

- МАТРИЦЕ -

(детерминанте)

①. Дефиниција матрице и основне особине

①: Матрица формица $m \times n$ над пољем $F = (F, +, \cdot)$ јесте правоугаона шема (таблица) елемената:

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Елементи $a_{ij} \in F$ ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$) се називају елементи матрице.

Претходну правоугаону шему A , тада матрицу A можемо дефинисати и као пресликавање:

$$(2) \quad A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow F$$

За $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ вредности $a_{ij} \in F$ (при претходном пресликавању) одређује елементи матрице у i -тој строци и j -тој колони.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{--- } j\text{-та колона} \\ \text{--- } i\text{-та строка} \end{matrix}$$

$m \times n$

Главна дијагонала матрице A формата $m \times n$ састоји се од елемената $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$, где је $k = \min\{m, n\}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{kk} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

① Квадратна матрица је матрица формата $n \times n$. (број строја m је једнак броју колона n). За квадратну матрицу формата $n \times n$, кажемо да представља квадратну матрицу реда n .

① Код квадратне матрице реда n главна дијагонала се састоји од елемената $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, а споредна дијагонала се састоји од елемената $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$.

① За квадратну матрицу дефинишемо трагу матрице
 $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

① За матрицу A формата 1×1 бринемо њиховствено
 $A = [a_{11}] = a_{11}$.

① Матрица A формата $m \times n$ се одређује и записи свих елемената:

$$(3) \quad A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$$

Скуп $F^{m \times n}$ је скуп свих матрица формата $m \times n$ над пољем F .

На основу функцијске дефиниције матрице

$$A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow F$$

Важно: две матрице $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ и $B = [b_{ij}] \in F^{p \times q}$,

су једнаке матрице, у ознаци $A=B$, ако важи:

$$(m=p \wedge n=q) \wedge a_{ij} = b_{ij}$$

Ⓐ За $A, B, C \in F^{m \times n}$ важе опште особине

(i) $A=A$

(ii) $A=B \Rightarrow B=A$

(iii) $A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C$ (транзитивност)

- Операције над матрицама -

Ⓐ: За матрице $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}] \in F^{m \times n}$ истог формата
збир матрица је матрица $C = A+B = [c_{ij}] \in F^{m \times n}$
 а елементи $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\forall i, j)$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{збир}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Ⓐ Нула матрица O формата $m \times n$ над F је матрица која се састоји од нултих елемената
 $O = [0]_{m \times n}$

Важно за $A \in F^{m \times n}$ и $O \in F^{m \times n}$ - нула матрица:

$$A + O = O + A = A$$

①: За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ и скалар $\alpha \in F$ дефинишено производ скалара и матрице као матрицу $C = \alpha A = [c_{ij}] \in F^{m \times n}$ са елементима
 $(\forall i, j) \quad [c_{ij}] = \alpha [a_{ij}]$

Пример:

За $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \in F^{n \times n}$ и $\alpha \in F$

Важно: $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$

①: За матрицу $A \in F^{m \times n}$ матрица $(-1) \cdot A$ се назива супротна матрица и означава се са $-A$.

Важно за произвојну матрицу $A + (-A) = (-A) + A = O$

②: Важне својине скаларне:

(i) $(F^{m \times n}, +)$ - Абелова група

$$+ : F^{m \times n} \times F^{m \times n} \rightarrow F^{m \times n}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

$$A + B = B + A$$

$$(ii) \quad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(iii) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

