

Основне теореме диференцијалног рачуна

①: Ако је функција f дефинисана у тачки x_0
 и ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да је функција f
 дефинисана на $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и

$$(\forall x \in I, x \neq x_0) f(x) \leq f(x_0),$$

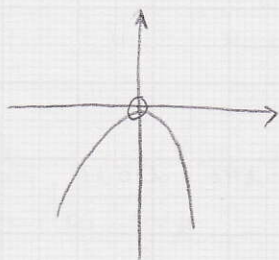
функција f у тачки x_0 има локални максимум

Аналогно: локални минимум

Заредно: локални екстремум

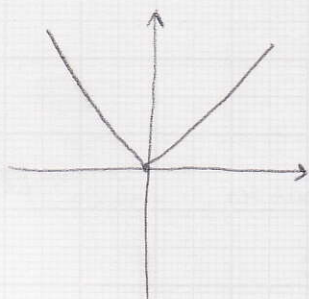
Напомена: строги и нестроги екстремуми

Пример 1) $y = -x^2$



Максимум за $x=0$

2) $y = |x|$



Минимум за $x=0$.

①: Ако је $f'(x_0) = 0$,
функција f у тачки x_0 има стационарну тачку.

Пример:

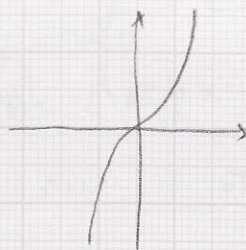
$$1) \quad y = -x^2$$

$$y'(0) = 0$$

$$2) \quad y = x^3$$

$$y' = 3x^2$$

$$y'(0) = 0$$



* (Фермаова)

Доказ: претпоставка

у x_0 је максималон
и постоји $f'(x_0)$.

Нека је $f'(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{за довољно мало } h, h > 0.$$

$$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) > 0$$

\Rightarrow у x_0 није максимум!

$$f'(x_0) < 0$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0 \quad \text{за довољно мало } |h|$$

$$\text{и } h < 0$$

$$\Rightarrow \underline{f(x_0+h) - f(x_0) > 0}$$

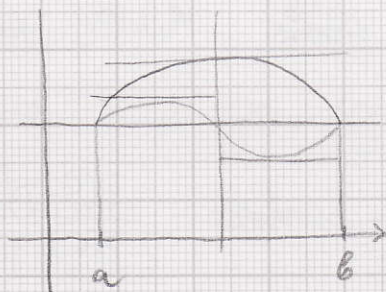
\Rightarrow није максимум у x_0 !

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

За минимум аналогно.

* (Радба)

Доказ:



Ако је $f(a) = f(b)$

и најмања и највећа вредности онда

је $f(x) = \text{const.}$ и онда је $f'(x) = 0$.

Ако није, онда постоји бар још један локални екстремум c , онда је $f'(c) = 0$ по Фермаовој теорему.

* (Кошијева)

Доказ:
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Напомена: $g(b) - g(a) \neq 0$

јер је $g'(x) \neq 0$! (Због Ролве теореме)

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

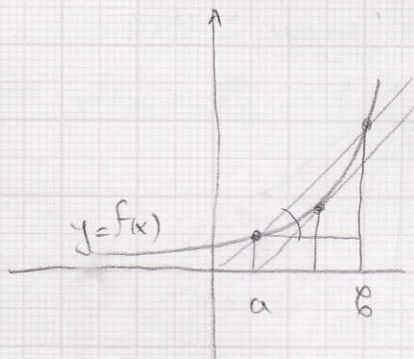
Функција $\varphi(x)$ задовољава услове Ролве теореме.

$$\varphi(a) = \varphi(b) ?$$

$$(\exists c \in (a, b)) \quad \varphi'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

\Rightarrow тврђење

* Лагранжова = Кошијева за $g(x) = x$



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad c \in (a, b)$$

(T5) Доказ: $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$

Из Лагранжовог теореме

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))$$

$0 < \theta < 1$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))$$

$$f' > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f \text{ монотонно расте}$$

$$f' < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f \text{ монотонно опада}$$

$$f' = 0 \Rightarrow f \text{ је константа.}$$

ЛОПИТАЛОВА теорема

Примери: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \quad \checkmark$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \Bigg| \cdot X$$

Изводи вишег реда

①. Ако постоји коначан n -ти извод у тачки x_0 $(f^{(n)}(x_0))$, тада можемо да је функција f n -пута диференцијабилна у тачки x_0 .

Пример: $f(x) = xe^x$ одредити степен извода функције f .

