

①. (Безуб сјаб)

Остатак при дељењу полинома $P = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$
 полиномом $V = s - c$, $c \in F$, једнак је вредности
 полинома P у тачки c , тј: $P(c)$

Доказ:

$$P: V = \underset{\text{квотник}}{Q} \text{ и остатак } R$$

$$P = (s-c) \cdot Q + R \quad \deg R < \underbrace{\deg(s-c)}_1$$

$$\Rightarrow \deg R = 0$$

$$\Rightarrow R = b \quad b \in F$$

(константа)

$$P = (s-c) \cdot Q + b$$

$$\Rightarrow (\forall x) P(x) = (x-c) \cdot Q(x) + b$$

$$\Rightarrow \text{за } x = c \quad P(c) = (c-c) \cdot Q(c) + b = b$$

① (Хорнерова шема)

При дељењу полинома $P = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$, полиномом
 $V = s - c$ добија се квотник $Q = b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1}$ и
 остатак R такав да важи: $b_{n-1} = a_n$

$$b_k = c b_{k+1} + a_{k+1}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\text{и } R = c \cdot b_0 + a_0.$$

$$P: (s-c)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\
 \hline
 & a_n = b_{n-1} & c \cdot b_{n-1} + a_{n-1} & c \cdot b_{n-2} + a_{n-2} & \dots & c \cdot b_1 + a_1 & b_0
 \end{array}$$

Израчунајти Хорнерови шемом коефицијенте и остатак

$$P = 3 + 2s + s^2 + s^3$$

$$Q = s - 2$$

2	1	1	2	3
	1	3	8	19

R

Коефицијент $Q = 8 + 3s + 1 \cdot s^2$

* Доказати Хорнерову шему

$$P = (s-c) \cdot (b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} \cdot s^{n-1}) + R$$

Израчунајти коефицијенте уз исте степене:

коефицијент уз степен s^n : $a_n = b_{n-1}$

Ⓙ: За било које полиноме P, Q и U над пољем F важи:

1) $P|Q \wedge Q|U \Rightarrow P|U$ (транзитивност)

2) $P|Q \Rightarrow P|Q \cdot U$

3) $P|Q \wedge P|U \Rightarrow P|(Q+U)$

4) не важи симетричност:

$$P|Q \wedge Q|P \Rightarrow P = c \cdot Q$$

$$(c \in F, c \neq 0, c = \text{const})$$

Највећи заједнички делилац

Ⓒ: Полином W је највећи заједнички делилац за дате полиноме P и Q над пољем F , ако важи:

1) $W|P \wedge W|Q$

2) $(\forall D) (D|P \wedge D|Q \Rightarrow D|W)$

Ⓓ: Ако је $\text{NZD}(P, Q) = 1$, тада кажемо да су полиноми P и Q узјадно прости.

Ⓣ: (Еуклидов алгоритам):

1) NZD за било које два ненула полинома P и Q увек постоје

2) NZD за P и Q је јединствени са тачношћу до једне мултипликативне константе

Иза доказа обе теореме извучен је пошљатак за одређивање $\text{NZD}(P, Q)$

$$P : Q = Q_1 \text{ и остатак } R_1$$

$$R_k \text{ је } \text{NZD}(P, Q)$$

$$Q : R_1 = Q_2 \text{ и остатак } R_2$$

$$R_1 : R_2 = Q_3 \text{ и остатак } R_3$$

\vdots

$$R_{k-1} : R_k = Q_{k+1} \text{ и остатак } R_{k+1} = 0$$

Пример:

$$P = s^4 + s^3 + 3s^2 + 4s + 6 \quad Q = s^3 + s^2 + s + 6$$

$$\text{NZD}(P, Q) = ?$$

$$P : Q = S \quad R_1 = 2s^2 - 2s + 6$$

$$Q : R_1 = \frac{1}{2}s + 1 \quad R_2 = 0 \quad \text{NZD}(P, Q) = 2s^2 - 2s + 6$$

Ознака: $W = \text{NZD}(P, Q)$

Полином $W_1 = \text{NZD}(P, Q)$, акко $W_i = c \cdot W, c \in F, c \neq 0$

①: Константа $a \in F$ зове се корен (нула) полинома P , ако је $P(a) = 0$.

②: Полином P над пољем F је разложив (сводљив) над F ако постоје полиноми U и V над пољем F такви да $\deg U > 0, \deg V > 0$ и $P = U \cdot V$

За U и V кажемо да су фактори полинома P .

③: P је неразложив над пољем F .