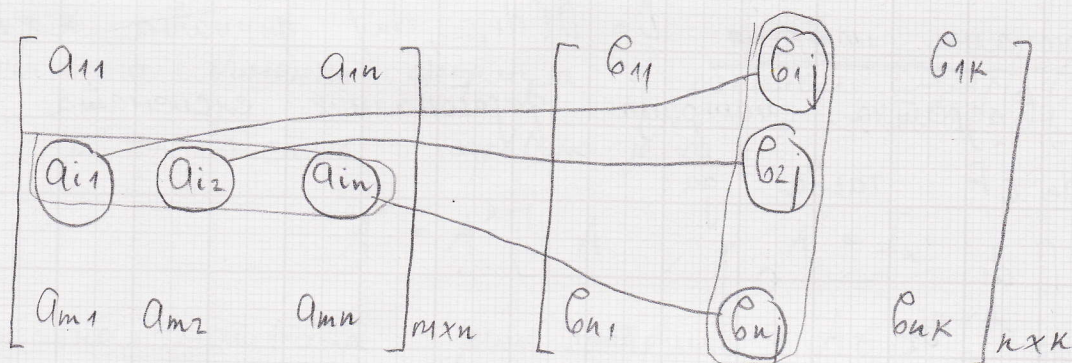
$$(iv) \quad \alpha(\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

$$(v) \quad 1 \cdot A = A$$

$$A, B \in F^{m \times n}, \quad \alpha, \beta \in F$$

① Дефиниција производа две матрице

За матрице $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ и $B = [b_{ij}] \in F^{n \times k}$, одређујемо производ матрица A и B као матрицу $C = A \cdot B = [c_{ij}] \in F^{m \times k}$ такво да $(\forall i, j) \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$



$$= \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{m \times k}$$

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}$$

Пример: За матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ и $B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$
одређити $C = A \cdot B$ и $C = B \cdot A$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 20 & -80 \\ 5 & -20 \end{bmatrix}$$

①: Јединична матрица I_n формата $n \times n$ над пољем F одређена је са: $I_n = [d_{ij}] \in F^{n \times n}$

где је $d_{ij} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases}$ - Кронекеров симбол

Ванш:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Тада за: $A \in F^{m \times n}$ Ванш: $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$

①: Дијагонална матрица $D = D(d_1, \dots, d_n)$ формата $n \times n$ јесте квадратна матрица дијагоналних елемената $d_1, \dots, d_n \in F$ таква да:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

①: Скаларна матрица јесте дијагонална матрица $D(d, d, \dots, d)$ за $d \in F$

Ванш: $D(d, d, \dots, d) = d \cdot I_n$

③: i) За $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times k}$, $C \in F^{k \times l}$ Ванш:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{асоцијативност}$$

(ii) За $A \in F^{m \times n}$ и $B, C \in F^{n \times k}$ Ванш:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

iii) За $A, B \in F^{m \times n}$ и $C \in F^{n \times k}$ важи:

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

iv) За $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times k}$ и $\alpha \in F$ важи:

$$(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha (A \cdot B)$$

Ⓙ) Алгебарска структура $(F^{n \times n}, +, \cdot)$ квадратних матрица реда n одређује прстен са јединицом I_n .

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Не важи ни бинарна формула у општем случају. (за множење)
 Рачунање k -тог степена, одређено је са:

$$A^k = A^{k-1} \cdot A, \quad A^0 = I_n$$

Ⓚ) Тројугаона матрица јесте матрица $A \in F^{n \times n}$ која изнад или испод главне дијагонале има нуле.

Ⓛ) Транспонована матрица матрице $A = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ јесте матрица $A^T = [c_{ij}] \in F^{n \times m}$ $(\forall i, j) c_{ij} = a_{ji}$

Пример: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Ⓜ) i) $(A^T)^T = A$ ($A \in F^{m \times n}$)

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ ($A, B \in F^{m \times n}$)

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$ ($A \in F^{m \times n}, \alpha \in F$)

ЛОМАТИ

$$iv) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k})$$

①: $A \in F^{n \times n}$ је симетрична ако је $A^T = A$

①: $A \in F^{n \times n}$ је кососиметрична ако је $A^T = -A$

- детерминанте -

2° дефиниција детерминанте и основне особине

За коначан скуј $A = \{a_1, \dots, a_k\}$,
 свако бијективно премакивање $f: A \xrightarrow[1 \rightarrow 1]{\text{на}} A$ одређује
 тајно једну пермутацију без понављања скуја A

Ако је $f(a_i) = a_{\bar{i}}$ тада $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_{\bar{1}} & a_{\bar{2}} & \dots & a_{\bar{k}} \end{pmatrix}$
пермутација

Лема 1: За коначан скуј $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ скуј свих
 пермутација $S = \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ скуја A у односу на
 композицију (\circ), има структуру групе и то не-Абелове за
 $k \geq 3$.