Диференцирање вишег реда

$$y = f(x) \quad df(x) = f'(x) \Delta x = f'(x) dx$$

Ако је Δx фиксирано, тј. $\Delta x = \text{const.}$, тада

је $df(x) = f'(x) \cdot dx$ функција независно променљиве x .

$$d(df(x)) = d(f'(x) dx) = d(f'(x)) dx + f'(x) \cdot d(dx)$$

другу диференцијацију
или диференцирање
другог реда

$$= f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) (dx)^2$$

означава dx^2

$$d^2 f(x) = f''(x) dx^2$$

①: Диференцијал реда n (n -ти диференцијал) функције $f(x)$ је $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$

$n = 2, 3, \dots$

где је $d^1 f(x) = df(x)$.

⑦: Ако је функција f n -пута диференцијална у некој тачки x , тада је $d^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$
 $= f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n$

Доказ: за $n=2$ (већ изведено)

по претпоставци n $d^n f(x) = f^{(n)}(x) (dx)^n$

$n+1$

$$\begin{aligned} d^{n+1} f(x) &= d(d^n f(x)) \underset{u.x.}{=} d(f^{(n)}(x) \cdot dx^n) = \\ &= d(f^{(n)}(x)) dx^n + f^{(n)}(x) \cdot d(dx^n) \rightarrow 0 \\ &= f^{(n+1)}(x) dx \cdot dx^n \\ &= f^{(n+1)}(x) dx^{n+1} \end{aligned}$$

Напомена:

$$1) d^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot dx$$

$$d^n f(u(x)) \neq f^{(n)}(u(x)) \cdot du^n \quad (n \geq 1)$$

2) $\underbrace{d(dx)}_{\Delta x}$
 фиксирано

Лагје

$$d^2x = 0$$

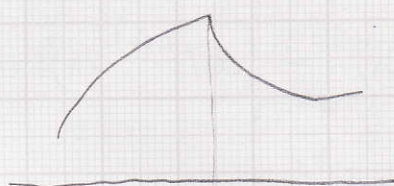
$$d^n x = 0 \quad \text{за } n > 1$$

Конвексност и конкавност

①: наставак ... или обрнуто, функција f у
 тачки x_0 има превртну тачку.

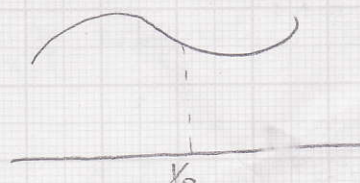
Напомена:

1) x_0 превртна тачка функције $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$. ①



x_0
 (ПТ)

или $f''(x_0)$
 не постоји



(ПТ)

$f''(x_0)$
 постоји

2) $f'(x_0) = 0$ x_0 (ПТ) функције

3) x_0 (ПТ) и $f''(x_0)$ постоји (Т)
 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

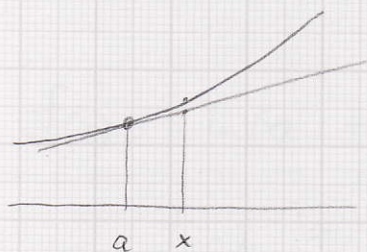
(последња Фермаова теорема, x_0 је тачка екстремума f')

Тејлоров полином

Познато од раније: f диференцијабилна у
 тачки a , тада:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$$

$$f(x) \approx \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{\substack{\text{полином првог} \\ \text{степенa (ознака } T_1(x))}}$$



$$f(a) = T_1(a)$$

$$f'(a) = T_1'(a)$$

Тејлоров полином је уопштење обе идеје:

$$f(x) = ?$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad | \quad | \quad \text{---} \\ \quad \quad a \quad x \\ f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a) \\ \text{познато} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f(x) \approx T_n(x) \\ \text{полином} \\ n\text{-ти степенa} \end{array}$$

и да се у тачки a овај полином $T_n(x)$
 подудори са функцијом f у вредностима
 првих n извода.

①: Ако функција f у тачки a има коначне изводе до реда n , тада постоји

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) +$$

$$+ \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

јесте Телоров полином, степена n , функције f у околини тачке a .

За $a=0$ Маклоренов полином.

②: $f(x) \approx T_n(x) \quad x \rightarrow a$

функција $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, зове се остатак Телоров полинома f -је f у околини тачке a .

③. (Телорова теорема)

Ако функција f у тачки a има коначне изводе до реда n и ако је

$T_n(x)$ њен Телоров полином у околини тачке a тада је

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n), \quad \text{кад } x \rightarrow a$$

Телорова формула
 (Телоров развој)

Пример: $f(x) = e^x$ (Телоров развој у околини тачке $a=0$)

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_n(x)} + o(x^n)$$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{T_n(x)} + o(x^n)$$

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a$$

$$f(x) \approx T_n(x)$$

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

остатак у Пеановом облику

⊕ Ако је функција n -пута диференцијабилна у тачки a и ако за неки полином $P_n(x)$ степена n важи

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{тада је}$$

$P_n(x)$ Телоров полином функције f у околини тачке a .