Пример:

$$P = s^2 + 1 \rightarrow \text{није разложив над пољем } \mathbb{R}$$

$$P = s^2 + 1 \rightarrow (s-i)(s+i) \rightarrow \text{разложив над пољем } \mathbb{C}$$

$$Q = s^3 + 3s^2 + s + 3 = (s+3)(s^2+1) \rightarrow \text{разложив над } \mathbb{R} \text{ и } \mathbb{C}$$

④: Полином $s-a$ је фактор полинома P акко је $P(a) = 0$.

Доказ:

1° $s-a$ је фактор полинома $P \Rightarrow P(a) = 0$

$s-a$ је фактор полинома P , тј $P = (s-a) \cdot Q$

\Rightarrow једнакост полиномских функција
 $(\forall x \in F) \quad P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$

за $x=a \Rightarrow P(a) = (a-a) \cdot Q(a)$
 $P(a) = 0$

2° $P(a) = 0 \Rightarrow s-a$ је фактор полинома P

$$P(a) = 0 \xRightarrow{\text{Безубова}} P = (s-a) \cdot Q + \underbrace{P(a)}_0$$

$$P = (s-a) \cdot Q$$

$\Rightarrow (s-a)$ је фактор полинома P

Пример

1) Истићи да ли је $P = s^3 - 6s^2 + 11s - 6$ дељив полиномом $(s-1)$

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \Rightarrow 1 \text{ је корен полинома } P \xRightarrow{T.} (s-1) | P$$

⑦ Полином $P \neq 0$ сепарабилан и над пољем F има највише n различитих корена.

Доказ ДИМАТИ

ПОСЛЕДИЦЕ 1° P сепарабилан $\deg P = n$ може у пољу F :

- да има нула корена ($P = s^2 + 1$ над \mathbb{R})
- да има тачно један корен ($P = s + 3$ над \mathbb{R})
- да има тачно два корена ($P = (s+3)(s-1)$ у пољу \mathbb{C})
- да има тачно n корена

2° У бесконачном пољу F важи:

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{полиномска функција} \\ \text{придружена } P \end{array} = \begin{array}{l} \text{полиномска функција} \\ \text{придружена } Q \end{array}$$

$$P = Q \Leftrightarrow (\forall x \in F) P(x) = Q(x)$$

- Полиноми у пољу $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ -

①: Полином над пољем \mathbb{C} зовемо комплексан полином.

②: (Основни став алгебре): Сваки комплексни полином P степена $\deg P > 0$ има у пољу \mathbb{C} бар један корен.

③: Нека је дат комплексни полином $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $\deg P > 0$. Тада постоје бројеви $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ такви да важи $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n)$. Овако представљање се зове комплексна факторизација.

Доказ:

Основни став алгебре \Rightarrow полином P има бар један корен $z_1 \in \mathbb{C}$

$$P(x) = (x - z_1) \cdot Q_1(x), \quad \deg Q_1 = n - 1$$

$$n - 1 = 0$$

$$Q_1(x) = c \text{ (const)}$$

$$P(x) = (x - z_1) \cdot c$$

изједначавање
коэффициента

$$\Rightarrow P(x) = (x - z_1) \cdot a_1$$

$$\underline{a_1 = c}$$

$$n - 1 \neq 0$$

основни став
алгебре на $Q_1(x)$

$$\Rightarrow Q_1(x) = (x - z_2) \cdot Q_2(x)$$

$$P(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot Q_2(x)$$

$$\deg Q_2 = n - 2$$

$$n - 2 = 0$$

$$Q_2(x) = c$$

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot c$$

изједначавање

коэффициента

$$\Rightarrow a_2 = c$$

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot a_2$$

$$n - 2 \neq 0$$

$$P(x) = (x - z_1) \dots (x - z_n) \cdot c$$

$$\text{и.к.} \Rightarrow a_n = c$$

$$P(x) = a(x - z_1) \dots (x - z_n)$$

ПОСЛЕДИЦА: Комплексни полином P степена $\deg P = n$ има тачно n корена у пању \mathbb{C} .

Пример:

$$P(x) = i \cdot x^5 + (5i+1)x^4 + (5+3i)x^3 + (3-9i)x^2 - 9x,$$

написаи комплексну факторизацију полинома P .

Корени су: $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = -3$, $z_4 = -3$, $z_5 = 1$

$$P(x) = i(x-i)(x-0)(x+3)(x+3)(x-1)$$

$$P(x) = i(x-i) \cdot x \cdot (x+3)^2 \cdot (x-1)$$

①: Број $z_0 \in \mathbb{C}$ је корен реда k (вишеструкост k), ($k \in \mathbb{N}$), за полином $P(x)$ ако важи $P(x) = (x-z_0)^k \cdot Q(x)$ где $Q(z_0) \neq 0$, тј z_0 није корен полинома Q .

