $a_n = n$  - растући
- 2)  $a_n = \frac{1}{n}$  - опадајући
- 3)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  - није монотон

Ⓣ: Ако је низ монотон и ограничен, тада је он конвергентан.



Доказ:  $(x_n)$  монотон и ограничен

прећпоставимо да је  $(x_n)$  неопадajuћи

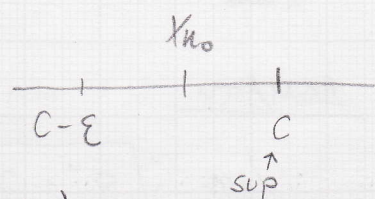
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq M$$

означимо  $\sup x_n = C$

Из дефиниције супремума:  $(\forall n) x_n \leq C$

Изаберемо произвољно  $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow (\exists n_0) C - \varepsilon < x_{n_0}$$



због монотоности низа

$$\Rightarrow (n > n_0)$$

$$C - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

$$\Rightarrow \text{За } n > n_0 \Rightarrow C - \varepsilon < x_n \leq C$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = C$$

Ⓙ: Ако је низ монотон, тада он има коначну или бесконачну граничну вредност.

Задатак

$$(x_n) \text{ где је } x_n = \frac{n}{2^n}$$

Доказати да је конвергентан.

Ⓙ: Низ  $(a_n)$  где је  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  је конвергентан.

Ⓙ:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $e \approx 2,718$ ) - ирационалан број  
 - трансцендентан број

- Поднизови -

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}, \dots$  - подниз почетног низа

$a_7, a_{15}, a_{30}, \dots, a_{100}, \dots$  - подниз почетног низа



①: Нека је  $(a_n)$  низ и нека је  $k_1, k_2, \dots, k_k, \dots$  растући низ природних бројева. Тада је  $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_k}, \dots = (a_{k_k})$  подниз почетног низа  $(a_n)$ .

Пример:

$$1) a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$n = 2k \rightarrow a_{2k} = \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \quad (a_{2k})$$

$$n = 2k+1 \rightarrow a_{2k+1} = -\frac{2k+1+1}{2k+1} = -\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) \quad (a_{2k+1})$$

$$2) a_n = n + (-1)^n \cdot n$$

$$n = 2k \rightarrow a_{2k} = 2k + 2k = 4k \quad (a_{2k})$$

$$n = 2k+1 \rightarrow a_{2k+1} = 2k+1 - (2k+1) = 0 \quad (a_{2k+1})$$

①': Тачка  $g \in \mathbb{R}$  је тачка набибливања низа  $(a_n)$  ако постоји подниз  $(a_{k_k})$  тако да је  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k_k} = g$ .

Пример: (прећходни)

$$1) \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} -\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) = -1$$

тачке набибливања су  $-1$  и  $1$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} \uparrow$   $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} \downarrow$

$$2) \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 4k = +\infty$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

тачке набибливања су  $0$  и  $+\infty$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} \uparrow$   $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} \downarrow$

②: Нека је  $G$  скуп свих тачака набибливања низа  $(a_n)$ .

$$\max G \stackrel{\Delta}{=} \limsup a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k_k}$$

$$\min G \stackrel{\Delta}{=} \liminf a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k_k}$$



⊕: Низ  $(a_n)$  има граничну вредност  $A \in \bar{\mathbb{R}}$  ако и само ако сваки подниз овог низа има исту граничну вредност  $A$ .

Доказ

⊆ Ако сваки подниз има граничну вредност  $A$ , тада је важи и за сам низ  $(a_n)$ , јер је сваки низ сам себи подниз.

⊇  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (A \in \bar{\mathbb{R}})$

тада се у произвојној околини тачке  $A$  налазе скоро сви чланови низа, па према томе, ту се налазе скоро сви чланови сваког подниза.

Пример:

$(a_n) \quad a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

⊙: Низ одсека  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ , зове се низ усећнутих (или саварутих) интервала ако важи:

- 1)  $(a_n)$  је монотонно неопадajuћи  
 $(b_n)$  је монотонно нерастући
- 2)  $(\forall n) \quad a_n < b_n$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

⊕\*: Низ усећнутих интервала садржи једну и тачно једну задану тачку.

⊕: (Болцано - Вайерштрас) - Сваки ограничен низ има бар један конвергентан подниз.

Последица: Сваки низ садржи бар један подниз који има коначну или бесконачну вредност.



## - Кошијев низ -

Пример:  $(a_n)$   $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow$  хармонички низ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = ?$$

$(a_n) \nearrow \stackrel{T}{\Rightarrow}$  има коначну или бесконачну граничну вредност

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$a_{100} \approx 5,19 \quad \dots \quad a_{1000} = 1 + \dots + \frac{1}{1000} = 7,49$$

$$a_{1000000} = 14,39$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \right)$$

Ⓐ: Низ  $(a_n)$  је Кошијев низ, ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon)) (\forall m, n > n_0) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Ⓣ: Ако је  $(a_n)$  конвергентан низ, тада је  $(a_n)$  Кошијев низ.

Доказ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \quad (A \in \mathbb{R})$$

Изаберемо произвољно  $\varepsilon > 0$

$$\overbrace{\quad \quad \quad}^{( \quad \quad \quad )}$$

$$A - \varepsilon \quad A \quad A + \varepsilon$$

Тада постоји  $n_0(\varepsilon)$ , па за  $n > n_0$   $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

и за  $m > n_0$   $|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{Тада: } |a_n - a_m| = |a_n - A - a_m + A| \leq \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|A - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Ⓣ: Ако је  $(a_n)$  Кошијев низ, тада је он конвергентан.