Група (S, \circ) има $k!$ елемената.

Скуј A разматрамо нормално као скуј $\{1, 2, \dots, n\}$, а
 функције које су бијекције $f: A \xrightarrow[1 \rightarrow 1]{\text{на}} A$, означавамо са
 ρ и зовемо пермутацијама.

Пример:

За $A = \{1, 2, 3\}$ имамо следеће пермутације

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$S = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ (S, \circ) формира групу

$$e = p_1$$

$$p_5 \circ p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$p_5^{-1} = p_4$$

①: За пермутацију $p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ елементи i_p и i_q су у инверзији ако важи $p < q, i_p > i_q$

Пример 2: Одредити број инверзија за пермутације:

p_1 - 0 инверзија p_2 - 1 инверзија

p_3 - 1 инверзија p_4 - 2 инверзије

p_5 - 2 инверзије p_6 - 3 инверзије

②: Пермутација која има паран број инверзија се назива парна пермутација. У супротном је непарна.

Пример 3:

p_1, p_4, p_5 - парне пермутације

p_2, p_3, p_6 - непарне пермутације

①: За $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ дефинишемо детерминанту матрице A као број (скалар):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} (-1)^{I(i_1, \dots, i_n)} \cdot a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$$

где је $I(i_1, \dots, i_n)$ број инверзија у пермутацији (i_1, \dots, i_n) (која је настала од $(1, \dots, n)$)

НАПОМЕНА: (i_1, \dots, i_n) је скраћен запис за пермутацију $\begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ i_1, \dots, i_n \end{pmatrix}$

Пример

$n=1 \quad |a_{11}| = (-1)^{I(1)} \cdot a_{11} = a_{11}$

$n=2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{I(1, 2)}}_1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \underbrace{(-1)^{I(2, 1)}}_{-1} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

$\Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$n=3 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(\overset{0}{\cancel{1, 2, 3}})} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{I(\overset{1}{\cancel{1, 3, 2}})} a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ + (-1)^{I(\overset{2}{\cancel{2, 1, 3}})} a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^{I(\overset{2}{\cancel{2, 3, 1}})} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ + (-1)^{I(\overset{2}{\cancel{3, 1, 2}})} a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^{I(\overset{3}{\cancel{3, 2, 1}})} a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right\} \quad \text{САРУСОВО ПРАВИЛО}$$

(само за $n=3$)

НАПОМЕНА: $|A| = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} (-1)^{I(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \quad (|S|=n!)$

Лема 2: Нека је $P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ тада број инверзија у пермутацији P и P^{-1} је једнак.

Доказ

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & \dots & s & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r & \dots & i_s & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r & \dots & i_s & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & r & \dots & s & \dots & n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ако важи за пермутацију P
 $r < s, i_r > i_s$

тада у пермутацији P^{-1} такође се јавља инверзија
 $i_r < i_s, r > s$

(што проверав сортирањем датума)

нпр. $P = \begin{pmatrix} \dots & 3 & \cdot & 5 & \dots \\ \dots & 17 & \cdot & 9 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} \dots & 17 & \cdot & 9 & \dots \\ \dots & 3 & \cdot & 5 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 9 & \cdot & 17 & \dots \\ \dots & 5 & \cdot & 3 & \dots \end{pmatrix}$

\Rightarrow ако се јавља инверзија у P , јавиће се и у P^{-1}

$$(3) \quad \underbrace{r < s, i_r > i_s}_P \Leftrightarrow \underbrace{i_r < i_s, r > s}_{P^{-1}} \Rightarrow I(P) = I(P^{-1})$$