Доказ: $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n), x \rightarrow a$

(Тейлорова теорема) $f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n), x \rightarrow a$

$\Rightarrow P_n(x) - T_n(x) = o((x-a)^n)$

① $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow$

1° a је корен реда $n+1$

полинома, $P_n(x) - T_n(x)$ ①

или

2° за $\forall x \rightarrow a$ $P_n(x) - T_n(x) \equiv 0$ $P_n(x) = T_n(x)$ ✓

јер је $P_n(x) - T_n(x)$

полином највише степена n

⑦: Нека функција f има коначан $(n+1)$ извод у некој околини тачке a , T на интервалу $(a-d, a+d)$ и нека је $R_n(x)$ остатак

$(R_n(x) = f(x) - T_n(x))$

Тада је $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$,

где је $\theta \in (0,1)$ неодређена вредност (и зависи од x)

(ЛАГРАНЖСОВ ОБЛИК ОСТАТКА)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!} (1-\theta)^n (x-a)^{n+1}$$

(Кошијева форма остатка)

Пример: $y = e^x = T_n(x) + R_n(x)$

$a = 0$

$$= T_n(x) + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Пример: 2) $f(x) = \sin x$ у околини тачке $a = 0$.

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

\vdots

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \cos x$$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot \sin x$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cdot \cos x$$

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= 0 + \frac{1}{1!} x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k-1} + 0$$

$n = 2k-1$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x)$$

$$n = 2k-1$$

$$n = 2k$$

$$\sin x = \underbrace{T_{2k-1}(x)}_{n=2k-1} + R_{2k-1}(x)$$

||

$$T_{2k}(x) \quad R_{2k}(x)$$

$$\boxed{\sin x = T_{2k-1}(x) + R_{2k}(x)}$$

$$R_{2k}(x) = O(x^{2k})$$

$$R_{2k}(x) = \frac{f^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos \theta x \cdot \theta}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

3a $n=1$
 $n=2$

$$\boxed{a=0}$$

$$T_1(x) \equiv T_2(x)$$

$$\sin x \approx x$$

$$3a \quad |x| \leq 1$$

$$R_2(x) = \frac{(-1) \cdot \cos \theta x}{3!} x^3$$

$$|R_2(x)| \leq \frac{x^3}{3!} \leq \frac{1}{3!}$$

$$\text{За } |x| \leq \frac{1}{10} \quad |R_2(x)| \leq \frac{x^3}{3!} \leq \frac{1}{3! \cdot 10^3}$$

$$\text{За } n=3 \quad T_3(x) = T_4(x)$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} \quad \text{За } |x| \leq 1$$

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{120}$$

$$\text{За } |x| \leq \frac{1}{10} \quad |R_4(x)| \leq \frac{1}{120 \cdot 10^5}$$

Питање: 

Нека је на неким интервалу I функција има
 коначне изводе произвољног реда
 x - фиксирано (изабрано на I)

$$f(x) \approx T_n(x)$$

Да ли ће тачност апроксимације повећати
 ако n расте?

$$\text{Тј да ли } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0?$$

Пример: Не.

$$6) \quad f(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad \alpha = -1$$

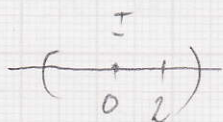
$$f(x) = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n \cdot x^n$$

$$\text{За } |x| \geq 1$$

$$1 - \frac{(-x)^{n+1} - 1}{(-x) - 1}$$

Пример: 7)

$$f(x) = \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad R_n(x)$$



$$f(2) = \ln(1+2) = \ln 3 \approx 1.099 \quad (\text{дигитроном})$$

$$n=1$$

$$n=2$$

$$n=3$$

$$T_1(2) = 2$$

$$T_2(2) = 0$$

$$T_3(2) = 2,66$$

$$n=4$$

$$n=5$$

$$n=6$$

$$T_4(2) = -1,33$$

$$T_5(2) = 5,07$$

$$T_6(2) = -5,6$$

$$n=7$$

$$n=8$$

$$T_7(2) = 12,69$$

$$T_8(2) =$$

Ⓣ Нека f има извод произвојног реда у интервалу I који садржи тачку a и нека постоји константа $M \in \mathbb{R}$, тако да $(\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N})$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

Доказ: Узаберимо произвојно $x \in I$.

Ако $x \in I$, $a \in I$ тада и $a + \theta(x-a) \in I$, $(0 < \theta < 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Тада је } |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x-a)^{n+1}| = \\ &= \frac{M \cdot \theta^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x-a = \theta \end{aligned}$$