Пример: претходни

$$\begin{array}{ccccccc} z_1 = i & , & z_2 = 0 & , & z_3 = -3 & , & z_4 = -3 & , & z_5 = 1 \\ \text{корен} & & \text{корен} & & \underbrace{\text{корен}} & & \underbrace{\text{корен}} & & \\ \text{реда 1} & & \text{реда 1} & & \text{реда 2} & & \text{реда 1} & & \end{array}$$

$$S(x) = 4 \cdot (x-\alpha)^2 \cdot (x+\beta) \cdot (x+\gamma)^3 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma)$$

$$z_1 = z_2 = \alpha, \quad z_3 = -\beta, \quad z_4 = z_5 = z_6 = -\gamma$$

⑦: Нека су P и Q комплексни полиноми, тј $\deg P > 0$ и $\deg Q > 0$. Тада $Q|P$ ако и само ако је сваки корен z_0 реда k за полином $Q(x)$ уједно и корен $P(x)$ истог или већег реда.

Пример За ли полином $Q(x) = (x+3) \cdot (x-1)$ важи $P(x)$ (из претходног примера)?

$$\begin{array}{cc} z_1 = -3 & z_2 = 1 \\ \text{корен} & \text{корен} \\ \text{реда 1} & \text{реда 1} \end{array} \Rightarrow Q|P$$

$$R(x) = (x+3) \cdot x^2$$

$$\begin{array}{ll} z_1 = -3 & z_2 = 0 \\ \text{корен} & \text{корен} \\ \text{реда 1} & \text{реда 2} \end{array}$$

$\rightarrow y$ P је реда 1 $R \neq P$

Ⓙ: Нека је $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ комплексни полином
 степена $\deg P = n > 0$. Тада важи:

Вијетове
 формуле

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}z_n = (-1)^2 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$z_1z_2z_3 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 + \dots + z_{n-2}z_{n-1}z_n = (-1)^3 \left(\frac{a_{n-3}}{a_n} \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

доказ:

узејмо: $P = a_n(x-z_1) \cdot \dots \cdot (x-z_n)$

Пример:

$$P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 9$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{5}{4}$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = \frac{7}{4}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \frac{9}{4}$$

} Лагранж

Реални полиноми

Ⓐ: Реални полином је комплексан полином чији су сви коефицијенти реални бројеви.

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (a_i \in \mathbb{R}) \text{ над пољем } (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

Ⓙ: Ако је z_0 корен реда k реалног полинома P ($\deg P = n$),
 тада је \bar{z}_0 корен истог реда полинома P .

Пример:

$$Q(x) = i \cdot x^2 + x \rightarrow \text{није реалан полином}$$

$$= i \cdot (x-0) \cdot (x-i)$$

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 0+i$$

$$P(x) = 2x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 4x^2 - 32x + 12 \rightarrow \text{јесте реалан полином}$$

$$= 2(x-1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x-(1+i)) \cdot (x-(1-i))$$

$$z_1 = z_2 = 1, \quad z_3 = -3, \quad z_4 = 1+i, \quad z_5 = z_4 = 1-i$$

Доказ:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad a_i \in \mathbb{R}$$

z_0 је корен реда k

$$\overline{P(x)} = a_0 + a_1\overline{x} + \dots + a_n\overline{x}^n = P(\overline{x})$$

$$P(z_0) = 0 \Rightarrow \overline{P(z_0)} = 0 \Rightarrow P(\overline{z_0}) = 0$$

z_0 корен полинома $P \Rightarrow \overline{z_0}$ је корен полинома P

$$P(x) = (x-z_0)(x-\overline{z_0}) \cdot R_1(x) \rightarrow z_0 \text{ је корен полинома}$$

реалан
полином $R_1(x)$ реда $k-1$

$$x^2 - x(z_0 + \overline{z_0}) + z_0\overline{z_0}$$

$$x^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)x + |z_0|^2 \rightarrow \text{реалан полином}$$

$$\Rightarrow R_1(x) \text{ је реалан полином}$$

$$R_1(x) = (x-z_0)(x-\overline{z_0}) \cdot R_2(x) - z_0 \text{ је корен реда } k-2$$

$$\text{за } R_2(x)$$

\vdots

$$P(x) = (x-z_0)^k (x-\overline{z_0})^k \cdot R_k(x), \text{ где је } R_k(x) \text{ реалан}$$

полином и z_0 није корен

полинома $R_k(x)$

$$\Rightarrow \overline{z_0} \text{ није корен полинома } R_k(x)$$

Пример: $P(x) = 2(x-1)^2(x+3)(x-(1+i))(x-(1-i))$

$P(x) = 2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x-2x+2)$

реална факторизација

⊕: Нека је $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ реалан полином ($\deg P = n > 0$). Нека су $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_s, \bar{z}_s$ сви различити корени полинома P , који не припадају \mathbb{R} , и нека је k_i ред корена z_i . Нека су x_1, x_2, \dots, x_m сви различити корени полинома P који припадају \mathbb{R} и нека је k_i ред корена x_i .
 Тада важи:

$$P(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_m)^{k_m} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{k_s},$$

где је $p_i = -2\operatorname{Re}(z_i)$, $q_i = |z_i|^2$ и важи

$$\deg P = n = k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_s$$

⊕: Нека је $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ реалан полином са целим бројним коефицијентима. Ако је број $\frac{p}{q}$ (где су p и q узajално прости, узм бројеви) корен полинома $P(x)$, тада $\frac{p}{q} | a_0$ и $q | a_n$.