Лема 1: За $A \in F^{n \times n}$ важи:

$$|A^T| = |A|$$

Доказ: Посматрајмо пермутације P и P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

тада на основу леме 2 важи:

$$(*) \quad I(P) = I(P^{-1})$$

даје банш

$$|A| = \sum_{p=(i_1, \dots, i_n) \in S} (-1)^{I(p)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} =$$

$$= \sum_{p \in S} (-1)^{I(p)} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n} \begin{cases} \text{добито сортирањем} \\ a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \text{ по групам} \\ \text{индексу, нпр.} \\ p = (2, 3, 1) \quad p^{-1} = (3, 1, 2) \text{ банш} \\ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \end{cases}$$

$$= \sum_{p^{-1} \in S} (-1)^{I(p^{-1})} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$$

= $|A^T|$, јер скуп производа $a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}$ при $p \in S$ се поудара са скупом производа $a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$ при $p^{-1} \in S$

Пример:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|$$

Лема 2: За $\alpha \in F$ и $A \in F^{n \times n}$ банш:

$$i) \quad \alpha \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \alpha a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ј) детерминанта се линеарно скаларно шак шак се једнамена брзина (колоне) линеарно шак скаларно.

$$ii) \quad |\alpha \cdot A| = \alpha^n |A|$$

Пример

$$\alpha |A| = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc$$

Лема 3: За матрицу $A \in F^{n \times n}$, ако је матрица A' настала заменом две брзине (колоне) од полазне матрице, тада банш

$$|A'| = -|A|$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

Став 4: За матрицу $A \in F^{n \times n}$, ако елементи јдне врше су једнаки елементима неке друге врше (колоне) тада је $|A| = 0$.

Став 5: За матрицу $A \in F^{n \times n}$ ако су елементи јдне врше (колоне) пропорционални елементима неке друге врше (колоне) тада је $|A| = 0$.

Пример

1) детерминанта је једнака нули, ако садржи врсту (колону) састављену од нула.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0$$

2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \end{vmatrix} = 0$

Став 6: Нека је дата матрица $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$. Ако за матрицу A и фиксирану i -ту врсту ($1 \leq i \leq n$) важи разлагање врше на збир:

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{in} = a_{in}^{(1)} + a_{in}^{(2)}$$

и ако је $A^{(1)}$ матрица добијена од матрице A заменом i -те врше са вршом $a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{in}^{(1)}$, и ако је $A^{(2)}$ добијена из A заменом i -те врше са вршом $a_{i1}^{(2)}, \dots, a_{in}^{(2)}$, тада је:

$$|A| = |A^{(1)}| + |A^{(2)}|$$

Пример

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}}_{|A|} = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}}_{|A^{(1)}|} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}}_{|A^{(2)}|}$$

Став 6': Важи аналогни став за колоне.

Став 7: Нека је дата матрица $A \in F^{n \times n}$, ако је матрица A' настала од A тако што се елементима јдне врше (колоне) додату одговарајући елементи неке друге врше (колоне) претходно

помножени скаларом $\lambda \in F$, тада важи:

$$|\lambda A| = |\lambda| |A|$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Нека је $A \in F^{m \times n}$. Субматрица је одређена са:

$$I = (i_1, \dots, i_r), \quad i_1 < \dots < i_r, \quad \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, m\}$$

(*)

$$J = (j_1, \dots, j_s), \quad j_1 < \dots < j_s, \quad \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

као матрица $A_{IJ} \in F^{r \times s}$

$$A_{IJ} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \dots & a_{i_r j_s} \end{bmatrix}$$

Елементи субматрице A_{IJ} су елементи матрице A који се налазе у пресецима брoja са индексима из I и колона са индексима из J .

(!) Ако је $I = J$, тада субматрица се назива главна

За квадратну матрицу $A \in F^{n \times n}$, минор матрице A јесте детерминанта ма које квадратне субматрице.

(A): За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ фиксирамо елемент a_{ij} . Тада алгебарски комплемент (кофактор) елемента a_{ij} јесте израз:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

где је D_{ij} детерминанта одређена као минор квадратне субматрице настале изостављањем i -те броя и j -те колоне.

Лема 8: (Ла Пласов развој) За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$, а i -ту везу баци

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

односно за j -ту колону:

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{4 \cdot (-1)^{1+4}}_{A_{14}} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -36$$

ПОСЛЕДИЦЕ:

$$1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

ГАУСОВ ПОСТУПАК

2) Ако је $|A|$ подељена на n блокова, при чему су A_1 и A_2 квадратни блокови, C је нула блок, а B је произвољан блок

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \in F^{n \times n}$$

тада је $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$

Лема 9 (Коше-Бинеово својство) За $A, B \in F^{n \times n}$ важи

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Лема 10 За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ важи:

$$1^\circ \quad a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$2^\circ \quad a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} |A|, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Инверзна матрица

① За квадратну матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$, матрица $X \in F^{n \times n}$, назива се инверзна матрица ако важи:

$$AX = XA = I$$

Ако постоји инверзна матрица, може се показати да је јединствена, и тада означавамо $X = A^{-1}$

② Ако матрица $A \in F^{n \times n}$ има инверзну матрицу A^{-1} тада матрицу $A \in F^{n \times n}$ називамо регуларном или несингуларном матрицом.

У супротном, матрица је сингуларна.

③: За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$, квадратна матрица $\text{adj}(A) = [A_{ij}]^T$ се назива адјунгована матрица.

④: За $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ важи:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = |A| \cdot I_n$$

Доказ

Матричним множењем и применом леми 10.

$$A \cdot \text{adj}(A) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{bmatrix}}_{\text{adj}(A)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} A_{kj} \end{bmatrix}}_{\text{елементи}}$$

Елементи:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} |A| = \begin{cases} |A|, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \Rightarrow A \text{adj}(A) = |A| I_n = \begin{vmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots \\ & & & |A| \end{vmatrix}$$

$$(T_2) \quad |\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(T3) За матрицу $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ постоји инверзна матрица A^{-1} ако и само ако је $|A| \neq 0$.

Када је $|A| \neq 0$, тада је $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$

Доказ

$$\Rightarrow \text{Ако } (\exists X = A^{-1}) \quad A \cdot X = X \cdot A = I_n$$

$$\Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A^{-1} A| = |I_n|$$

$$\text{С.9} \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

\Leftarrow Према (T1) важи:

$$\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I_n \quad \text{и нека важи да је } |A| \neq 0$$

$$\text{Тада:} \quad A \underbrace{\left(\frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right)}_{A^{-1}} = \underbrace{\left(\frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right) \cdot A}_{A^{-1}} = I_n$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

(T4) Скуп свих регуларних квадратних матрица реда n образује групу у односу на множење матрица

(T5) За регуларне матрице $A, B \in F^{n \times n}$ важи:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Доказ

$$(A \cdot B) (B^{-1} A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} (A^{-1} A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = I$$

(T6) За матрицу $A \in F^{n \times n}$ - регуларну и $B \in F^{n \times n}$ важи

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} B$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

где је X непозната матрица.

Квадратни системи линеарних једначина

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_1^n \quad \text{матрица система}$$

$$\det A = |a_{ij}|_1^n \quad \text{детерминанта система}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$D(A) \neq 0 \Rightarrow A \cdot X = B / A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B = I \cdot X = X = A^{-1} \cdot B$$

\Leftrightarrow решења постоје и јединствена су.

Претпоставимо да систем има решења x_1, \dots, x_n
 $D(A) = D$ - детерминанта система; $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$D \cdot x_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} x_j =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}x_j & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}x_j & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj}x_j & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_j$$

Ако је $D \neq 0$ тада $x_j = \frac{D_j}{D}$, $j = 1, 2, \dots, n$ - Крамерове формуле