Пример

1) Сређити рационалне корене полинома:

$$P(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$$

$$\frac{p}{q} \quad p | -1 \quad q | 4 \Rightarrow q \in \{ \pm 1, \pm 2, \pm 4 \}$$

$$\Downarrow$$

$$p \in \{ -1, 1 \} \quad \frac{p}{q} \in \{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} \}$$

Доказ: За полином

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0)$$

ако је $x = \frac{p}{q}$ рационална нула тада:

$$(*) \quad 0 = P_n\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \dots + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n \frac{p^n}{q^n} \quad \bigg/ \cdot q^{n-1}$$

$$\rightarrow 0 = \underbrace{a_0 q^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{a_1 p q^{n-2}}_{\in \mathbb{Z}} + \dots + \underbrace{a_{n-1} p^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + a_n \frac{p^n}{q} \quad (**)$$

$$\rightarrow a_n \frac{p^n}{q} \in \mathbb{Z}$$

p, q - узajамно прости

$$\rightarrow \boxed{q \mid a_n}$$

Приметимо

$$a_n \frac{p^n}{q} = m \cdot p^n \quad \text{Из } (**) \text{ множењем са}$$

$$\frac{1}{p}: \quad 0 = a_0 \cdot \frac{q^{n-1}}{p} + \underbrace{a_1 q^{n-2}}_{\in \mathbb{Z}} + \dots + \underbrace{a_{n-1} p^{n-2}}_{\in \mathbb{Z}} + a_n \frac{p^{n-1}}{q}$$

\downarrow
 $m \cdot p^{n-1}$

$$\rightarrow a_0 \frac{q^{n-1}}{p} \in \mathbb{Z}$$

p, q - узajамно
прости

⑦. Ако је z_0 корен реда k полинома $P(x)$ ($0 < k < \deg P$)
 тада је z_0 корен реда $k-1$ изводног полинома $P'(x)$.

Доказ: ДОМАЋИ

$$\begin{aligned} z_0 \text{ корен реда } k \\ \rightarrow P(x) &= (x - z_0)^k \cdot Q(x) \quad Q(z_0) \neq 0 \\ \rightarrow P'(x) &= k(x - z_0)^{k-1} \cdot Q(x) + (x - z_0)^k \cdot Q'(x) \\ &= (x - z_0)^{k-1} [kQ(x) + (x - z_0)Q'(x)] \end{aligned}$$

Последице:

i) Ако је $P(z_0) = 0$ и ако је z_0 корен реда $k-1$ изводног полинома $P'(x)$, тада је z_0 корен реда k полинома $P(x)$.

ii) z_0 је корен реда k полинома $P(x)$ ако и само ако $P(z_0) = P'(z_0) = \dots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$ и $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Пример: ✓ (векда) доказаћу да је $z_0 = 1$ корен реда $k=3$ полинома $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + n \cdot x^{n-1} - 1$

- Рационалне функције -

①: Нека су даћи полиноми $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ ($m = \deg P$, $n = \deg Q$) и нека је K скуп свих нула полинома $Q_n(x)$. Функција дефинисана $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{K\}$: $f(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ се назива рационална функција.

②: Рационална функција $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ је права ако $\deg P < \deg Q$ и неправа ако $\deg P \geq \deg Q$.

①: Рационална функција $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ је несводлива ако је $\text{NZD}(P, Q) = 1$. У супротном је сводлива.

②. Свака неправа рационална функција $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ може се на јединствени начин разложити на збир полинома и праве рационалне функције.

Доказ: Вазни $m \geq n$ тада постоје полиноми

$$B(x) \text{ и } R(x) \text{ тако да } P_m(x) = B(x) \cdot Q_n(x) + R(x)$$

$$\deg R < \deg Q$$

$$\rightarrow \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = B(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

↓
полином

↓
права
рационална функција

③: Парцијални разломи су рационалне функције следеће облика:

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

$$(a, A \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

$$(A, B, p, q \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \wedge p^2 - 4q < 0)$$

④. Свака права и несводлива рационална функција, може се на јединствени начин разложити у збир парцијалних разломака.